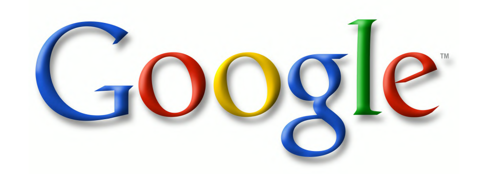


Die

Methodik des Rechen- und Raumlehre-Unterrichts

in der Volksschule.

Ein Handbuch

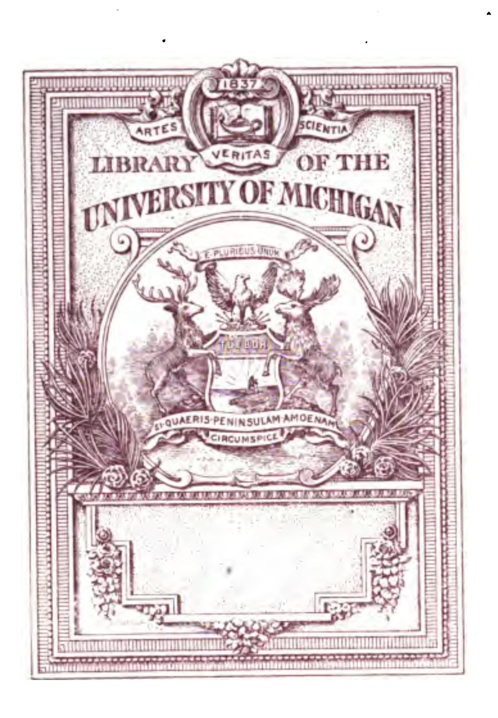
für die oberen Klassen der Seminare und für Volksschullehrer

von

R. Schroeter, Seminarlehrer.

3. vollständig umgearbeitete und verbesserte Auflage.

Wittenberg 1905.
R. Herrosé's Verlag (H. Herrosé).



1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE



Die Methodik des Rechen- und Raumlehre-Unterrichts in der Volksschule.

Ein Handbuch
für die oberen Klassen der Seminare und für Volksschullehrer

von

R. Schroeter, Seminarlehrer.

3. vollständig umgearbeitete und verbesserte Auflage.

Wittenberg.
R. Herrosé's Verlag (H. Herrosé)
1905.

Vorwort zur 1. Auflage.

Die vorliegende Arbeit soll dem Unterricht der Seminaristen in der Methode des Rechnens zugrunde gelegt werden und dieselben bei der Wiederholung der durchgenommenen Stücke, sowie die Lehrseminaristen bei ihrer Vorbereitung auf ihre Schularbeit unterstützen; sie soll dem jungen Lehrer zur Seite stehen und ihm Rat und Hilfe bringen, wenn er deren im Unterrichte bedarf, vor allem aber wird sie ihm zur Vorbereitung auf das 2. (methodische) Examen dienen; sie soll allen denen, welche entweder durch ihr Amt oder auch sonstig veranlaßt werden, Interesse am Rechenunterricht zu haben, in übersichtlicher Weise Auskunft erteilen über die Methode dieses Unterrichtsfaches.

Diese 50 Abschnitte bieten keine Aufgabensammlung, durch sie sollen aber Seminaristen und Lehrer befähigt werden, geeignete Aufgaben selbst zu bilden; sie bringen auch nichts absolut Neues, doch wird der aufmerksame Leser finden, daß sie sowohl hinsichtlich der Stoffauswahl als auch der Anordnung und der Behandlung desselben manchen neuen und doch in langjähriger Praxis erprobten Gesichtspunkt aufstellen.

Mögen diese Beiträge an ihrem Teile mit dazu helfen, daß die unserer Volksschule für das Rechnen gestellten Ziele erreicht werden.

Vorwort zur 2. Auflage.

Die neue Auflage der Beiträge ist eine vermehrte und verbesserte. Vermehrt und verbessert ist dieselbe durch sorgfältige Korrektur, durch den weiteren Ausbau vieler Artikel, durch Hinzufügung von Aufgaben-Übersichten, durch Besprechung der vier Grundrechnungsarten mit mehrfach benannten Zahlen und der Kranken-, Unfall-, Invaliditäts- und Altersversicherung, durch Einfügung von ausführlichen Stoff- und Wiederholungsplänen und durch eine Übersicht über die Geschichte der Rechenkunst und der Methode des Volksschulrechnens.

Eine neue Gruppierung der Artikel stellt die, welche mehr allgemeine Punkte berücksichtigen, an das Ende des Buches.

Möge das Buch in seiner neuen Gestalt sich viele Freunde neu erwerben und der Schule zum Segen gedeihen.

Vorwort zur 3. Auflage.

Stillstand ist Rückgang!

An keinem Rechenmethodiker kann die ungeahnte Entwicklung der **Methodik** des Volksschulrechnens in den letzten Jahrzehnten spurlos vorübergegangen sein.

Die rationelle Rechenmethode krankte in ihrer Ausführung immer noch an der zu einseitigen Betonung des pestalozzischen Formalprinzips. Trotz der 1300 Rechenstunden, die einem Schulkinde während der Schulzeit erteilt wurden, war der Erfolg kein befriedigender. — Endlich fing man an, die schon seit langer Zeit vereinzelt auftretenden Mahnungen zu beachten; denn man versuchte den Rechenunterricht dadurch lebendiger zu gestalten, daß die Rechenkraft an Stoffen aus dem Anschauungskreise der Kinder gebildet und angewendet wurde und daß man diese Stoffe nicht planlos, sondern planmäßig mit dem Rechenunterrichte verband. Hierdurch trat der Rechenunterricht in die berechtigten Beziehungen zu den anderen Unterrichtsfächern, er konnte diese unterstützen und erfuhr von ihnen Förderung zur Erreichung seiner Ziele, kurz, er wurde dadurch in den Dienst des erziehenden Unterrichts gestellt.

Dieses „Sachrechnen“ wurde hin und wieder viel zu einseitig betrieben; denn man vergaß die Rechenstunde und ging in den Erläuterungen des Sachgebietes auf oder besser unter. Bald aber wurde die mittlere Basis gefunden. Auf diese mittlere Basis habe ich auch meine Rechenhefte*) durch die Umarbeitung derselben im Jahre 1903 gestellt. Auf der Grundlage der pestalozzischen Anschauungslehre soll die formale und materiale Bildung so gefördert werden, daß der Rechenunterricht beiträgt, die Ziele des erziehenden Unterrichts zu erreichen.

Nach diesen Gesichtspunkten wurde auch die vorliegende Methodik bei der jetzigen Neuauflage umgearbeitet. Die einzelnen Abschnitte sind durchgesehen und verbessert worden; eine Reihe von zeitgemäßen Artikeln wurde neu aufgenommen; andere, besonders die Übersicht über die Entwicklung der Rechenkunst und der Methode des Volksschulrechnens, wurden umgestaltet und ausgebaut. Auch die Gruppierung der Abschnitte wird in der neuen 3. Auflage übersichtlicher sein als bisher.

Eine wesentliche Erweiterung hat diese 3. Auflage dadurch erfahren, daß in einem II. Teil die Methodik des Raumlehre-Unterrichts in der Volksschule hinzugefügt worden ist. Die Notwendigkeit der Erweiterung ergibt sich aus der stetig wachsenden Bedeutung dieses Unterrichtszweiges.

Nach kurzer Darstellung der Geschichte der Entwicklung der Methode des Raumlehre-Unterrichts wird die Theorie und Praxis desselben nach den bei der Darlegung der Methode des Rechenunterrichts angewendeten Grundsätzen gegeben.

Möge dieses Theorie und Praxis vereinigende methodische Handbuch des mathematischen Unterrichts unserer Volksschule zum Segen gereichen.

Delitzsch, Juni 1904.

Schroeter.

---

*) Schroeter, Tafelrechenhefte, Ausgabe A 6 Hefte, Ausgabe B 3 Hefte bei H. Herrosé-Wittenberg.

Inhaltsverzeichnis.

I. Teil. Die Methodik des Rechenunterrichts in der Volksschule.

A. Überſicht über die Entwicklung der Rechenkunſt und der Methode des Volksſchulrechnens.

B. Allgemeine Methodik.

C. Beſondere Methodik.

A. Das Rechnen auf der Unterſtufe.

B. Das Rechnen auf der Mittelstufe.

C. Das Rechnen auf der Oberstufe.

II. Teil. Die Methodik des Raumlehre-Unterrichts in der Volksschule.

A. Geschichtliches zur Entwicklung der Methode des Raumlehre-Unterrichts.

B. Theorie und Praxis des Raumlehre-Unterrichts in der Volksschule.

I. Teil.

Die Methodik des Rechenunterrichts in der Volksschule.

A. Übersicht über die Entwicklung der Rechenkunst und der Methode des Volksschulrechnens.

(Benutzt sind zu dieser Zusammenstellung: Cantor, Mathematische Beiträge zum Kulturleben der Völker; Jänicke, Geschichte des Rechenunterrichts; Wildermuths, Geschichte des Rechenunterrichts in Schmids Enzyklopädie; Sterner, Geschichte der Rechenkunst und Hartmann, Rechenunterricht in der deutschen Volksschule.)

1. Allgemeines.

Die ersten Anfänge des Denkens müssen bei der sinnlichen Wahrnehmung gleichartiger und ungleichartiger Dinge auf einen Gegensatz zwischen Einheit und Vielheit geführt haben, das Rechnen muß also so alt sein, als das Geschlecht der denkenden Menschen. Wir wissen wenig oder nichts von diesen Anfängen des Rechnens; denn da die spärlichen Nachrichten über die Uranfänge des Rechnens uns nur durch die Schrift der alten Kulturvölker übermittelt werden können, diese aber eine bedeutende Kulturhöhe voraussetzt, werden wir von den ersten Entwicklungsstufen des Rechnens, die vor der Erfindung und Anwendung der Schriftzeichen notgedrungen vorhanden waren, kaum etwas erfahren können. Ein annähernd richtiges Bild dieser Zeit läßt sich vielleicht durch einen Blick auf das Rechnen der noch jetzt lebenden unkultivierten Volksstämme gewinnen.

So zählen die Indianer z. B. an den Fingern und Zehen. Gleich sind bei ihnen die Bezeichnungen für 1 und für Finger, für 5 und für die ganze Hand; für 6 sagen sie: von der andern Hand eins; für 10: zwei Hände; für 11: vom Fuß eins; für 12: vom Fuß 2; für 15: ein Fuß und zwei Hände usw. 20 ist ein Mann; wollen sie über 20 hinaus, so müssen sie die Glieder eines andern Mannes mit heranziehen; 100 sind fünf Männer. Mit dem Aussprechen der Zahl ist stets das Zeigen derselben verbunden. Andere Völker, z. B. die Karaïben, haben zwar besondere Namen für die Zahlen von 1 bis 4, die übrigen Zahlen aber werden in einer der angegebenen Weise ähnlichen Art bezeichnet. Der Finger bildet also in den meisten Fällen die Einheit, während die Auffassung der Mehrheit wahrscheinlich bald zur Benutzung der Finger und Zehen führte. Durch Finger und Zehen sind 20 Einheiten vertreten, und

diese sind wieder zu je 5 gegliedert. Hierin finden wir die ersten Spuren von einer Zusammenfassung von Einheiten in höhere Einheiten, und diese Fünfer-, Zehner- und Zwanzigersysteme lassen sich noch jetzt bei einer Reihe von Völkern nachweisen. Das Fünfersystem ist häufig mit dem Zehnersystem verquickt, so findet man in der römischen Zahlbezeichnung für 5 und für 10 Einheiten besondere Zeichen, auch die meisten afrikanischen Völker haben die Zwischeneinheit der 5. Das Zehnersystem ist in allen Kulturstaaten eingeführt, und Reste des Zwanzigersystems finden sich noch im Nordosten von Asien und in Süd- und Mittelamerika.

Interessant ist auch ein Rückblick auf die Bildung der Zahlwörter. Der gefundene Begriff verlangte eine sprachliche Fixierung. Wir hörten soeben, daß die Bezeichnung für 1 und für Finger bei einer Gruppe von Indianern gleich ist. In ähnlicher Weise werden wahrscheinlich die meisten ursprünglichen Zahlennamen von den Dingen hergenommen sein, durch welche die Zahl dargestellt wurde. Die Inder haben heute noch für Auge und 2 dieselbe Bezeichnung, und die Malaien auf Java nennen Hand und 5 heute noch gleich. Diese Verwandtschaft der Bezeichnung von Hand und 5 findet man auch sonst noch sowohl im Sanskrit wie in den slawischen Sprachen.

Die gleichen Bezeichnungen für Zahl und Sache mußten häufig zu Irrungen Veranlassung geben, und hieraus ergab sich die Notwendigkeit, eigene Zahlwörter zu bilden. Sterner sagt hierzu: „Der Gebrauch besonderer Zahlwörter ist aber schon sehr alt und greift jedenfalls in jene Zeit zurück, in welcher die Verbreitung des Menschengeschlechts sich noch auf einen verhältnismäßig kleinen Teil der Erdoberfläche beschränkte. Betrachten wir nämlich die Zahlwörter aus verschiedenen Sprachen, so finden wir bei den Wörtern für ein und dieselbe Zahl eine auffallende Ähnlichkeit. Nachstehende Tabelle, von Sterner aus Villicus, „Zur Geschichte der Rechenkunst" entnommen, die die Zahlwörter von 1 bis 10 in sieben Sprachen darstellt, läßt diese Ähnlichkeit schon erkennen.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Sanskrit . .	eka	dva (dvi)	tri	catvâr	páncan	sas	sáptan	ástan	návan	dásan
Hindostanisch	yek	do (du)	tin (ce)	char (cihar)	panch	cha sax	sat haft	atth	nao (noh)	dass (dah)
Keltisch . .	unan (un)	daou	tri	peuar	pemp	cheab	seis	eis	nao	dek
Altgriechisch .	heis	dyo	treis	tessares	pente	hex	hepta	okto	ennea	deka
Lateinisch . .	unus	duo	tres	quatuor	quinque	sex	septem	octo	novem	decem
Gotisch . .	ain ains aina ainata	twai twôs tva	thrija	fidvôr	fimf	saihs	sibun	ahtan	niun	taihun
Althochdeutsch .	ein einêr einin einuz	zwêne zwô zwei	drî driu	fior	fimf	sehs	sîbun	ahtô	niun	zehan
Mittelhochdeutsch .	ein einer einiu einez	zwêne zwo zwei	drî driu	vier	vimf	sehs	siben	aht	niun	zehen

Die fortschreitende Kultur drängte auf die Fixierung von Zahlen und auf ein Ergebnis der Vergleichung der Zahlen hin (Rechnen). Im Anfang genügten wohl Einschnitte in Bäumen und in dem Kerbholz, bald aber verlangte das Leben bestimmte Zahlzeichen. Über die Notwendigkeit der Zahlzeichen schreibt Stoy in seiner Geschichte des Rechenunterrichts: „Neben der auch unter den günstigsten Umständen vorhandenen Unsicherheit des Gedächtnisses, welche bei der den Zahlbegriffen eigentümlichen Isoliertheit von andern Hilfsvorstellungen sich noch besonders geltend machen muß, ist es ein tief begründetes ethisches Bedürfnis, künftigen Streit unmöglich zu machen; ein solcher ist aber gerade in den Fällen, wo Zahlen mit in Betracht kommen, heftiger und hartnäckiger als sonst."

Die einfachsten Zahlzeichen waren Striche, durch verschiedene Stellung und durch Gruppierung derselben konnten schon mancherlei Zahlen bezeichnet werden (vgl. die Ziffern der Römer). Buchstaben als Zahlzeichen treten erst viel später auf.

2. Das Rechnen bei den alten Kulturvölkern.

Von dem Rechnen der alten Kulturvölker wissen wir wenig, und dies Wenige hat für uns nur geschichtlichen Wert, da es auf die Gestaltung unseres heutigen Rechnens keinen Einfluß ausgeübt hat.

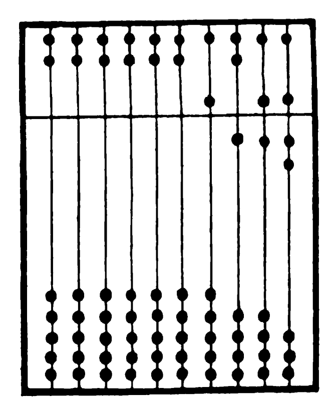
Die **Ägypter** waren durch ihre hochstehende Kultur (die Eindeichung des Flusses, die Kanalisierung des Landes, die Zurückgabe des überschwemmten Landes an seine Eigentümer, die durch den Ackerbau bedingten Gewerbe, Handel und Schiffahrt, die Bauten u. a.) zum Rechnen gezwungen. Im Anschluß an ihre drei Schriftarten (Hieroglyphenschrift, hieratische und demotische Schrift) hatten sie für die Zahlen auch dreierlei Zahlzeichen, von denen die Hieroglyphen sowohl durch ihre Form als auch durch die Art ihrer Zusammensetzung an die Ziffern der Römer erinnern; so ist z. B. 122 = 𓍢𓎆𓎆𓏺𓏺. Sie besaßen eine ausgebildete Rechenkunst, von der uns eine unter dem Namen „Papyrus Rhind" in der ägyptischen Abteilung des britischen Museums aufbewahrte, über 2200 Jahre v. Chr. Geb. verfaßte Aufgabensammlung Kenntnis gibt. Aus ihr geht hervor, daß damals den Ägyptern die 4 Grundrechnungsarten in ganzen und gebrochenen Zahlen bekannt waren, daß sie Gleichungen 1. Grades, Gesellschaftsrechnungs- und Raumberechnungsaufgaben lösen konnten, und daß ihnen auch arithmetische Reihen nicht unbekannt waren. Dem Schüler blieb es überlassen, die Regeln der Auflösung aus den Beispielen zu finden. Die Bruchrechnung wurde an Stammbrüchen ausgeführt, es mußte also jeder Bruch in Stammbrüche zerlegt werden können, aber nicht etwa so, daß $\frac{3}{7}$ aufgefaßt wurde als $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{7}$ und $\frac{1}{7}$, sondern als $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{7}$ und $\frac{1}{28}$. Zu dieser Zerlegung benutzten sie Tabellen.

Bei den arithmetischen Reihen wurden ohne jegliche Begründung des Verfahrens die Formeln für Berechnung der Summe aus Anfangs-

glied, Differenz und Anzahl der Glieder und der Berechnung des Anfangsgliedes aus Summe, Differenz und Anzahl der Glieder angewendet.

Aus vielen Berichten, z. B. von Herodot, möchte man folgern, daß die Ägypter ein geordnetes Schulwesen gehabt haben, und „daß das Rechnen allgemein üblich und Gegenstand des Elementarunterrichts gewesen sei".

Von den in den Flußtälern des Euphrat und Tigris wohnenden Chaldäern wird uns berichtet, daß sie schon zur Zeit der Patriarchen ein über 100 hinausreichendes Zahlsystem hatten. Bei dem Rechnen selbst bedienten sie sich der Finger und eines Rechenbrettes, eines Vorläufers unserer russischen Rechenmaschine. Zwischen Rahmen war eine Anzahl von Schnüren gespannt, und auf jeder derselben befanden sich 10 bewegliche Rechenkörper. Diesen Schnuren reiht sich die chinesische Zähl- oder Rechenmaschine, der Suan-pan, an.



Suan-pan, die Zahl 5167 darstellend.

Der Suan-pan ist heute noch über einen großen Teil Asiens verbreitet. Ein fester Rahmen mit einem den kürzeren Seiten parallelen Querholz bildet das äußere Gestell. Senkrecht zu dem Querholz sind 10 Drähte in gleicher Entfernung gezogen. Jeder Draht enthält in der größeren Abteilung 5 und in der kleineren 2 Rechenkörper; von den 5 Körpern zählt jeder eine Einheit, jeder von den oberen 2 Körpern zählt deren 5. Die Körper auf der nächsten Stelle nach links geben den 10fachen Wert der vorhergehenden Körper an. Die Einheiten, mit denen gerechnet werden soll, werden an die trennende Querleiste geschoben.

Die Ideenkreise der Ägypter und Chaldäer vereinigen sich bei den Griechen. Pythagoras lernte bei den Ägyptern die Geometrie und bei den Chaldäern die Arithmetik kennen und verpflanzte sie nach Griechenland. Die Griechen wollten aber nicht allein wissen, daß etwas ist, sondern warum es so ist, deshalb wurden die eingeführten Sätze bewiesen und in ein System gebracht. Sie waren für Geometrie begabter wie für Arithmetik. Welche Wertschätzung aber trotzdem die Arithmetik bei den Griechen genoß, zeigt folgender Satz aus Platons Erziehungslehre: „Jede andere Kunst benutzt die Arithmetik. Sie führt von der Erscheinung zur Idee und zur höchsten Philosophie," — auch wurde

dem ein besonderes Lob der Intelligenz zuteil, von dem man sagte: „er kann zählen.“

Die **Griechen** kannten das Zehnersystem und bezeichneten die Zahlen von 1—9, die Zehnerzahlen und die Hunderterzahlen durch die Buchstaben ihres Alphabets. Im Anschluß an die Geometrie nannten sie die Primzahlen, weil nicht zerlegbar, **linear**; Zahlen, die aus 2 Faktoren bestanden, hießen **Flächenzahlen**, und die aus 3 Faktoren zusammengesetzten Zahlen wurden **Körperzahlen** genannt. Als Hilfsmittel bei der Ausführung von Rechnungen benutzten sie ein Rechenbrett mit beweglichen Marken.

Die **Römer**, welche die Wissenschaft nur insoweit gelten ließen, als sie praktischen Bedürfnissen entgegenkam, waren nicht geeignet, die mathematischen Wissenschaften weiter auszubilden. Ihre Bedeutung für die Wissenschaft liegt vornehmlich darin, daß sie die Vermittlung zwischen der griechischen Kultur und dem Abendlande bildeten. Die Mathematiker standen den Wahrsagern und Zauberern gleich, ja es wurden einmal besondere Gesetze gegen sie erlassen. Nur weil die Arithmetik mit dem Staatsleben (Berechnung von Steuern usw.) und mit dem bürgerlichen Haushalte in Verbindung trat, wurde sie von ihnen hoch geachtet.

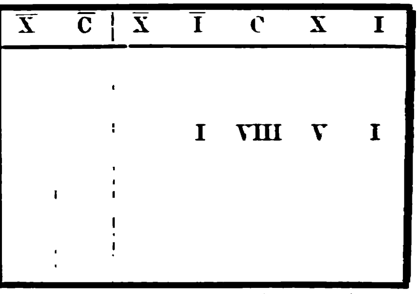
Die Römer bedienten sich der noch jetzt nach ihnen benannten Zahlzeichen, die aber nur bis 1000 reichten. Nicht nur für Einer, Zehner, Hunderter und Tausender hatten sie besondere Zeichen, sondern auch für Fünf, Funfzig und Fünfhundert. Die Numeration war sehr weitläufig und unsicher, und dem Betrug war Tor und Tür geöffnet. Die Ziffern wurden hauptsächlich additiv verwendet, es wurden hierbei die Zahlzeichen nach ihrer Größe von links nach rechts nebeneinander gestellt und addiert. Wurde aber ein kleineres Zeichen vor das größere gestellt, so mußte es von demselben subtrahiert werden. Größere Einheiten wurden durch multiplikative Zeichen aus den wenigen Zahlzeichen gebildet, so multiplizierte der wagerechte Strich — mit 1000, $\overline{\text{I}}$ ist daher 1000, $\overline{\text{X}}$ ist 10000. Das unten offene Viereck, das über eine Zahl gesetzt wurde, vervielfachte mit 100000. $\overline{|\text{X}|}$ ist 1000000 und $\overline{|\text{VII}|}$ ist 700000. Beim Lesen großer Zahlen wurde das Wort tausend wiederholt, für unsere Million sagte man also tausend tausend. Nicht zu vermeidende Brüche wurden durch Worte ausgedrückt, so sagte man für $\frac{2}{7}$ duo septimae. Die römischen Brüche waren **duodezimale**, sie waren zwölftel Teile der römischen Einheitsmünze, des As; $\frac{1}{12}$ As war eine Unze, diese wurde weiter in zwölf Teile geteilt.

Die Schwerfälligkeit des Rechnens machte Hilfsmittel erforderlich. Natürliche Operationsmittel waren die Finger, künstliche (Rechenmaschinen) waren der Linienabakus und der Kolumnenabakus. — Der **Linienabakus** erinnert an den chinesischen Suan-pan. Ein Brett mit 8 gleichlaufenden Vertiefungen ist in $\frac{1}{3}$ der Höhe durch eine Querleiste in 2 Flächen geschieden. Auf der Querleiste stehen zwischen den Rinnen von rechts nach links die Zeichen θ (Unze), I, X, C, $\overline{\text{I}}$, $\overline{\text{X}}$, $\overline{\text{C}}$, $\overline{|\text{X}|}$. In den oberen kleinen Rinnen befindet sich je ein Knopf, in den unteren in der ersten Reihe 5 und in den übrigen je 4 Knöpfe. Die Knöpfe in den unteren Rinnen bedeuten je eine Einheit der Reihenbezeichnung, der oben stehende Knopf

bedeutet 5 Einheiten der betreffenden Reihe bei der Unze 6. Die an der Querleiste stehenden Knöpfe sind operativ.

(Schematische Darstellung des Linienabakus mit der Darstellung 217 As 3 Unzen.)

Im 10. Jahrhundert n. Chr. kam durch den Abt Gerbert (Papst Sylvester II.) an Stelle des Linienabakus der Kolumnenabakus allgemein zur Verwendung, der schon von Boethius um 500 n. Chr. benutzt und verbessert worden war. Boethius schreibt die Erfindung dieses Kolumnenabakus den Pythagoreern zu.



(Schematische Darstellung des Kolumnenabakus mit der Zahl 1851.)

Der Kolumnenabakus des Boethius zeigte senkrechte Kolumnen, die von rechts nach links aufsteigend für die Stellen der Zehnerordnung die bekannten römischen Zahlzeichen als Überschrift trugen. In die Kolumnen wurden Rechensteine mit besonderen Zahlzeichen oder mit Strichen nach Bedeutung der Zahlzeichen gesetzt, die die auf ihnen angegebenen Einheiten der betreffenden Kolumnen bezeichneten. Der Doppelwert der Ziffer tritt hier zum ersten Male deutlich hervor, und das Schreiben der Zahlen ist hierdurch vorgebildet.

Stoy faßt den durch den Kolumenabakus gegenüber dem Linienabakus erzielten Fortschritt in folgende drei Punkte zusammen:

1. „Vollständige Beseitigung der fünffachen Zwischenstufen;
2. hiermit zum ersten Male vollkommen reine Darstellung des Dezimalen Systems durch die Schrift, und endlich
3. die Einsicht in die Möglichkeit, mit neun Zahlzeichen sämtliche Zahlen darstellen zu können."

Wie nahe war man der heutigen Positionsschreibweise gekommen! Es fehlte nichts weiter, als einfachere Zahlzeichen und Beseitigung der Linien, und um letzteres zu können, das Zeichen für „Nichts".

Werfen wir zum Schluß noch einen Blick auf die Betreibung des Rechnens in den römischen Schulen. Schon zur Zeit des Numa Pompilius werden römische Elementarschulen erwähnt. Diese Schulen waren Privatschulen, und die Stellung der Lehrer läßt sich aus dem Wort Juvenals: „Wen die Götter hassen, den machen sie zum Schulmeister", entnehmen. Rechenbrett und Rechensteine gehörten zu den notwendigen Schulgerätschaften, und schon in der zweiten Hälfte des ersten Schuljahres wurde begonnen.

Dem kurze Zeit betriebenen Fingerrechnen folgte das Rechnen mit dem Abakus. Aus den Konfessionen des Augustin erfahren wir, daß die Rechenkunst in Reihen und durch Chorsprechen geübt wurde; denn er sagt, daß ihm das unum et unum duo, duo et duo quatuor ein verhaßter Gesang gewesen sei.

Während die Ägypter und Griechen vorwiegend die Form betonten, wendeten die Inder ihr Hauptinteresse der Zahl und den Operationen mit der Zahl zu. So finden wir bei den Indern um das 7. Jahrhundert unserer Zeitrechnung eine vollständig abgeschlossene Elementar-Arithmetik, die unserer heutigen sehr ähnlich ist. Die Inder gaben den Ziffern neben ihrem Zifferwerte noch einen Stellenwert; nun genügten 9 Zeichen für die Bezeichnung jeder Zahlengröße, und die Aufstellung eines zehnten Zeichens für das „Nichts", d. i. die Null, beendete den Entwicklungsgang. Über die Bedeutung der Null sagt Brockhaus: „Es liegt ihr der Gedanke zugrunde, dem Nichts einen Wert zu geben und durch das Nichtsein erst die Vollendung des Etwas zu bewirken." — Unsere Kenntnis von der Entwicklung der indischen Rechenkunst beruht auf zwei Schriften, dies sind Brahmeguptas, „wonnevolle Arithmetik und Algebra" und Bhaskaras „Lilavati", d. i. die Köstliche.

Beide Schriften verweisen auf den Arithmetiker Aryabhatta, der im 4. oder 5. Jahrhundert n. Chr. gelebt haben soll. Bhaskaras Lilavati führt das aus, was Brahmeguptas Arithmetik vielfach nur andeutet und faßt diese Ausführungen so zusammen, daß das Ganze ein wohlgeordnetes Lehrbuch für die wurde, welche diese Wissenschaft erlernen wollten. Ein kurzer Auszug kann das eigentümlich Anziehende dieses Buches nicht fühlbar machen. Hier nur einige Andeutungen. Bhaskara unterscheidet 1. Arithmetik und ebene Geometrie und 2. Algebra. In der Arithmetik vermittelt er die Kenntnis der benannten Zahlen, dann läßt er numerieren, und dann folgen 8 arithmetische Operationen, nämlich: Zu- und Abzählen, Vervielfachen und Teilen, das Aufsuchen der 2. und der 3. Potenz und das Ausziehen der Quadrat- und der Kubikwurzel, später folgt noch Bruchrechnung und die Lehre von der Null. Es werden Regeln über die schriftliche Ausführung gegeben. Besondere Lösungsformen sind die „Inversion" oder Umkehrung und die „Position" oder Einsetzung einer angenommenen Zahl (im Mittelalter Regula falsi genannt). Von der Inversion schreibt Bhaskara: „Willst du eine Zahl aus anderen gegebenen finden, so mache den Divisor zum Multiplikator, diesen zu einem Divisor, das Quadrat zur Wurzel, diese zum Quadrate, verwandle negativ in positiv und positiv in negativ." Die Sprache ist blumenreich; oft erinnern die Aufgaben an die zusammengesetzten Aufgaben Pestalozzis, z. B.: „$\frac{1}{3}$ von $\frac{3}{4}$ von $\frac{2}{3}$ der Hälfte eines Dramma wurde von jemand einem Bettler gegeben. Sage mir, teure Lilavati, wenn du in der Subdivision der Brüche bewandert bist, wieviel der Geizhals gab!"

Wir sehen aus den angeführten Büchern, daß die Inder eine vollständig entwickelte Elementar-Arithmetik hatten, die, abgesehen von den Dezimalzahlen, nahezu zu dem Umfange des heutigen Schulrechnens ausgebildet war. Die Ansatzformen sind meistens andere als bei uns, häufig

aber erinnern sie uns an jetzt noch gebräuchliche oder an früher benutzte Formen. Anders war ihr Additionsansatz. Sie schrieben bei der Addition erst die Einer, dann die Zehner, dann die Hunderter usw. in gesonderter Reihe nebeneinander, z. B.: „Teuere, verständige Lilavati, sage mir, wenn du im Addieren geschickt bist, die Summe von 2, 5, 32, 193, 18, 10 und 100!“

Ansatz und Berechnung:

Summe der Einer:	2, 5, 2, 3, 8, 0, 0 .	20
„ „ Zehner:	3, 9, 1, 1, 0 . . .	14
„ „ Hunderter:	1, 0, 0, 1	2
		360

Weicht diese Form von der jetzt gebräuchlichen Form ab, so erinnert die Lösung einer einfachen Regelbetriaufgabe an den sogenannten reesischen Ansatz. Die Aufgabe: Das Interesse von 100 auf 3 Monat ist 10; man suche das Interesse von 60 auf 5 Monate!

Der Ansatz Bhaskaras ist folgender:

100	60
3	5
	10

und im reesischen Ansatz würde es heißen:

ℳ ?	60 ℳ
ℳ 100	5 Monat
Monat 3	10 ℳ

Die von den Indern gebrauchten Ziffern waren die Anfangsbuchstaben der betreffenden Zahlwörter, in ihnen haben wir die ersten Anfänge unserer jetzigen Ziffern zu suchen.

Zahlreiche Aufgaben der Inder haben sich bis auf den heutigen Tag in unseren Rechenbüchern erhalten, so die Aufgabe, die berechnet, mit wieviel Sprüngen ein Hund einen Hasen, der voraus ist, einholen wird; ferner die sog. Brunnen- und Röhrenaufgaben, die Aufgabe von den Weizenkörnern, die auf 64 Felder des Schachbrettes gelegt worden sind u. a.

Den schönsten Zweig der indischen Mathematik bilden die unbestimmten Gleichungen, deren Auflösung in ganze Zahlen durch einfache Regeln vollständig gegeben ist. Später ging die Lösungsform verloren und wurde erst im 17. Jahrhundert in Europa neu erfunden.

Wenn wir den Grad der Ausbildung der indischen Arithmetik im 7. Jahrhundert unserer Zeitrechnung mit dem jetzigen Zustand derselben vergleichen, so ist es erklärlich, daß der weitere Fortschritt derselben nur ein geringer sein konnte.

Zu der Zeit, als die die Kunst und Wissenschaft liebenden Kalifen Künstler und Gelehrte aus allen Ländern um sich sammelten, wurden die arabischen Völker auf der einen Seite mit der indischen Arithmetik, auf der andern Seite mit der griechischen Geometrie bekannt. Beide Wissenschaften wurden von den Arabern (schon der Astrologie wegen) ganz besonders gepflegt; doch liegt die mathematische Bedeutung der Araber

weniger in der Fortentwicklung dieser Wissenschaften, als vielmehr in der Verbindung beider und in der Erhaltung und besonders in der Verbreitung derselben. Neu bei ihnen ist das Auftreten der Neunerprobe.

Der bedeutendste der arabischen Mathematiker ist Muhammed ibn Musa, gewöhnlich Muhammed ben Musa genannt. Er lebte ums Jahr 800 n. Chr. in Bagdad. Seine beiden Lehrbücher, von denen das eine die Arithmetik und das andere die Algebra behandelte, beherrschten mehrere Jahrhunderte hindurch die Entwicklung der Mathematik. Auf ihn ist auch der Name Algorithmus oder Algorismus zurückzuführen. Man bezeichnet damit zunächst die indisch-arabische Positionsarithmetik, später aber jeden andern Rechenmechanismus.

Als die Araber Spanien erobert hatten, gründeten sie dort zahlreiche Schulen, allein siebzehn Hochschulen, denen auch aus anderen Ländern viele wissensdurstige Hörer zustrebten. An dieser Stelle muß besonders hervorgehoben werden, daß diese für die Wissenschaft begeisterten Jünger als wesentlichen Bestandteil der arabischen Gelehrsamkeit die indisch-arabische Positionsarithmethik mit zurückbrachten. Somit wirkten auf die Rechenkunst im Abendland 2 Faktoren ein, der Algorithmus der Araber und der Abacismus der Römer. Aber schon im 12. Jahrhundert fingen einzelne hervorragende Abacisten an, zu der indisch-arabischen Positionsarithmetik überzugehen.

3. Das Rechnen in den Klosterschulen und in den städtischen Schreibschulen.

Die Nachrichten über unser deutsches Vaterland fließen in der vorchristlichen Zeit fast nur aus römischen Quellen. Wenig ist es, was wir aus der ältesten und alten Zeit wissen, aber aus den dürftigen Nachrichten geht doch hervor, daß die Altgermanen die Zehnerordnung kannten (Hundertschaft) und Zahlwörter bis zu 1000 hatten, daß sie ferner in den einfachsten Operationen des Zu- und Abzählens, sowie des Vervielfachens und Teilens bewandert waren und nach einer ausgebildeten Zeitrechnung Termine bestimmten.

Mit dem politischen Einfluß der Römer auf die Germanen geht Hand in Hand der Einfluß, den die Römer in der Ausbildung der Wissenschaften auf die Germanen ausübten. Auch das Rechnen der Germanen wurde römisch; römische Zahlzeichen, römisches Fingerrechnen, römische Rechenmaschinen fanden Eingang und wurden gebraucht.

Sitz der Bildung waren nach Einführung des Christentums die Klöster. In den Schulen der Klöster wurde die Bildung fortgepflanzt. Die Arithmetik gehörte dem Quadrivium an, doch sei hier gleich angegeben, daß die arithmetischen Leistungen dieser Zeit sehr geringe waren.

Von den Männern, welche das damalige Rechnen gefördert haben, nennen wir zuerst Alcuin, den weisen Ratgeber Karls d. Gr. Alcuin war der eigentliche Gründer der Palastschulen; er sorgte für tüchtige Lehrer, und in seinen Schulordnungen berücksichtigte er auch das Rechnen. Alcuin wird eine Sammlung von arithmetischen Aufgaben mit Auflösungen zugeschrieben. Viele Aufgaben haben Ähnlichkeit mit denen der Inder, auch die Lösungsform der Inder, die Inversion wird angewendet, Scherz- und Rätselaufgaben fehlen nicht. Auch die noch jetzt fast in jeder Aufgaben-

sammlung vorkommenden algebraischen Aufgaben, wie die Röhrenaufgabe oder die Aufgabe von dem den Hasen verfolgenden Hunde, finden sich in diesem Rechenbuche. — Von einem Zeitgenossen Alkuins, dem bekannten Erzbischof von Mainz, Hrabanus Maurus, ist ein Lehrbuch der Arithmetik in 96 Kapiteln vorhanden, in dem der griechische Einfluß unverkennbar hervortritt.

Die Rechenkunst wurde damals meistens in den Dienst der kirchlichen Zeitrechnung (Berechnung des Osterfestes) gestellt, und diese Kenntnis des **Komputus** oder der kirchlichen Zeitberechnung war durch das ganze Mittelalter hindurch ein wesentlicher Bestandteil des Unterrichts für den künftigen Kleriker. Man nennt diese Zeit die Periode der **Komputisten**.

Dieser komputistischen Richtung standen die Abacisten gegenüber. Als der hervorragendste derselben sei der schon erwähnte Abt **Gerbert**, der nachmalige Papst Sylvester II., genannt († 1003). Er verbesserte den Kolumnenabakus dadurch, daß er ihm 27 Felder gab und daß er mit 9 Zeichen alle möglichen Zahlen ausdrückte. Auch 1000 Hornfiguren ließ er fertigen, mit denen er auf den verschiedenen Feldern operierte. Das Rechnen ist meistens nur ein Rechnen der Wissenschaft, da dem Volke das in den Klosterschulen gelehrte Abakusrechnen nicht zugänglich war.

Eine weitere Verbreitung fand das Rechnen vom 12. Jahrhundert ab durch die Gründung von deutschen Schreibschulen in den Städten, da es in diesen in deutscher Sprache auch den zukünftigen Bürgern gelehrt wurde. Die Lübecker „dudesche scrivescole“ wird schon 1161 erwähnt, und zu Anfang des 14. Jahrhunderts hatte Lübeck vier Schreib- und Rechenschulen. In Hamburg wurde 1187, in Breslau 1267, in Leipzig [illegible] eine Stadtschule errichtet. Schreiben, Lesen und Rechnen in deutscher Sprache waren die Unterrichtsfächer in diesen Schulen, ja die Geistlichkeit wachte strenge darüber, daß außer diesen Unterrichtsgegenständen nichts anderes gelehrt wurde. Die Schulen waren durch den sich mehr und mehr ausbreitenden Handel ein Bedürfnis geworden. Man rechnete schon nach Prozenten, man kannte Wechsel (1325) und Staatsanleihen (Venedig 1171) und suchte der Verwirrung in den mannigfachen Geld-, Maß- und Gewichtsverhältnissen durch bequeme Rechnungsausführungen zu begegnen.

Anders war es damals auf dem Lande. Fand sich wirklich ein Pfarrer oder ein des Lesens kundiger Küster, der gegen Entgelt eine Schule einrichtete, so fehlte in den meisten Fällen in der kleinen Reihe der Unterrichtsfächer das Rechnen. Der Landbewohner rechnete in einfachster Weise im Kopfe, als Fixierung mancher Rechenresultate diente ihm das **Kerbholz**. Wollte z. B. jemand bei einem Kaufmanne Waren auf Borg nehmen, so wurde der Betrag durch Einschnitte auf dem Kerbholz verzeichnet und dieses der Länge nach gespalten. Den einen der [illegible] Teile erhielt der Gläubiger, den andern der Schuldner. Da die [illegible] zusammenpassen mußten, waren beide Kontrahenten bei der [illegible] vor Übervorteilung geschützt. Nach einem Statut der Bruder[illegible] der [illegible] wurde diese primitive Art der Buchführung noch [illegible] 15. [illegible]hundert in Frankfurt a. M. geübt.

[illegible] Zeit verbreitete sich in Deutschland neben der indisch-

arabischen Rechenmethode auch die Kenntnis der sogenannten arabischen Ziffern; der Algorithmus verdrängte allmählich den Abacismus. Es beginnt nun eine neue Zeit in der Geschichte der Mathematik; denn die arabische Rechenkunst mit ihrer einfachen Bezifferungsweise ermöglichte nach oben eine Neugestaltung und einen weiteren Ausbau der Mathematik und der mit ihr zusammenhängenden Wissenschaften, nach unten aber die Einführung leichter Berechnungsweisen im Volksleben.

Diese Wandlung vollzog sich selbstverständlich (vergleiche Seite 12 und 13) nicht auf einmal, sondern allmählich und langsam; denn das Geschlecht, welches die alten Rechnungsweisen ererbt hatte, fand sich schwer in die neuen.

Das Haupthindernis der endgültigen Einführung des Positionsrechnens lag daran, daß alle die Rechenlehrer ihr Hauptlehrmittel, das deutsche Rechenbrett, auch Rechenbank genannt, nicht aufgeben wollten. Dies Rechenbrett gestattete nur ein Rechnen nach der Weise der Abacisten. Man nannte das Verfahren „Rechnen auf Linien". Mit Hilfe von Rechenkörpern (Marken) und eines Linienschemas wurden Zahlen dargestellt und Rechenarbeiten ausgeführt (siehe Adam Ries). Somit tritt der Kampf gegen den Abacismus im 15. und 16. Jahrhundert als ein Kampf gegen das Rechenbrett und gegen das Rechnen auf den Linien auf.

Wie schwer das Neue sich einbürgerte, kann man auch daraus ersehen, daß die römischen Zahlzeichen sich als Jahresbezeichnungen bei kirchlichen und anderen monumentalen Bauten bis auf die Jetztzeit erhalten haben.

Die sogenannten Ziffern sind, wie schon erwähnt wurde, wahrscheinlich indischen Ursprungs; sie entstanden dort aus den Anfangsbuchstaben der Zahlwörter. Durch die Jahrhunderte hindurch wurden besonders von den Arabern einzelne Formen geändert. Auch in Deutschland haben die Ziffern, wie auch die Schriftzeichen, im Laufe der Zeit manche Veränderung erfahren. Unrichtig und sehr gekünstelt erscheint es, wenn die Entstehung der Ziffern auf die Teile eines Quadrats oder auf Strichfiguren zurückgeführt wird.

Man kannte und übte damals 9 Rechnungsarten, nämlich: Numerieren, Addieren, Subtrahieren, Duplieren, Medieren, Multiplizieren, Dividieren, Progressionen und Wurzelausziehen. Bei dem Numerieren fehlten noch die Begriffe Million, Billion usw., die durch 1000 mal 1000 usw. ersetzt wurden.

4. Die ältesten gedruckten deutschen Rechenbücher.

Durch die Erfindung der Buchdruckerkunst wurde auch das Rechnen neu angeregt; dies zeigt sich in den zahlreichen Rechenbüchern, die von Männern der Wissenschaft und von Schreib- und Rechenmeistern herausgegeben wurden. Die ersteren schrieben meist lateinisch und konnten deshalb nur in den wissenschaftlich gebildeten Kreisen die arithmetischen Kenntnisse vermehren. Doch wurden diese Schriften auch ins Deutsche übertragen und von den städtischen Rechenmeistern benutzt. Bald auch erschienen deutschgeschriebene Rechenbücher. — Jänicke nimmt in Kehrs

Geschichte der Methodik im Jahre 1877 an, daß das älteste (gedruckte) deutsche Rechenbuch aus dem Jahre 1489 stammt. Sein Titel lautet:

„Die behende und hübsche Rechnung auff alle Kauffmannschafft. Gedruckt in der fürstlichen Stath Leipczik durch Konrad Kachelofen. Verfaßt von Johannes Widmann aus Eger."

Sterner nennt 1891 als das erste gedruckte deutsche Rechenbuch das Rechenbuch Petzensteiners in Bamberg 1483 (noch vorhanden in der Ratsschulbibliothek in Zwickau), und Hartmann beschreibt jetzt Reste eines deutschen Rechenbuches von Ulrich Wagner in Bamberg vom Jahre 1482.

Bis auf weiteres müssen wir das zuletzt genannte als das älteste deutsche gedruckte Rechenbuch annehmen. Es muß dies Erscheinen des ersten gedruckten deutschen Rechenbuches in der Geschichte des Rechenunterrichts als ein hochwichtiges Ereignis gelten, denn nun erst kann man von einer Geschichte des deutschen Rechnens sprechen.

Es ist nicht unwesentlich, den Inhalt eines der ältesten deutschen Rechenbücher aus dem 15. Jahrhundert kennen zu lernen. Wählen wir das von Jänicke erwähnte Buch von Johannes Widmann. Sterner schreibt hiervon: „Widmann verfaßte sein Rechenbuch nach arabischen Mustern unter Benutzung der Schriften des Sacro Bosco, Euklid, Boëthius und Jordanus, wie er selbst angibt. Der erste Teil handelt: vō kunst vn art der zal an yr selbst, d. h. vom Rechnen mit absoluten Zahlen; der zweite: vō der ordnung der zal, d. h. von den Verhältnissen und Proportionen und der praktischen Anwendung derselben; der dritte: vō der art des messen genāt / geometria. — Widmann beschreibt 7 Spezies, die gebräuchlichen vier und das Numerieren, Duplieren und Medieren; er behandelt die Bruchrechnung, die Tolletrechnung, die „guldin regel" mit der Mischungs-, Stich- und Münzrechnung. Den Schluß bildet die regula falsi und cosse. Auch als Mathematiker verdient Widmann in Ehren gehalten zu werden; denn ihm dankt man es, daß Herons Vorschrift, den Flächeninhalt F eines Dreiecks durch die 3 Seiten a b c auszudrücken, d. h. die Formel:

$$F = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}$$

wieder als Bestandteil des elementaren planimetrischen Lehrstoffes auftritt.

Widmann verwirft das „Rechnen auf Linien" und lehrt, wie auch vor ihm Petzensteiner, nur das Positionsrechnen mit indisch-arabischen Ziffern. Seine Stoffanordnung war lange Zeit vorbildlich.

Aus dem Anfang des 16. Jahrhunderts sind uns die Bücher von Jacob Kobel, Johann Böschensteyn und Heinrich Grammateus bekannt.

Jacob Kobel war Stadtschreiber in Oppenheim, sein Rechenbuch erschien 1514. Er stand wieder vollständig auf dem Standpunkt des Linienrechnens und benutzte nur die römischen Ziffern. Ein zweites, dem ersten widersprechendes Buch gab derselbe Verfasser im Jahre 1520 heraus. Der Anfang seines Titels lautete: „Mit der kryde od Schreibfedern durch die zeiferzal zu reche."

Böschensteyn gab gleichzeitig mit Kobels Linienrechnen heraus: „Ain New geordnet Rech/ enbiechlin mit den zyffern den angenden schulern zu nutz In haltet die Siben spezies Algorithmi mit sampt der Regel de Try vnd sechs regeln & prüch/ vñ der regel Fusti mit vil andern guten fragen den kindern zum anfang nutzbarlich durch Johann Böschensteyn von Eſslingen priester neulych auſsgangen vnd geordnet.“

Böschensteyn gibt das Positionssystem, Definitionen und genaue Anleitung zur Ausführung der einzelnen Rechnungsarten, letztere oft in Reimen. So gibt er z. B. folgende Definition: „Multiplicacio haist Merung. Manigfaltigung. auff steygung. Vil machung. Multiplicirung. Vnd ist nychts anders dann ain yede zal· wie groſs die ist mit ainer andern mern/ groſs machen/ vnnd braucht die red/ So vil mal so vil.“

Als Anleitung zum Ansatz der Regelbetri sagt er: „Das erst ist der kauff . . . vnd sol vornen stan. Das ander ist das gelt . . . sol miten stan. Das drit stuck ist die frag . . . vnd das sol hinden steen/.“

In folgenden Reimen gibt er die Anleitung zur Probe der Regelbetri:

„Regel de Try also probir/
Dem exempel ker das hinder herfür/
Was du mit der ersten regel hast funden/
Das setz yn die mit zůstunden/
Das mittl mit dem hindern multiplicyr/
Yeder müntz ir aygen feld formir/
Vnd mit dem fordern diuidir/
Kompt dan wider des ersten kauffs gelt/
So hat dir die erst regel nit gefelt.“

Heinrich Grammateus (Heinrich Schreiber aus Erfurt) ließ 1518 in Wien ein Rechenbuch erscheinen, das manchen Fortschritt zeigt, so z. B. nur 4 Spezies unterscheidet.

5. Adam Ries.*)

Der Rechenmeister des ausgehenden Mittelalters ist der volkstümlich gewordene **Adam Ries**.

Adam Ries oder Riese, wie man gewöhnlich schreibt, während früher auch Rise, Ryse, Rieße usw. geschrieben wurde, ist nach den bisherigen Annahmen 1492 in Staffelstein geboren. 1509 wird er zuerst in Zwickau in Sachsen erwähnt; 1522 war er Rechenmeister zu Erfurt; 1525 ist er Bergbeamter in Annaberg, wo er nebenbei eine Privatschule hält, in der er seine Rechenkunst lehrt.

Die Richtigkeit einer Lösung wird noch heute im Volksmunde mit der Bemerkung: „Nach **Adam Riese**“, festgelegt. Trotz dieser Volkstümlichkeit aber wissen wenige Leute, wer Adam Ries war und welche Verdienste er gehabt hat. Viele schreiben ihm die Erfindung der indisch-arabischen Ziffern zu, andere halten ihn für den Erfinder des Positions-

*) Hartmann schreibt Ries, weil diese Schreibweise in den letzten Schriften von R. am häufigsten vorkommt.

gesetzes, einige haben ihn den größten Mathematiker und nur wenige ihn den größten Rechenmethodiker des 16. und 17. Jahrhunderts genannt.

Hartmann sagt von Ries: „Eine allseitige Würdigung der Verdienste, welche A. Ries zukommen, zeigt zunächst, daß derselbe das Rechnen in keinem Stück sachlich weiter gebildet hat. Was er in seinen Schriften behandelt hat, das haben vor ihm schon andere behandelt. Weiter aber ergibt sich, daß A. Ries der bedeutendste deutsche Rechenmethodiker des 16. und 17. Jahrhunderts ist. Das zeigt sich schon in der Auswahl und Anordnung des Rechenstoffes. Mehr noch in der strengen Befolgung einer Reihe didaktischer Grundsätze, welche noch heute gelten, und in dem weisen Maßhalten bei Bestimmung der einzelnen Stoffmengen. Ganz besonders aber in dem bewußten Streben, seinen Unterricht so zu gestalten, daß ‚froher Fleiß‘ eine Frucht desselben werde.“

Ries selbst nennt seine Schriften bescheiden die Arbeit eines Sammlers; sie sind also unstreitig am besten geeignet, den damaligen Stand des Rechnens kennen zu lernen. Eine eingehende Würdigung der Arbeiten wird uns dahin führen, daß diese Arbeiten, wie oben angeführt ist, einen noch höheren, nämlich einen methodischen Wert haben. Es sind neben einigen Handschriften besonders vier gedruckte Rechenwerke, die Adam Ries hinterlassen hat.

Das erste dieser Rechenbücher führt den Titel: „Rechnung auff der linihen/ gemacht durch Adam Riesen vonn Staffelsteyn/ in massen man es pflegt tzu lern in allen/ redhen. schulen gruntlich begriffen anno 1518. vleysighlich oberlesen vnd zum andern mall/ in truck vorfertigt. . . Getruckt zu Erffordt zcum Schartzen Horn /1525/.

Das Buch hat A. Ries, wie aus dem Titel hervorgeht, schon 1518 zum ersten Male herausgegeben. Von dieser ersten Auflage ist bis jetzt noch kein Exemplar aufgefunden worden. 1525 erschien die 2. Auflage. A. Ries hat hier nach der Sitte der damaligen Zeit zunächst eine Anleitung zum Linienrechnen geschrieben, doch ist ein Fortschritt gegenüber dem oben erwähnten Linienrechnen von Kobel darin zu erkennen, daß Ries nicht die römischen, sondern die indisch-arabischen Ziffern gebrauchte und auch die Positionsschreibweise einführte. Bemerkenswert sind die ausführlichen Anweisungen zum Numerieren. Er schreibt:

Numerirn. Heifst zehlen/ Lehret wie man jegliche zahl schreiben vnd aufssprechen soll/ darzu gehören zehen figuren/ also beschrieben/ 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 0. Die ersten neun seind bedeutlich/ Die zehend gilt allein nichts/ sondern so sie andern fürgesetzt wirdt/ macht sie dieselben mehr bedeuten. Vnd solt wissen/ dafs ein jegliche erste vnd ander mit einander/ wie hie folgt:

$$8\;\dot{6}\;7\;8\;\dot{9}\;3\;2\;\dot{5}\;1\;7\;8$$

Ist sechfs vnd achtzig tausent tausent mal tausent/ siben hundert tausentmal tausent/ neun vnd achtzig tausent mal tausent/ drey hundert tausent/ fünff vnd zwentzig tausent/ ein hundert acht vnd sibentzig.

Kompt dir deñ ein zahl zu schreiben/ so schreib das meist zum ersten/ wirdt aber aufsgelassen das tausent/ hundert/ zehen oder eins/

so setz an dieselbig statt ein 0/ wie hie zu schreiben/ fünff vnd zwentzig tausend/ vnnd siben vnd dreyssig/ setz 25037, Also wirdt für das (fehlende) hundert ein 0 geschrieben.

Nach dem „Numerieren“ folgt die Beschreibung des Rechenbrettes und die Anweisung für das Linienrechnen.

Die Rechenbank war gewöhnlich ein wirkliches Rechenbrett mit einem Liniensystem, letzteres konnte aber auch in eine Tischplatte eingegraben oder zum augenblicklichen Gebrauch auf dieselbe aufgezeichnet sein. Die Linien waren horizontal zu dem Rechnenden gezogen, so daß die Kolumnen nicht nebeneinander, sondern übereinander lagen. Auf die Linien oder in die Zwischenräume wurden Rechenpfennige gelegt. Ein Rechenpfennig auf einer Linie galt eine Einheit der betreffenden Größe, zwischen den Linien galt er das Fünffache der Einheiten der unteren Linie.

Bei der Addition wurden die Summanden nebeneinander aufgelegt, ergab die Vereinigung 5 Rechenpfennige auf einer Linie, so wurde dafür 1 Rechenpfennig in den darüber befindlichen Zwischenraum gelegt, 2 Rechenpfennige in einem Zwischenraum wurden gegen einen Rechenpfennig auf der darüber befindlichen Linie vertauscht. — Bei mehrfach benannten Zahlen wurde die Rechenbank durch Vertikallinien in so viele Abschnitte geteilt, als zum Legen der Sorten notwendig waren. Die Felder hießen: „erst, ander und dritt bankir“. Man begann mit den niedrigsten Sorten.

Bei der Subtraktion wurde gewöhnlich nur der Minuend aufgelegt, der Subtrahend wurde im Sinne behalten oder angeschrieben. Man fing hier mit den höchsten Sorten an. Konnte der Subtrahend von dem Minuend nicht abgezogen werden, so verwandelte man entweder einen Fünfer in fünf niedere Einheiten oder, falls ein Fünfer nicht vorhanden war, eine Einheit der nächsten Sorte in einen Fünfer und fünf Einheiten.

Das Duplieren und Medieren (mit 2 vervielfachen und durch 2 teilen) war leicht auszuführen, da die Anzahl der Einheiten nacheinander leicht mit 2 vervielfacht oder durch 2 geteilt werden konnte und das Ergebnis nebenan aufgelegt wurde; schwieriger aber war das Multiplizieren und das Dividieren bei größeren Zahlen, besonders mit mehrstelliger Operationszahl. Multiplikandus und Dividend wurden aufgelegt, die operativen Zahlen wurden gemerkt oder hingeschrieben. Wurde der Finger auf eine Linie gesetzt, so wurde den daraufstehenden Einheiten ihr sonstiger Wert genommen, sie galten je 1, die in dem Zwischenraum darüberstehende Größe galt 5, das Aufheben des Fingers gab den Größen ihren ursprünglichen Wert wieder. Die Beschreibung der Operation ist aber so umständlich, daß man besser tut, man versucht sofort die Ausführung. Die Operationen begannen bei den höchsten Einheiten, zu ihrer Ausführung wurde die Kenntnis des Einmaleins verlangt.

Das Linienrechnen sollte nur für ganze Zahlen sein. Es gab die Veranschaulichung der Größen und muß als eine gute Unterstützung des einfachsten Kopfrechnens angesehen werden. Das Andenken der Rechenbank hat sich bis jetzt in den Wörtern Bankhaus, Bankier, Banknote, Bankrott erhalten.

Der Inhalt dieses ersten Buches ist folgender: „Numerirn. Von

der linihen. Addirn. Subtrahirn. Duplirn. Medirn. Multiplicirn. Dividirn. Progressio. Detri. Von gebrochen. Wechsell. Gewandt. Sylber vnd golt rechnung. gesellschafft. Stich. Resoluirung."

Vier Jahr nach der Herausgabe des ersten Buches gab Adam Ries sein zweites Rechenbuch, das gewöhnlich das „kleine Rechenbuch" oder das „Oktavbuch" genannt wird, heraus; es führt den Titel:

„Rechenung auff der linihen vnd federn in zal mafs vnd gewicht auff allerley handierung gemacht vnd zusammengelesen durch Adam Riesen von Staffelstein. Rechenmeister zu Erffurdt im 1522. Jar. Itzt vff sant Annabergk durch in fleissig vbersehen vnd alle gebrechen eygentlich gerechtfertiget vnd zum letzten eine hübsche vnderrichtung angehengt."

Dieses 2. Buch begründete den Ruhm seines Verfassers, es hat viele Auflagen erlebt und ist mehrfach von andern nachgedruckt und erweitert worden. — Das Linienrechnen ist hier ganz kurz erledigt, und der Hauptteil des Buches ist der „Rechnung auff der federn" vorbehalten worden. Dieses Rechnen „auff der federn", d. h. das schriftliche Rechnen, ist der Gegensatz zu dem Linienrechnen. Die Darstellungsformen sind die in der damaligen Zeit gebräuchlichen und mit Ausnahme der Divisionsform die noch heute üblichen Formen. Numerieren wurde in der oben angeführten Weise gelehrt. Das italienische Wort „Million" war noch nicht bekannt, man behielt also die schwierige und unübersichtliche Ausdrucksweise der fortwährenden Wiederholung des Wortes „Tausend" bei.

Addieren und Subtrahieren haben die heutige Form. Ries kennt z. B. schon den praktischen Weg, bei dem Abziehen und bei dem Verwandeln der höheren Einheit in 10 niedere Einheiten den Subtrahendus zuerst von den 10 Einheiten abziehen und dann die vorhandenen Einheiten hinzuzählen zu lassen.

Um die Art der Ries'schen Unterweisung kennen zu lernen, sei hier seine Anleitung zum Addieren gegeben.

„Addirn. Lehret viel zahlen in eine Summe zu bringen/ Thu jhm also: Setz dieselben zahlen vnder einander/ die erste vnder die erste/ die ander vnder die ander/ vnd also hinfurt. Darnach hebe zuförderst an/ gegen der rechten Handt/ summir zusammen die ersten Figuren/ kompt ein zahl/ die du mit einer Figur schreiben magst/ so setz sie gleich darvnder/ die ander behalt/ Darnach summir zusamen/ die andern Figuren/ gib darzu das du behalten hast/ vnnd schreib abermals die erste Figur/ wo zwo vorhanden. Vnd thue desgleichen hinfurt mit allen figuren/ bifs auff die letzsten/ die schreib gantz aufs/ so hastu wie viel in einer Summe kompt/ als folgende Exempel aufsweifsen:

$$\begin{array}{r} 78312 \\ \underline{87547} \\ 165859 \end{array}$$ usw.

Proba. Nun soltu wissen/ dafs ich hierinn zweyerley Proben gebrauchen wil/ ist die erste/ dafs ein Species die ander probirt/ Die

ander ist mit 9 also: wirff (von der Summe) 9 hinweg als offt du magst/ was dann vnder 9 bleibet/ behalt für dein Prob. Nimb 9 hinweg von den obern (den Summanden)/ Sodann auch so viel kompt/ so hastu ihm recht gethan."

Wir sehen, zuerst kommt die Begriffsbestimmung, dann wird mit der Einleitung, „Thu ihm also", die Operation beschrieben, endlich kommt die Probe entweder durch die Anwendung der entgegengesetzten Rechnungsart oder durch die Neunerprobe, und die Richtigkeit der Rechnung wird bestätigt durch: „so hastu ihm recht gethan".

Die Grundlage des Multiplizierens ist auch hier das Einmaleins, bei dem man einen Unterschied der Faktoren nicht kennt. Weil z. B. $9 \times 4 = 36$ ist, wird 4×9 nicht mehr erwähnt. Sonst ist das Multiplizieren der damaligen Zeit unserm heutigen Multiplizieren ähnlich, nur etwas umständlicher.

Anders aber ist es bei dem Dividieren. Man dividierte über sich. (Turmmethode.) Eine vollständige Berechnung der Aufgabe 221794 : 86 hatte in der damaligen Zeit folgende Form:

1
6 7
4 9 1 5
6 9 7 7
2 2 1 7 9 4 (2579.
8 6 6 6 6
8 8 8

Versuchen wir die Erklärung!

Der Divisor wird so unter den Dividendus geschrieben, daß seine letzte Stelle unter der letzten Stelle des bei der Teilaufgabe heranzuziehenden Dividendus abschneidet. Wir sehen also

1) 2 2 1 7 9 4
8 6

Der Quotient ist 2; diese 2 wird hinter den Dividendus gestellt. Nun werden zuerst die großen Einheiten, dann die kleinen mit 2 multipliziert, jedes Resultat wird abgezogen, und die gebrauchten Stellen werden durchgestrichen.

Wir werden rechnen: Zweimal 8 ist 16, von 22 abgezogen gibt 6; diese 6 wird über die 22 und zwar über die Einer von 22 geschrieben und mit 1 zu 61 zusammengefaßt. 2×6 ist 12, von 61 abgezogen gibt 49; diese 49 kommt über 61. Der Divisor wird von neuem darunter gestellt und eine Stelle nach rechts gerückt, so daß die neue 8 unter die vorige 6, die 6 aber neben die erste 6 kommt. Unsere Lösung zeigt jetzt folgendes Bild:

4
6 9
2 2 1 7 9 4 (2
8 6 6
8

Die durch 86 zu teilende Größe heißt jetzt 497, der Quotient ist 5; 5×8 ist 40, von 49 ist 9; 5×6 ist 30, von 97 ist 67. Die Veränderung des Divisors ist wie vorhin angegeben. Wir sehen jetzt:

```
     6
    4 9
    6 9 7
  2 2 1 7 9 4   (25
    8 6 6 6
      8 8
```

Jetzt soll 679 durch 86 geteilt werden = 7. 7×8 ist 56, von 67 ist 11; 7×6 ist 42, von 119 ist 77. Unsere Lösungsform zeigt jetzt folgendes Bild:

```
      1
      6 7
    4 9 1
    6 9 7 7
  2 2 1 7 9 4   (257
    8 6 6 6 6
      8 8 8
```

Der Rest 774 : 86 ist 9; 9×8 ist 72, von 77 ist 5, und 9×6 ist 54. Wir vervollständigen also die vorige Form und erhalten:

```
      1
      6 7
    4 9 1 5
    6 9 7 7
  2 2 1 7 9 4   (2579
    8 6 6 6 6
      8 8 8
```

Es wird uns nicht leicht, die kunstfertigen Formen der alten Rechenmeister zu verstehen, und wir finden es begreiflich, daß damals die Fertigkeit im Dividiern als eine hervorragende Rechenleistung angestaunt wurde.

Adam Ries selbst geht schnell über die Progressionen hinweg; andere Rechenmeister der damaligen Zeit geben kurz das Verfahren, wie die Summe einer arithmetischen Progression gefunden wird.

Die Regelbetriaufgaben werden in mechanisch äußerlicher Weise nach dem Proportionssatz gelöst. Die der Lösung zugrunde liegende Regel von dem Produkt der äußeren und innern Gliedern hieß damals: „Wo 4 Zahlen proportional zalen sein | so bringt die erst in die vierdt multiplicirt souil als die ander in die dritt." Man nannte sie die güldene Regel, d. i. Regula aurea oder Regula mercatorum (Kaufmannsregel). Auch die Regula de tri conversa oder die umgekehrte Regelbetri war bekannt.

Mit Brüchen mochte man nicht viel zu tun haben, und das wenige wurde besonders in der Multiplikation und Division in mechanischer Weise mit „Tu ihm also" abgemacht.

Die Formen d[illegible]at- und Kubikwurzel-Ausziehens

waren zu dieser Zeit fast dieselben wie heute, sind es doch unbeugsame Grundsätze, auf denen beides beruht.

Die bürgerlichen Rechnungsarten waren nicht nach den Rechenverhältnissen, sondern nach den Sachverhältnissen gegliedert; man kannte: Wechselrechnung, vom Wucher, von Gesellschaften und Teilungen, vom Stich (Tausch), Regula falsi, Regula Cecis (Zechrechnung) u. a. m. Einige der Aufgabenformen finden wir in den heutigen Rechenbüchern unter der Überschrift „Algebraische Aufgaben". So z. B. die zur Regula falsi führende Aufgabe: „Item | einer spricht: Gott grüß euch Gesellen alle dreyßig. Antwort einer | wenn unser noch so viel und halb so viel weren | so weren unser dreyßig", oder die zur Regula Cecis gehörige Aufgabe: „Item 20 Personen | Männer | Frauwen und Jungfrauwen haben vertrunken 20 ₰ ein Man gibt 3 ₰ ein Frauw 2 ₰ und eine Jungfrauw 1 hlr. wie viel seynd jeder Person gewesen?" — Diese letzte diophantische Gleichung löst Ad. Ries auf arithmetischem Wege; für das Volksrechnen ist sie zu künstlich, doch suchten sich die Rechenbuchschreiber damaliger Zeit in solchen künstlichen Aufgaben zu überbieten.

Das 3. gedruckte Rechenbuch von A. Ries ist ein Rechenknecht oder nach damaliger Bezeichnung ein Faulenzer. Es stammt aus dem Jahre 1536 und führt den Titel: „Ein gerechent Büchlein auff den Schöffel, Eimer vnd Pfundtgewicht zu ehren einem Erbarn Weisen Rathe auff Sanct Annenbergk".

Die gebotenen Tabellen beziehen sich auf das Verhältnis des Brotpreises zum Kornpreise und bilden die Grundlage für die in Annaberg, Naumburg u. a. Städten damals eingeführten Brotordnungen.

Zu bemerken ist, daß auch damit A. Ries nichts Neues brachte. Der älteste bisher bekannte Faulenzer, „Ein nutzlich Rechenbuchlein", erschien in Nürnberg schon 10 Jahr früher.

Erst im Jahre 1550 ließ A. Ries sein bedeutendstes Werk erscheinen, nachdem ihm der Kurfürst Moritz das dazu notwendige Geld vorgestreckt hatte. Es heißt:

Rechenung nach der lenge auff den Linihen vnd Feder. Darzu forteil vnd behendigkeit durch die Proportiones Practica genant. Mit grüntlichem Unterricht des visierens.

Das Buch ist ein Quartbuch und wird deshalb oft auch kurz „das Quartbuch" oder „das große Rechenbuch" genannt.

„Rechenung nach der lenge" soll heißen, daß hier alles lange, also gründlich und ausführlich behandelt wird. In den beiden ersten Abschnitten des Buches behandelt er den in den beiden ersten Rechenbüchern gebotenen Stoff. Der 3. Abschnitt handelt von der „Practica", d. i. von den Rechenvorteilen, auch „Welsche Praxis" genannt. Diese Welsche Praxis bereitete den Rechenlehrern damaliger Zeit besondere Schwierigkeiten, weil sie sich nicht in Regeln fassen ließ, sondern durch Exempel erlernt werden mußte. Die Eigentümlichkeit der „Welschen Praxis" bestand auch damals darin, daß die Zahlen nach ihren besonderen Eigenschaften geschickt zerfällt wurden. Das Volk rechnet heute noch gern in dieser Weise, und deshalb sollte sie unsere heutige Volksschule nicht

ganz außer acht lassen. Über den Namen ist viel gestritten worden. Man wird aber nicht umhin können, in vielen Stücken die Italiener als unsere Lehrmeister im praktischen Rechnen anzusehen; somit erklärt sich der Name ungesucht.

Der 4. Abschnitt des großen Rechenbuches handelt von dem Visieren, d. i. von der Berechnung des Inhalts mancher Körper, z. B. der Fässer, mit Hilfe eines Stabes, der Visierrute.

Das Quartbuch war nach Form und Inhalt das beste Rechenbuch seiner Zeit. Jeder Rechenmeister mußte dasselbe beherrschen und gar viele Rechenautoren entlehnten aus dem Quartbuch „holdselige exempla."

Auch in ihm sind die Stoffe nicht neu; neu aber und beachtenswert sind die Auswahl und die Anordnung der Aufgaben und die methodische Behandlung derselben. Bei der Auswahl der Aufgaben folgt Ries damals schon den noch jetzt geltenden didaktischen Regeln „vom Leichten zum Schweren usw." Er weiß zu unterscheiden, welche Aufgaben sich für den Anfänger und welche sich für fortgeschrittenere Schüler eignen; er betont die Elemente und übt die von ihm als Grundlage der Rechenfertigkeit erkannten Stoffe (z. B. das Einmaleins) immer wieder. Wichtige praktische Rechengebiete wiederholt er mit großem Geschick, so daß den Kindern die Rechnungen nicht langweilig werden, sondern daß sie dieselben „mit lust und frölickeit begreifen müge".

Seine methodische Behandlung kann getadelt werden, wenn man nur die Sachgebiete und Aufgaben in seinen Büchern ansieht und dabei findet, daß er die Regel gibt und an Beispielen einübt. Doch lassen die in den Büchern enthaltenen methodischen Winke den berechtigten Schluß zu, daß Adam Ries nicht nur auf mechanische Weise Kenntnisse vermittelt hat, wie es freilich die Sitte der damaligen Zeit war, sondern daß er bemüht gewesen ist zu unterrichten. Man lese, was Hartmann aus dem ersten Teil des Quartbuches anführt: „Zum Leser. Freundlicher lieber Leser. Ich habe befunden in vnderweisung der Jugent das alle weg die so auff den linien anheben des Rechens fertiger vnd laufftiger werden deñ so sie mit den ziffern die Feder genant anfahen. In den Linien werden sie fertig des zelen vnd alle exempla der kauffhendel vnd hausrechnung schöpffen sie einen besseren grund. Mügen als denn mit geringer mühe auff den ziffern jre Rechnung volbringen. Hierumb heb ich bey mir beschlossen, die Rechnung auff den linien zum ersten zu setzen. Wil dieselbe nach der leng erkleren. Hiermit ein jeder andere Rechnung so in diesem buch nachuol gent komen nicht vberdrüssig werd zu lernen. Sondern die mit lust vnd frölickeit begreiffen müge." Wer mit dieser Überlegung solche Ziele verfolgt, sollte von dem Vorwurf einseitigen Mechanisierens endgültig verschont bleiben.

Zum Schluß sei zur Vervollständigung des von Adam Ries entworfenen Bildes noch erwähnt, daß aus seinem Nachlaß noch ein starkes Rechenbuch unter dem Titel: „Adam Riesens seel: weiland Rechenmeisters zu St. Annaberg Anno 1524 auffgesetzte und mit eigener Hand geschriebene: aber niemals publicirte Cofs" herausgegeben worden ist. Das Buch behandelte die Cofs oder Algebra, also wesentlich die Lehre

von den Gleichungen und kann hier übergangen werden, da es zum größten Teil Übersetzungen von Aufgaben aus alten lateinischen Schriften bringt und keine Bedeutung für das Volksschulrechnen hat.

Endlich sei noch erwähnt, daß auch die drei Söhne von Adam Ries, Abraham, Isaak und Jacob, tüchtige Rechenmeister waren.

6. Das Volksschulrechnen von Ries bis Pestalozzi.

a) Das 17. Jahrhundert.

Der Kampf zwischen Abacismus und dem indisch-arabischen Positionsrechnen war um die Mitte des 16. Jahrhunderts prinzipiell zu gunsten des letzteren entschieden worden. Nach und nach verschwindet nun das Linienrechnen aus den Rechenbüchern, zuletzt erscheint es noch einmal in einem 1667 von Wendler herausgegebenen Buche. Unter der Ungunst der Zeit (der 30jährige Krieg und seine Folgen) litten aber auch die Schulen, besonders die von der Reformation geschaffenen Volksschulen. Die Gelehrten wendeten sich den höheren Gebieten der Mathematik zu. So wurden im Anfang des 17. Jahrhunderts von Neper und Briggs die Logarithmen berechnet; Leibnitz (1642—1726) erfand die Infinitesimalrechnung; Newton (1646—1716) die Differentialrechnung; Decartes René begründete die analytische Geometrie, und Huighens (1629—1693) erfand die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Die gemeine Arithmetik blieb Rechenmeistern, Geistlichen, Feldmessern, Stadt- und Ratsschreibern oder sonstigen zufälligen Liebhabern überlassen.

Groß war zwar die Zahl der Rechenbücher, die herausgegeben wurden, so z. B. selbst während des 30jährigen Krieges 60 und während des 17. Jahrhunderts fast 300 Bücher, aber gering ist der Fortschritt, den diese bringen. Man folgte in Stoffauswahl und Stoffanordnung Adam Ries in fast mechanischer Weise und legte auf Äußerlichkeiten großes Gewicht.

So geben schon die langen Titel der Rechenbücher Inhalt und Zweck derselben oft in hochtönenden Redensarten an. Das Titelblatt ist meistens ein allegorisches Bild, so z. B. bringt ein Buch eine allegorische Darstellung des Satzes: „Gott hat alles in Maß, Zahl und Gewicht erschaffen."

Großes Gewicht wurde auf eine passende Dedikation gelegt. Man wendet sich an Adlige, Bürgermeister, Prälaten, überhaupt an einflußreiche, vornehme Personen, man sucht Schutzherren, „die auf den Fall des Anstoßes mächtig und gelehrt genug sind, dasselbe (das Buch) zu verteidigen." Unangenehm berührt die nach damaliger Sitte überschwengliche Unterwürfigkeit.

Es folgt nun die Vorrede, die häufig eine vorläufige Abwehr der zu erwartenden Angriffe der Rezensenten enthält. So beginnt Wendler 1667: „Hör, bleicher Neidhardt, hör! was ich dir nun will sagen usw." Ferner findet sich in den Vorreden häufig in ebenfalls überschwenglicher Weise ein Lob der Rechenkunst. So schreibt Hausdörfer 1657: „Keine

unter den Wißenschaften ist so gewiß und sicher, so beweißlich und grundrichtig, so tieffsinnig und kunstständig, als die von den Zahlen handelt und sich von der veränderlichen Dinge Wesen absondert. Niemand kann gegen den Beweiß der Zahlen etwas aufbringen," und Schey (1602) verlangt von den Künsten, unter denen die Arithmetica mit nichten die mindeste ist: „daß wir durch selbige vns wieder zuwege brächten, was wir durch die Erbsündt verlohren haben."

Auch in der Zielangabe verspricht man viel, so verspricht der eine Rechenbuchverfasser „das Rechnen leicht, mit allerhand Vorteilen, Geschwind- und Behendigkeiten zu lehren"; ein anderer Verfasser, J. Kreiling (1617), will „die Haushaltung und Kauffmannschaft dem Fundamente nach, ohne Auswendiglernen des Einmaleins in einer Stunde" lehren; Hemeling in Hannover will „die edle Rechenkunst als durch einen Trichter eingießen" usw.

Eine Verbesserung der Methode ist kaum zu bemerken, nur daß sich hier und da vielleicht eine schärfere Gliederung geltend macht; erst später, besonders von der 2. Hälfte des 18. Jahrhunderts an, legt man nicht mehr auf das Lernen selbst, sondern auf die Art desselben Gewicht. Man betont die „überzeugenden Gründe und die vernünftigen Gedanken", man schreibt für Anfänger und bestrebt sich deshalb, faßlich und deutlich zu sein. Wenn es nun zwar bei den bisherigen Rechenstoffen blieb, so verdienen doch gewisse Verbesserungen erwähnt zu werden.

Bei der Numeration wird durch allgemeine Einführung des Begriffs „Million" größere Übersicht erzielt; später kommen, vielleicht von den Franzosen, Billion, Trillion usw. hinzu und verdrängen die deutsche Art der Angabe der Tausender. Der Stellenwert der Zahlen tritt immer mehr hervor. Bei den Rechnungsarten selbst macht sich, wie schon erwähnt, eine schärfere Gliederung der Aufgaben nach ihrer Schwierigkeit geltend; das schriftliche Verfahren wird allmählich dem jetzt gebräuchlichen Verfahren ähnlich; an Stelle des Übersichdividierens tritt eine übersichtlichere, unserer heutigen Divisionsform gleichende Form, das Untersichdividieren; das Linienrechnen weicht immer mehr dem schriftlichen Rechnen; Duplieren und Medieren fallen weg. Auch in der Bruchrechnung ist ein wesentlicher Fortschritt zu spüren, nur das Multiplizieren der Brüche mit Brüchen wird vielfach nicht verstanden. Man sah das kleinere Resultat und sagte sich doch, daß Multiplizieren Vermehren bedeute. Ähnlich ging es bei dem Dividieren.

Als schriftliche Rechnungsform gewann die „Welsche Praxis", d. i. eine Reihe von Rechenvorteilen, eine größere Bedeutung. Man hielt dieselbe für besonders geeignet, die vielen Angaben und Posten, die beim Kauf und Tausch dem Handelsmann vorkamen, mit Leichtigkeit zu bewältigen. Die Regula falsi wird seltener. Sehr ausgedehnt sind die Sachgebiete, denen die Aufgaben entnommen sind. Die Erzeugnisse der verschiedensten Länder werden herangezogen und rechnerisch in nicht ungeschickter Weise verwertet, besonders bei der Stich-, d. i. Tauschrechnung. Vielfach werden auch Rechenregeln und Rechenaufgaben in Verse gekleidet, was die Knappheit und Kürze des Ausdrucks nicht fördern konnte, zumal die schon erwähnte Überschwenglichkeit sich hier besonders zeigt. Hierzu bringt Sterner

aus dem arithmetischen Rechenbüchlein von Michael Schmid (Heilbronn 1705) unter anderen auch folgende Beispiele über die Regeln zur Bruchdivision:

Kommt Division der Brüch ans Werk,
Mein Rechner so behalt und merk:

a) Den Bruch durch eine ganze Zahl,
Den Nenner nehme so viel mal.

b) Ein Ganzes durch den Bruch allhier,
Die Ganz mit dem Nenner multiplizier,
Und teile mit dem Zähler drein.
So mag es wohl gerechnet sein.

c) Und Bruch durch Bruch hält auch nicht schwer;
Den Divisoren, — den verkehr,
Multiplizier die Zähler dann,
Zuletzt die Nenner. Recht gethan.

Nachstehend folgen einige Proben von Reimaufgaben:

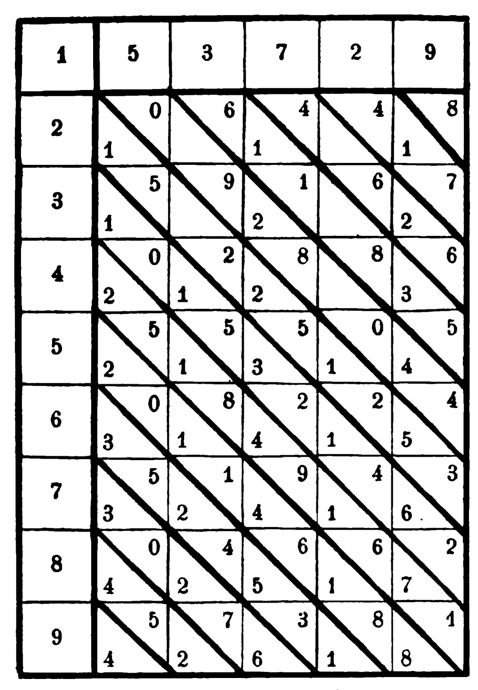
Berichte mich/ bitt dich mein Rechner in Eyle;
Was kommt heraufser zum richtigen Theile:
Wann sechzigmahl/ funffzigmahl/ vierzigmahl drey
Man theilet/ in vierzigmahl/ dreifsigmahl zwei.

Beliebter Rechner/ bring herbei:
Wann man dreyhundert vierzig drey/
Von tausend eilf und zwelffen nimbt/
Wieviel der Überschufs bestimbt?

Ein hüpsche Mühl/ als man befunden/
Mahlt 12 Mafs Korn in dritthalb Stunden/
Mein sagt: Wie vil demnach sie dann
In achthalb Stunden mahlen kann?

Zur „Arithmetica" dürfte auch folgender von Bendler angeführte Redeschluß eines alten Braunschweiger Predigers bei den Schulexamen gehören: „Er (Gott) numeriere euch zu seinem Segen, Subtrahiere alle Fehler und Unarten, Multipliziere von Tag zu Tag seine Barmherzigkeit, damit ihr künftiger Zeit mit eurem Nächsten auch dividieren könnt dasjenige, worin er euch nach der Regel des heiligen Wortes hat aufwachsen lassen! Amen!"

Auch durch allerlei Hilfsmittel suchte man das Rechnen zu erleichtern. So entstanden große Einmaleinstafeln, Multiplikationsmaschinen u. a. Auf uns sind noch die Neperschen Rechenstäbe gekommen, mit deren Hilfe eine Multiplikation mehrstelliger Zahlen durch einstellige sofort abgelesen werden sollte.



3×53 729 ist 161 187.

Bisher wurden in der astronomischen Berechnung und in der Wissenschaft die Sechzigstelbrüche verwendet. Adam Ries und andere ahnen schon die Wichtigkeit der Einheiten der Zehnerordnung, wenn sie bei dem Teilen durch diese Zahlen Stellen abstreichen lassen, um die übrig bleibenden ganzen Zahlen schnell zu finden. Erst um die Wende des 16. Jahrhunderts finden der Franzose Simon Stevin und der deutsche Arzt Beyer zu Frankfurt a. M. unter sich selbständig die Bedeutung der Dezimalbrüche und der Dezimalbruchrechnung. Letztere machte in wenigen Jahren sehr große Fortschritte, vorwiegend freilich bei dem sogenannten höheren Rechnen. Der Einführung in die Volksschule standen die verschiedenen Währungszahlen bei den mehrfach benannten Zahlen entgegen. Doch schon in der 2. Hälfte des 17. Jahrhunderts sagt der Engländer Wingate: „Wenn bei Münzen, Maßen und Gewichten das Dezimalsystem eingeführt wäre, dann könnte die Arithmetik viel leichter und schneller erlernt werden.“ Die Schreibweise der Dezimalbrüche war zuerst nicht die uns bekannte, man schrieb z. B. für 0,256 entweder $0^{0}2'5''6'''$, oder 256 $(^{3}$, oder 0 < 256 u. a.). Das Dezimalkomma soll Kepler eingeführt haben.

Trotz der angeführten Verbesserungen ist doch der Stand des Rechenunterrichts im 17. Jahrhundert ein wenig erfreulicher. Äußerlichkeiten und toter Formalismus herrschen in den Schulen mit sehr geringen Ausnahmen. Einen großen Teil der Schuld tragen die damaligen Lehrer. Lehrerbildungsanstalten gab es nicht; die Besoldung war jammervoll, und so fehlte es allenthalben an einsichtigen und kenntnisreichen Lehrern.

Sterner berichtet aus einem um 1700 erschienenen Buche über die Qualität des Lehrerpersonals jener Zeit: „Sieben böse Geister sind es, welche heutiges Tages guten Teils die Küster oder sogenannten Dorfschulmeister regieren, als da sind: der stolze, der faule, der grobe, der falsche, der böse, der nasse und der dumme Teufel, welchem kommt hintenach gehunken, als ein überleier, der arme Teufel. Der eine ist ein Mäurer oder Ziegeldecker, der andere ein Seiler, der dritte ein Schlächter. Da gehen sie denn ihrer Nahrung nach, lassen indes die Kinder alleine

sitzen, daß die großen die kleinen auffsagen lassen müssen, oder es informiret die Frau schlecht genug; oder sie jagen die Kinder fort und lassen sie, solange es Schulzeit ist, auf dem Kirchhoffe herumb laufen und spielen... In der Rechenkunst können ihrer etliche das Einmaleins nicht; wenn sie addieren, fangen sie vorne bei den Thalern an. Ja sie können nicht einmal numerieren, wissen nicht, wie sie ein Halbes anschreiben sollen, machen aus ½ ²⁄₁. Wäre also das beste, daß man die Küster, ehe man sie aufnimmt, in allen Stücken examiniere oder daß man eigene Schulen oder Seminarien gründe, darinnen junge Leute zu künftigen Schulmeistern erzogen werden."

An anderer Stelle läßt Sterner den Gabriel Ternen, Pfarrer zu Roitzsch bei Delitzsch klagen: „... Was für ungeschickte Leute lehren in den Dorfschulen! Ihrer viele sind nicht wert, daß sie Schulmeister heißen. Sie sind auch keine Meister, sondern Pfuscher. Derjenige, der sonst zu nichts in der Welt geschickt ist, der will ein Schulmeister werden, und den verständige Leute nicht gern eine Saue anvertrauen, und den die Bauern nicht gerne zum Kuhhirten machen würden, der soll zu einem geistlichen Hirten gut genug sein... Allein, was ist Ursach? Daß man einen Dorfschulmeisterdienst für was geringes hält, und schlechte Leute dazu nimmt, als verdorbene und versoffene Bursche oder gar Soldaten, die sich bei großer Herren Schreibern insinuieren und ihnen einen Thaler in die Hand drücken, damit sie bei ihren Herren eine Intercession, wenn ein Schuldienst offen, einlegen. Oder es hat des Herrn Schneider oder Gärtner, der das Kammermädchen nimmet und sonst nicht viel vergessen, das Glück, einen Schuldienst davonzutragen. Weil christliche und geschickte Subjecta solche Dienste scheuen, geschieht, daß Fratres ignorantia die Schanze glücklich einnehmen... Sie bekommen Gestank vor Dank, Unehre vor Ehre, lose Worte vor Geld. Sie haben Esels Arbeit, hingegen Zeisigsfutter ..."

Doch wurde gerade in dieser für die Volksschulen so traurigen Zeit der Grund zur späteren Entwicklung der Methodik des Rechenunterrichts gelegt; denn die Forderung des naturgemäßen Unterrichts von Baco von Verulam, Locke, Ratich und Comenius kommt auch dem Rechenunterricht zu statten. Comenius selbst verlangt, daß die Kinder mit Ziffern und Steinen rechnen lernen, und daß sie selbst messen sollen usw. Ja, man kann sagen, daß jeder spätere Fortschritt des Rechenunterrichtes in der Didactica magna des Amos Comenius vorgezeichnet ist. Besonders muß hier auf den Schulmethodus des Herzogs Ernst von Gotha hingewiesen werden. Er bestimmt, daß jedes Kind ein Rechenbüchlein haben soll und verordnet dann in Kapitel II—V: „In der Mittelklasse soll das Rechnen mit der Kenntnis der Zahlen beginnen. Es beschränkt sich hier auf die feste Einprägung des Einmaleins und die Addition und Subtraktion. Die Oberklasse soll die Regelbetri und die Bruchrechnung üben." Methodisch bedeutsam sind die Ratschläge: „Das Kind soll sich der Gründe seines Verfahrens bewußt werden. Den Zoll sollen die Schulmeister der Jugend nicht bloß vorsagen, aus dem Abriß zeigen und an die Tafel vormalen, sondern auch an dem Lineal nachweisen, das eben eine Elle lang ist.

(Maßstab und messen.) An einem runden Hute soll gezeigt werden, daß der Umfang eines Kreises dreimal so groß ist als sein Durchmesser."

b) Das 18. Jahrhundert.

Nach diesen Vorbereitungen konnte nun das 18. Jahrhundert, das man das „pädagogische Jahrhundert" genannt hat, mit Erfolg seine Arbeit beginnen. Durch die beiden den pädagogischen Charakter des Jahrhunderts bestimmenden pädagogischen Richtungen, nämlich durch die Pietisten und die Philanthropen, wurde das Interesse für die Schule im allgemeinen und damit auch für den Rechenunterricht gesteigert. Es wurden Lehrerseminare gegründet, und die besseren Lehrkräfte zeitigten auch im Rechnen Erfolge. Im Anschluß an die methodischen Ergebnisse des 17. Jahrhunderts betonte man in der ersten Hälfte des neuen Jahrhunderts mehr als bisher die formalbildende Kraft des Rechnens. So schreibt der Neumarkter Schul- und Rechenmeister Joh. Mich. Dannberger 1742:

„Lehrn Rechnen, draus erblickht,
Wie dein Verstand geschickt.
Rechnen schärpft die Blöde Sünen,
Mehrer Weisheit zu gewinnen."

Die Schulordnungen der Franckeschen Stiftungen vom Jahre 1721 bestimmen, daß den Scholaren jederzeit der rechte Grund der Regel gezeigt werde, und der berühmte Kanzler Wolf von der Universität Halle sagt: „Es ist nicht genug, das man dem Schüler bloß die Wahrheit sagt, der Schüler muß auch begreifen, daß es Wahrheit ist", und an anderer Stelle: „Der erste Unterricht in der Mathematik muß so vorgenommen werden, daß er eine Veränderung im Verstande bewirkt." Hauff schreibt in seinem Lehrbuch der Arithmetik 1793: „Die Arithmetik ist eine reine Vernunftwissenschaft. Bei allen Vernunftschlüssen sollte man ebensoviel auf den formalen als den materialen Nutzen sehen." — Peter Villaume arbeitet am Ende des 18. Jahrhunderts dem toten Mechanismus entgegen. Er sagt u. a.: „Allemal müssen die Rechnungen aus dem Zirkel der Kinder genommen werden. Die Größe der Felder, die Länge eines Weges, die Menge des Futters fürs Vieh, die Maschen in einem Strumpf können die Rechnungen groß genug machen, um Übung darin zu geben. Lasset die Numerationen von 10 bis 20 Zahlen, die großen Multiplikationen und Divisionen weg."

Am Schluß des Jahrhunderts trat neben diesem formalen Prinzip die praktische Richtung beim Rechnen wieder mehr in den Vordergrund.

Eberhard von Rochow läßt zuerst das Zählen an sichtbaren Dingen (Körpern), dann an Strichen (Zeichen) üben, es folgten dann einfache Rechenübungen ohne Ziffern, aber mit Veranschaulichung; das Kopfrechnen ging dem schriftlichen Rechnen voran usw. „Und da alles dieses in lauter angewandten Aufgaben gemeinnütziger Berechnung geschehen muß, so verliert das Geschäft seine gewöhnliche Trockenheit und wird, als Übung der jungen Seelenkräfte, dem Kinde so freudevoll, als den jungen Vögeln des Waldes der erste Flug sein mag. Denn jedes

gelingende Geschäft schafft Freude, und dieses unfehlbare Gelingen gewährt in dem Grade nur die Rechenkunst." Hieraus folgert er den wichtigsten seiner methodischen Grundsätze für den Rechenunterricht, nämlich: „Die Aufgaben sollen aus dem wirklichen Leben genommen werden." — Andere wieder legten Gewicht auf die religiös sittlichen Momente. So schreibt der eben erwähnte Dannberger bei der Wechsel- oder Tauschrechnung:

„Ungerechtes Gut erwerben,
Bringt gar selten Nutz den Erben.
Gewünnen liegt allezeit
an Menschlicher Geschicklichkeit."

An die Stelle der städtischen Rechenschulen traten immer häufiger die Realschulen, und die Schreib- und Rechenmeister wurden überflüssig. Neben den Realschulen entstanden aber auch Volksschulen, deren Lehrziel im Rechnen in den Spezies in ganzen und gebrochenen Zahlen und in der Regeldetri bestand. Doch verlangte man nicht unbedingt von allen Kindern die gleichzeitige Erreichung des Rechenzieles. In dem Lehrplan für die deutschen Schulen der Fran ckeschen Stiftungen heißt es:

„§ V. Zu der Arithmetica sind alle Kinder, die fertig lesen können, anzuführen."

„§ VI. Weil es nicht angehet, wie man solches aus der Erfahrung hat, das man in Arithmectia Klassen macht, indem die ingenia varia, und einer im Rechnen hurtiger ist als der andere, und also einer mit dem andern aufgehalten wird, so hat man es bisher auf andere Art versuchen müssen. Nemlich es wird ein gedruckt Rechenbuch gebraucht, darinnen mancherlei Aufgaben durch alle Species, Regulamdetri, Practicam und andere Rechnungen zu finden, wozu man sonderlich gut gefunden Tobiae Beutels Rechenbuch. Nach demselben soll der Rechenpräceptor die Arithmeticam lehren."

„§ VII. Bei diesem Rechenbuch braucht der Präceptor keine Aufgaben zu dictiren, sondern ein jedes Kind kann solche aus dem Buche abschreiben und in der Stille elaboriren. Da unterdessen der Präceptor herumgehet und nachsiehet, was ein jegliches machet, und wo eins nicht fortkommen kann oder gefehlt hat, es ihm zeiget oder forthilft."

Fast alle Rechenbücher dieses Jahrhunderts (über 400 wurden herausgegeben) beginnen noch mit der Definition der Arithmetica. Auf den Titeln aber schon merkt man die veränderte Methode. Während man früher bestrebt war, die Rechenkunst kurz, auf das allerkürzeste, leicht, geschwind, behend, selbstlehrend, recht ordentlich und künstlich zu lehren, wird nunmehr der Schuljugend das Rechnen zum „einfeltigsten, jedoch deutlichsten dargestellt, demonstrativ und faßlich" gelehrt. Es erscheinen: „überzeugende Gründe der Rechenkunst, vernünftige Gedanken zur nützlichen Erlernung der mathematischen Wissenschaften, insonderheit wie der Verstand zu seinen Verrichtungen vollkommener zu machen".

Von dem Stoff dieser Bücher soll folgendes erwähnt werden:

Die neue Numeration wurde allgemein durchgeführt, Zahlenlesen und Zahlenschreiben wird besonders geübt. Das Addieren wird in der jetzt noch gebräuchlichen Form eingeführt.

Die Subtraktion wird im doppelten Sinne gefaßt, als Wegnehmen und Unterschiedsuchen. „Die Abziehung gebrauchen wir, um zu erkennen, um wie viel eine gegebene Größe eine andere übertreffe, oder was für ein Unterschied zwischen zwoen Größen sey; oder endlich was für ein Rest bleibe.“ Demgemäß erscheint das Subtrahieren in der schriftlichen Form bald als Addition der Differenz zum Subtrahenden, bald als wirkliches Abziehen oder Wegnehmen des Subtrahenden vom Minuenden. Das Riesesche Verfahren, vom entlehnten Zehner abzuziehen und zum Reste die vorhandenen Einer zu addieren, war, wie es scheint, wieder außer Gebrauch gekommen.

Bei der Multiplikation wird wieder die genaue Kenntnis vom Einmaleins gefordert. Hemeling schreibt 1711:

„Wer fertig will im Rechnen sein,
Der lehrne wohl das Einmalein.“

und Tobias Beutel sagt 1721:

„Gleich wie man einen Turm durch Staffeln muß ersteigen,
So muß das Einmaleins den Weg zum Rechnen zeigen.“

Man beschränkt sich aber vernünftigerweise auf die Kenntnis vom kleinen Einmaleins.

Beim Dividieren hat das Abwärtsdividieren die kunstvolle Turmmethode vollständig verdrängt.

Am meisten Schwierigkeiten macht immer noch die Bruchlehre und die Definition des Bruches. Clemm sagt: „Brüche sind geometrische Verhältnisse, d. h. Zahlen, welche durch eine andere dividiert werden.“ Der Umstand, daß bei der Multiplikation mit einem Bruch das Produkt kleiner ist als der Multiplikandus und bei der Division durch einen Bruch der Quotient größer als der Dividendus, erregt immer noch Zweifel. Die Dezimalbruchrechnung wird selten in den Volksschulen gefunden, trotzdem die Wichtigkeit derselben anerkannt wird. So sagt Merklein über die Bedeutung der Dezimalrechnung: „In der Mathematik ist die Dezimalrechnung eingeführt worden. Der Nutzen hievon ist unaussprechlich, weil hierin alle verdrießlichen Brüche hinweg bleiben und ich allemal gleich weiß, wie viel jeder Bruch in Ganzen von kleineren Stücken schon ausmache. Es wäre zu wünschen, daß diese vortreffliche Rechnungsart eingeführt würde. Was machen die gemeinen Brüche für Verdruß im Frucht-, Wein- und Gewichtmaß . . .“

Die „Welsche Praktik“ wurde von einem der bedeutendsten Rechen-neister des 18. Jahrhunderts, Georg Heinrich Paricius in acht Gruppen [illegible]gliedert. 1. Das Hintersichmultiplizieren, d. i. die Umkehrung der [illegible]aktoren, z. B. $3\frac{1}{5}$ mal 6 gleich 6 mal $3\frac{1}{5}$. 2. Das Kontrahieren oder uf[illegible] gegen einander komponierten oder geraden Terminen, d. h. [illegible]. Glied) und der Dividend (2. oder 3. Glied) werden mit

dem gemeinschaftlichen Faktor dividiert. 3. Die Abkürzung der Nullen. 4. Die Zerstreuung in vielfach teilende Rationen. 5. Die Proportionierung der zerstreuten Teile. 6. Die Verwandlung der Sorten in Ganze höherer Ordnung. 7. Die Zerstreuung der Sorten nach dem Einmaleins. 8. Die Vergleichung des Divisors gegen den Dividenden oder das Kürzen.

Die Textaufgaben werden von einigen Methodikern nach sachlichen Gesichtspunkten geordnet, häufig werden sie auch noch in Verse gekleidet. So bringt Dannberger folgende Aufgabe mit Berechnung:

„Es stund auf einen Grienen Raum
ein schöner frischer Dannenbaum
an selben stig Vonn unten auf
ein Wurm hinan: mit schnellen Lauf
in solcher Ordnung Allemahl/
daſs täglich Er stäths an der Zahl
fünff Ellen kham den Paumb hinan
und fiel wiederumb zurückh alsdann
zwey ganzer Ellen bey der Nacht
aus Leibs Schwachheit wie ich eracht;
Gleich so verlieſse seinen Süz
ganz oben von des Paumbes Spüz
ein hipscher schneckh und eylt herab
wie sein tragenter Gang es gab
täglichen richtig allemahl
zwey ganzer Ellen an der Zahl
kehrt aber nächtlich seinen Lauf
kroch wider ein halbe Ellen hinauff/
So thuen es diſse Thierlein beydt
ja immerforth ohn Unterscheidt
bis daſs am. Dannenpaumb alldar
obschon Vonn guetter höch Er war
Nach Neun Tägen wie es sich findt
beyde zusammen khommen sindt.
Drauſs Rechner mach nun offenbar/
wie hoch der Dannenpaumb dann war.

Tag		Ellen		Tag
1	———	5	———	9
	nimb ab	2		3
		3		27

27 Ellen der Wurmb.

Tag		Ellen		Tag
1	———	2	———	9
2	nimb ab	$\frac{1}{2}$	zurückh	3
2		$1\frac{1}{2}$		27
		3		

$\left.\begin{matrix}27\\2\end{matrix}\right\}$ $13\frac{1}{2}$ Ellen der Schneckh.

Der Wurmb	27	Ellen
Der Schneckh	$13\frac{1}{2}$	Ellen
Thuet zusammen	$40\frac{1}{2}$	Ellen."

Das Bedürfnis, für die vielgliedrigen Aufgaben kurze und rasche Ansätze und Lösungsweisen zu haben, führte zur Annahme des Reesischen Ansatzes. Spuren dieser Lösungsform finden sich schon bei A. Ries, doch erst Franz von Rees bildete dieselbe in seinem 1737 in holländischer Sprache erschienenen Rechenbuche weiter aus. Das Wesen des Reesischen Satzes läßt sich wohl darin zusammenfassen, daß die sonst als Proportion gerechnete Aufgabe in Bruchform mit senkrechtem Bruchstrich dargestellt wird, so daß die Glieder der Aufgabe sich als Zähler und Nenner links und rechts vom Bruchstrich finden. Die Ansatzform ist ganz mechanisch; es ist bei Anwendung des Reesischen Satzes gar nicht aufs Denken, sondern aufs Können abgesehen. In der Kahleschen Übersetzung des Reesischen Buches heißt es wörtlich: „Man muß alle Zahlen, welche in einer vorgelegten Frage befindlich sind, in zwei Kolumnen oder Glieder aufschreiben. Die eine Kolumne zur Rechten, die andere zur Linken; hierauf muß man sonderlich wohl acht haben. Daher müssen diejenigen Zahlen, deren eine aus der andern bestimmt wird, nicht in einerlei Kolumne stehen, sondern in unterschiedene gesetzt werden . . . Die Dinge, die einerley Namen haben und die auf einer Seite zu stehen kommen, müssen auch, da sie zum andernmal vorkommen, mit ihrer Zahl auf die andere Seite gesetzt werden; oder: es müssen in einer Kolumne so oft die Namen der Dinge mit den zugehörigen Zahlen sein, als in der andern. Hat man z. B. die Aufgabe: „Wenn 3 Ellen 24 fl. kosten, wieviel 37 Ellen? und den Anfang des Ansatzes: Ellen 3—24 fl., so müssen auch zur Rechten Ellen und zur Linken fl. seyn. Weil aber diese noch unbekannt sind, so kann man ihren Namen mit einem Sternchen merken. Man erhält also:

Ellen 3	24 fl.
fl. *	37 Ellen.

Alle Zahlen, welche sich in einer Kolumne befinden, müssen miteinander multipliziert werden. Sind die Multiplikationes geschehen, so wird man zwei Produkte haben, wovon das eine der Teiler und das andere die zu teilende Zahl ausmacht, aber nicht auf gleichgültige Art. Denn das Produkt derjenigen Kolumne, in welcher der Stern befindlich ist, muß jederzeit der Teiler sein usw." Rees selbst gibt nun an, wie man Kürzen und Brüche wegschaffen könne und lobt zuletzt diese Ansatzform, mit der man in längstens $^1/_4$ Std. fertig wird, während man sonst einige Stunden mit 10—12 Sätzen machen müsse.

Man kann zugeben, daß der Reesische Satz sehr leicht ist und eigentlich nur in einem Gruppieren der in der Aufgabe gegebenen Größen besteht, daß es auch möglich ist, ihn zu erklären (dabei wird man aber stets auf die Proportionen oder Schlußrechnung zurückkommen, und dies konnte man dann billigerweise sofort anwenden), aber trotzdem gehört er nicht in die

Volksschule, weil es ihm ohne Rücksicht auf das Verständnis des Verfahrens nur um mechanische Fertigkeit zu tun ist.

Werden zusammengesetzte Aufgaben nach dem Reesischen Satze angesetzt, so erhält man den **Kettensatz**, der natürlich noch mehr dem toten Mechanismus verfallen mußte, trotzdem aber lange Zeit angewendet wurde und bis in die neueste Zeit in den Rechenbüchern Platz gefunden hat.

Dem Mechanismus, zu dem der Reesische Ansatz zurückführt, suchte **Basedow** (1723—1790) dadurch zu begegnen, daß er die einzelnen Glieder des Dividenden und Divisors durch logische Schlüsse finden lehrte, und **Busse** (1756—1835), Lehrer der Mathematik am Philanthropin in Dessau, vervollständigte diese Bemühungen durch das Zurückgehen auf die Einheit und durch Anwendung des Bruchstrichs. Man nannte diese Abänderung des Reesischen Satzes die „**Basedowsche Regel**". Trotzdem sie wenig in Gebrauch genommen wurde, muß man sie doch als Übergang zu dem Schlußrechnen unserer Zeit ansehen.

Zu den verbreitetsten Rechenbüchern dieses Jahrhunderts gehören außer den schon erwähnten Büchern des Paricius die von **Clausberg** (1689—1751) und von **Pescheck** (1676—1747).

Clausbergs „Demonstrative Rechenkunst" galt während des ganzen Jahrhunderts als das vorzüglichste Buch seiner Art. In der Anleitung zur Benutzung desselben sagt er: „Beginne mit den Exempeln, gehe dann zuerst zu den allgemeinen Regeln, und willst du mehr als rechnen lernen, so siehe die Beweise und Gründe an", und an anderer Stelle schreibt er: „Der Verstand empfindet nun ein großes Vergnügen, wenn er ein Ding aus dem Grunde verstehen lernt und begreifen kann, warum man durch diese Regeln ein solch Exempel auflösen könne, und wie man auf solche Regeln gekommen sei."

Pescheck, der Adam Ries des 18. Jahrhunderts genannt, hat mehr als 30 verschiedene Rechenbücher herausgegeben, von denen viele großen Anklang und weite Verbreitung gefunden haben. Von ihm stammt auch das erste methodische Handbuch des Rechenunterrichts, der „arithmetische Hauptschlüssel", der 1741 erschien. Hartmann urteilt über Peschecks Bedeutung: „Der innere Gehalt der Pescheckschen Schriften ist zwar kein großer; den Bedürfnissen des gemeinen Volks und der damaligen Lehrer hat aber niemand so wie er zu entsprechen gewußt."

Das beste methodische Handbuch für den Rechenunterricht hat der schon erwähnte Philanthrop **Busse** geschrieben. Er vertritt darin die Forderungen der Philanthropen, nämlich: a) Wähle den Stoff mit Rücksicht auf die Schüler; b) Schreite stufenmäßig weiter; c) Gehe von der Anschauung aus. Busse ist ferner noch bekannt durch seine Zahlbilder, das sind Punktgruppen zur Veranschaulichung der Zahlen 1—30, der 100 und der 1000. Außer den Punkten benutzt Busse zur Veranschaulichung der Zehner Tüten, der Hunderter Säckchen, der Tausender Kästchen.

Eine besonders genaue Anweisung zur Erteilung des Rechenunterrichts gibt auch **Overberg** in Münster (1754—1826); er sagt: „Auf eine gute Methode kommt alles an", daher: a) „Haltet eure Schüler, wenn ihr sie zum Rechnen anführen wollet, nicht mit der Erklärung der Rechenkunst, mit den Einteilungen und Erklärungen der verschiedenen Zahlen und

Rechnungsarten auf, sondern fangt sogleich bei den Übungen an, d. h. lehret sie zählen; b) zeigt ihnen nicht gleich, wie sie bei der Auflösung eines Exempels praktisch verfahren müssen, sondern lasset sie erst darüber nachsinnen; vielleicht verfallen sie selbst auf die eine oder andere Manier, sich zu helfen. Bringet sie zum Nachdenken, daß sie den Grund der Manier finden; c) übt sie in solchen Exempeln, welche in ihre eigenen oder ihrer Eltern Umstände und Geschäfte einschlagen; d) plaget sie nicht mit zu großen Exempeln; e) gehet nicht weiter, als bis eure Schüler das Vorhergehende recht verstanden haben und hinlänglich darin geübt sind; f) fanget das Rechnen im Kopf mit ihnen an, ehe sie noch an der Tafel rechnen können und setzet es auch bei der Übung an der Tafel noch beständig fort; g) sorget dafür, daß ihr immer eine Menge Dinge, die man zählen kann, bei der Hand habet, und nehmet damit dasselbe vor, was sie im Kopfe oder an der Tafel tun sollen."

Das von Overberg unter f) erwähnte Kopfrechnen ist eine neue Art des Rechnens, auf die zuerst Hübsch im Jahre 1746 hinweist. Biermann und Köhler gaben zu Ende des 18. Jahrhunderts besondere Schriften über das Kopfrechnen heraus. Der letztere fordert, daß das Kopfrechnen dem Tafelrechnen parallel, doch vorausgehe, daß ihm also die erste Stelle eingeräumt werde. Derjenige, welcher den Stand des damaligen Kopfrechnens am treffendsten zusammenfaßt, ist der Pfarrer Magenau in seiner „Kleinen Handbibliothek für deutsche Landschulmeister und ihre jüngeren Gehilfen" (1800). Er sagt darin u. a.: „. . . Das gewöhnliche mechanische Rechnen führt zwar zu einer nützlichen Fertigkeit, aber es bildet nicht. Es ist daher ein großer Nutzen für die Jugend, wenn das Kopfrechnen zur ersten arithmetischen Übung gemacht und das schriftliche Rechnen damit in Verbindung gesetzt wird."

Sehr bald mehrten sich nun die Schriften über das Kopfrechnen. Das Kofrechnen verlangte, daß eine große Anzahl moderner methodischer Forderungen erhoben wurden, z. B. Aufhebung des Numerierens, Veranschaulichung, Rechnen mit kleinen Zahlen, strenge Reihenfolge der Aufgaben, Selbständigkeit der Kinder, gründliche Übung usw.; Forderungen, welche direkt auf Pestalozzi hinweisen.

7. Pestalozzi.

Die Entwicklung des modernen Rechenunterrichts.

Obwohl im 18. Jahrhundert der Rechenunterricht sich so weit entwickelt hatte, daß man den blinden Mechanismus verwarf und die Kinder teils durch Veranschaulichung, teils durch überzeugende Gründe zur Einsicht in die arithmetischen Operationen führte und auch einen stufenmäßigen Fortschritt vom Leichten zum Schweren innehielt, so war aber immer das Rechnenlernen die Hauptsache, der Bildungsgewinn wurde von wenigen hervorgehoben und gehörte zu den Nebenzwecken. Außerdem bestand ein großer Unterschied zwischen Theorie und Praxis, d. i. zwischen den Forderungen hervorragender Rechenmethodiker und den wirklichen Leistungen der Mehrzahl der Schulen. Endlich war die eigentliche Aufgabe der Schule

noch nicht klar erkannt, deshalb konnten auch Stellung und Wesen des Rechenunterrichtes kaum richtig angegeben werden.

Zu derselben Zeit, als sich auf politischem und sozialem Gebiete die gewaltigsten Wandlungen vollzogen, also an der Wende des 18. Jahrhunderts, wurde auch in dem Rechenunterricht mit den veralteten Anschauungen gebrochen.

Es war Pestalozzi, der den nachhaltigen Anstoß zu dieser Reform gab, und deshalb wird Pestalozzi mit Recht der Reformator der Volksschule und besonders des Rechenunterrichts genannt. Pestalozzi (1746—1827) verlangte, daß nicht das Rechnenlernen, sondern die Entwicklung der geistigen Anlagen und Kräfte des Kindes das Wesentlichste und Wichtigste sei, daß daher die Schüler zur richtigen Anschauung, von der Anschauung zum richtigen Denken und vom richtigen Denken zum richtigen Rechnen geführt werden müßten. Von den drei von ihm aufgestellten Unterrichtsmitteln, Wort, Form und Zahl, erhebt Pestalozzi das dritte, die Zahl, zum Mittelpunkt des Unterrichts, da an ihr der Zweck alles Unterrichts, die deutlichen Begriffe, am sichersten erzielt würde. Seine Ansicht hierüber hat er niedergelegt in der Einleitung zu dem 8. Briefe in „Wie Gertrud ihre Kinder lehrt". Er sagt: „Schall (Wort) und Form führen den Keim des Irrtums und der Täuschung sehr oft und auf verschiedene Weise in sich selbst. Die Zahl niemals; sie allein führt zu untrüglichen Resultaten . . . So wie nun dasjenige Unterrichtsmittel, das den Zweck des Unterrichts — die deutlichen Begriffe — am sichersten erzielt, als das wichtigste dieser Mittel angesehen werden muß, so ist offenbar, daß dieses Unterrichtsmittel auch allgemein und mit der vorzüglichsten Sorgfalt und Kunst zu betreiben sei, und daß es für die Erreichung des letzten Zweckes des Unterrichtes höchst wichtig ist, daß auch dieses Unterrichtsmittel in Formen gebracht werde, welche alle Vorteile benutzen, die eine tiefe Psychologie und die umfassendste Kenntnis der unwandelbaren Gesetze des physischen Mechanismus dem Unterrichte allgemein gewähren können. Ich habe mich daher äußerst bemüht, die Rechenkunst in der Anschauung des Kindes zum hellsten Resultat dieser Gesetze zu machen und nicht nur die Elemente derselben im menschlichen Geiste allgemein zu der Einfachheit zurückzudrängen, in der sie in der wirklichen Anschauung der Natur selbst erscheinen, sondern auch ihren Fortschritt in allen ihren Abwechslungen genau und lückenlos an diese Einfachheit der Anfangspunkte anzuketten usw." An anderer Stelle sagt er: „Was durch die Anschauung gegeben wird, muß die Einbildungskraft im ganzen und teilweise tief und fest auffassen; was die Einbildungskraft tief und fest auffaßt, muß durch alle Stufengänge der Übung zum klarsten und geläufigsten Bewußtsein des Gedächtnisses kommen, und dies muß den Verstand nach bestimmten Merkmalen zergliedern und nach ebenso bestimmten Analogien wieder verbinden, um sich der ganzen Kettenfolge der Resultate zu bemächtigen."

Pestalozzi will also durch Anschauung deutliche Begriffe erzielen, so daß der Rechenunterricht vereinfacht und lückenlos fortschreiten kann. Er sagt hierüber an anderer Stelle: „Die Rechenkunst ent-

springt aus der ganz einfachen Zusammensetzung und Trennung mehrerer Einheiten. Ihre Grundform ist wesentlich diese: Eins und Eins ist Zwei, und Eins von Zwei bleibt Eins. Auch ist jede Zahl, wie sie immer lautet, an sich selbst nichts anderes, als ein Verkürzungsmittel dieser wesentlichen Urform alles Zählens. Es ist aber wichtig, daß das Bewußtsein der Urform der Zahlenverhältnisse durch die Verkürzungsmittel der Rechenkunst selbst im menschlichen Geiste nicht geschwächt, sondern durch die Formen, in welchen diese Kunst gelehrt wird, mit großer Sorgfalt tief in denselben eingeprägt und aller Fortschritt dieser Kunst auf den fest erzielten Zweck des im menschlichen Geiste tief erhaltenen Bewußtseins der Realverhältnisse, die allem Rechnen zugrunde liegen, gebaut werde. Würde dieses nicht geschehen, so würde selbst das erste Mittel, zu deutlichen Begriffen zu gelangen, zu einem Spielwerke unseres Gedächtnisses und unserer Einbildungskraft erniedrigt und dadurch in seinem wesentlichen Zwecke kraftlos gemacht werden. Es kann nicht anders sein; wenn wir z. B. bloß auswendig lernen: drei und vier ist sieben und dann auf dieses Sieben bauen, als wenn wir wirklich wüßten, daß drei und vier sieben ist, so betrügen wir uns selbst; denn die innere Wahrheit dieses Sieben ist nicht in uns, indem wir uns des sinnlichen Hintergrundes, der ihr leeres Wort uns allein zur Wahrheit machen kann, nicht bewußt sind. Es ist in allen Fächern der menschlichen Erkenntnis die nämliche Sache."

Wir ersehen aus dem Vorstehenden, daß Pestalozzi nicht die Aneignung eines größeren Vorrats von Kenntnissen, sondern die Entwicklung der geistigen Kraft als Hauptsache betrachtet. Diese vorzüglich im Rechenunterricht zu bildende geistige Kraft wird imstande sein, sich das anzueignen, was die anderen Fächer menschlicher Erkenntnis, also das Leben, fordert. Somit erkennen wir, daß Anschauung die Grundlage und formale Bildung das Ziel des Pestalozzischen Rechenunterrichts ist.

Welches ist nun die Triebfeder zu diesen Bestrebungen? Die Not und das Elend der Kinder haben Pestalozzi zum Schulmann gemacht, und Not und Elend des Volkes will Pestalozzi durch seinen Rechenunterricht abstellen oder mindern. In „Lienhard und Gertrud" will er den Bauern begreiflich machen, daß sie sich freikaufen könnten, wenn sie sparsam wären und zurücklegten, und daß überhaupt die Rechenkunst das Volk wohlhabender und gesitteter mache. Er sagt dort: „Der Ammann, der Untervogt, der Kaufmann, der Gutsherr, der Landeigentümer — alle rechnen ihnen falsch, und das Volk wird dadurch zuerst gedrückt, dann ahnt es den Betrug und wird mißtrauisch und boshaft; nun betrügt es wieder und stiehlt zur Vergeltung, wo es weiß und kann. Ich kann aber nicht im ganzen Lande lauter geübte Rechner zu Dorfschulmeistern machen; ich muß also das ganze Rechnungswesen so vereinfachen, daß die Mutter oder der Schullehrer nur nötig haben, mein Buch unermüdet vorzusprechen und von den Kindern ebenso nachsprechen zu lassen, um diese mit der Zeit zur hellsten und klarsten Einsicht in die schwierigsten Rechnungen zu bringen." Soll der in diesem Satze angeführte Grund

wirklich ausschlaggebend gewesen sein, Pestalozzi zu dem dort ebenfalls angegebenen und so hart zu verurteilenden Lehrverfahren zu führen?

Pestalozzi ist nicht durch das, was er getan hat, sondern durch das, was er gewollt hat, der Reformator des Rechenunterrichts geworden; denn sein Lehrverfahren muß als eine methodische Verirrung bezeichnet werden, sowohl die ersten Versuche in Stanz und Burgdorf, als auch das spätere mit Hilfe von Krüsi und Buß verbesserte Verfahren.

Sein erster Rechenunterricht in Stanz und Burgdorf bestand darin, daß je zwei Schüler eine Papptafel erhielten, auf welcher sich Punkte innerhalb viereckiger Felder befanden. Diese Punkte wurden gezählt, addiert, multipliziert und dividiert. Es wurde nicht gefragt, sondern Pestalozzi sprach vor, und die Kinder sprachen nach. Aufgaben und Wiederholungen waren unbekannt.

Auf Grund dieser Versuche entwickelte sich ein anderes Verfahren, das von Krüsi, einem Schüler und späteren Gehilfen Pestalozzis, in den drei Heften „Anschauungslehre der Zahlenverhältnisse" (Zürich 1803) niedergelegt ist. Pestalozzi hat wahrscheinlich selbst die Vorrede zu den beiden ersten Heften geschrieben. Aus der Vorrede geht hervor, daß die Hefte einen Einführungskursus voraussetzen, der der Mutter des Kindes zugewiesen wird. In diesem Kursus soll das Kind nicht nur die ersten Zahlanschauungen gewinnen, sondern es soll auch durch den Abstraktionsprozeß zur reinen Zahl kommen. Die Mutter soll eine Anzahl Erbsen, Steine usw. zum Zählen auf den Tisch legen, beim Zeigen der Gegenstände aber nicht sagen: „Das ist Eins", sondern „das ist ein Stein, ein Blatt usw."; bei zwei Gegenständen soll sie nicht sagen: „Das ist 2 mal 1 oder 2, sondern das ist 2 mal 1 Blatt usw." So lehrt die Mutter verschiedene Gegenstände erkennen und benennen, hierbei bleiben die Wörter eins, zwei usw. unverändert stehen, während die Benennungen wechseln. „Durch dieses fortdauernde Bleiben des einen, sowie durch das fortdauernde Abändern des andern, sondert sich dann im Geist des Kindes der Abstraktionsbegriff der Zahl, das ist das bestimmte Bewußtsein der Verhältnisse von mehr oder minder, unabhängig von den Gegenständen, die als mehr oder minder dem Kinde vor die Augen gestellt werden."

Nach diesem Einführungskursus darf das Kind zu den eigentlichen „Kunst- und Schulmitteln der Anschauung" geführt werden. Das erste dieser Kunst- und Schulmittel ist die Einheitstabelle.

Die Einheitstabelle ist ein Rechteck, welches durch parallele Linien zu den Seiten in 10 Reihen mit zusammen 100 gleichen Rechtecken geteilt ist. Die oberste Reihe enthält in jedem Rechtecke einen senkrechten Strich, also im ganzen 10 Einer; in der 2. Reihe stehen in jedem Rechtecke je 2 senkrechte Striche, also 10 Zweier; in der 3. Reihe stehen 10 Dreier usw. An dieser Einheitstabelle wurde nun nach dem Prinzip der Anschauung und Lückenlosigkeit Krüsis 1. Heft, das sich auf 175 Seiten in 8 Übungen fast nur mit den geometrischen Verhältnissen der ganzen Zahlen von 1 bis 1000 befaßte, durcharbeitet. Der Schüler muß zuerst zur Orientierung Zählübungen vornehmen; dann lernt er die Einheiten jeder

Reihe als Vielfache der zugrunde gelegten Zahl darstellen; dann werden die Zweier in Dreier, diese in Vierer usw. verwandelt; die Vielfachen jeder Reihe werden in gleiche Teile geteilt; es werden überhaupt alle Zerlegungen der Zahlen, die auf geometrischem Verhältnis beruhen, aufgestellt und (im Chor) ausgesprochen. Bei diesen Übungen kommt weder das Addieren, noch das Subtrahieren, noch das eigentliche Dividieren vor, und doch muß das Kind bei der 8. Übung allein 2160 Sätze aussprechen, wie: 3 mal 1 ist 3 mal der halbe Teil von 2 mal 1, oder: 3 mal der 4. Teil von 4 und 5 mal der 6. Teil von 6 sind zusammen 8 mal der 7. Teil von 7 usw. Ob wohl das Kind, trotzdem es anschaute, was es auszusprechen genötigt wurde, wirklich deutliche Begriffe gewonnen hat?

Nach denselben Grundsätzen des Anschauungsprinzips und des Prinzips der Lückenlosigkeit wurden nach drei andern „Kunst- und Schulmitteln der Anschauung" die Bruchzahlen behandelt. Diese 3 Bruchtabellen sind die Strichtabelle und die beiden Quadrattabellen.

Die Strichtabelle zeigt 36 parallele, gleichlange aber verschieden eingeteilte Linienpaare. Jede Quadrattabelle enthält in 10 Reihen 100 gleichgroße Quadrate geteilt. Die Quadrate der obersten Reihe sind ungeteilt, die der 2. Reihe sind durch einen senkrechten Strich in 2 gleiche Teile geteilt u. s. f. bis zu den Quadraten der 10. Reihe, die durch 9 senkrechte Striche in 10 gleiche Teile geteilt sind. Die Quadrate der 2. Tafel sind zunächst ebenso geteilt wie die der 1. Tafel, außerdem aber sind die Quadrate in den senkrechten Reihen durch wagerechte Striche verschieden geteilt, nämlich die in der 1. Reihe nicht, die in der 2. Reihe in 2 Teile u. s. f. An diesen Tafeln veranschaulicht Pestalozzi alle Brüche mit den Nennern von 2—10 und den Produkten der Zahlen von 2—10.

Pestalozzi selbst schlug den Wert der Übungen, die man in der Anschauungslehre der Zahlen- und Maßverhältnisse an dem Quadrat vornehmen kann, so hoch an, daß er erklärte: „Wenn mein Leben einen Wert hat, so besteht er darin, daß ich das Quadrat zum Fundament einer Anschauung erhob, die das Volk nie hatte."

Die an diesen Tabellen vorzunehmenden Übungen finden wir im 2. und 3. Hefte der Krüsischen Anschauungslehre. Das 2. Heft war 251 und das 3. Heft 287 Seiten stark. Der Inhalt dieser Hefte ist außerordentlich reichhaltig. Allein die 3. Übung im 2. Hefte dehnt sich auf 152 Seiten aus, und zu ihrer vollständigen sprachlichen Darstellung sind 17280 Sätze erforderlich. Man kann an den Tafeln die Bruchlehre aufs anschaulichste darstellen und Aufgaben, wie 6 mal der 5. Teil vom 3. Teil von 45, wie oft 3 mal 2 mal der 4. Teil von 12, (Antwort: 1 mal 3 mal 2 mal der 4. Teil von 12) erschienen den darin geübten Kindern vielleicht nicht so schwierig und schwülstig, wie uns; anders ist es aber bei den zusammengesetzten Aufgaben. Türk teilt uns in seinen berühmten Briefen aus München-Buchsee eine Probe davon mit. Die gestellte Frage lautete: $6\frac{2}{5}$ sind 3 mal der 4. Teil von wievielmal 5 Ganzen und $\frac{3}{4}$ von einem Ganzen? Antwort: Von 1 mal 5 und $\frac{3}{4}$ Ganzen und 61 mal dem 115. Teil von $5\frac{3}{4}$ Ganzen. Die Auflösung aber, welche von den Kindern gefordert wurde, war: Ein Ganzes hat $\frac{5}{5}$; 6 Ganze haben

3 3; $\frac{3}{5}3$ sind 3 mal $\frac{1}{5}1$; 3 mal $\frac{1}{5}1$
sind $\frac{4}{5}4$; 5tel und 4tel
durch 4 senkrechte
e, so ent=
ausmacht);
nd $\frac{3}{4}$ haben
in der Zahl,
und $\frac{61}{115}$ mal
d 61 mal der

diese tausend und
en und daß jede
ehrers bewundern,
die Stimmung des
ftes geschrieben hat:

Pestalozzis bei diesen
vorweg in einer Selbst=
s gleichzeitige Vorführen
gen Tafel) dem Prinzip
n zum Verwickelten nicht
. geometrischen Vergleichung
se erschöpfende Auffassung
ute Reihenfolge von Zahlen=
die Stelle der Geistesbildung

el an angewandten Aufgaben
i dieser Mängel gehabt. Er
e: „So weit diese Übungen
raft in der Anschauung reiner
er Kraft auf die Berechnung
und des Wertes aller Gegenstände
sowie auf die Fertigkeit, das reine
mit Verkürzungsmitteln, Zahlzeichen,
e Übungen, die sich aber wesentlich an
gen müssen. Gegenwärtig werden
gen bei uns bearbeitet. Ich erwarte
m die Wirkung dieser Anwendung auf
r auf Berufsgegenstände sichtbar werden
erzeugt, daß dann auch diejenigen, die jede
ränkten Gesichtspunkte ihres Einflusses auf
r minder können und treiben, beurteilen, der
ahren lassen werden.“ Leider blieb es bei

hrverfahren (Vor= und Nachsprechen) ließ man
lage und Ziel aber behielt man bei. Das Ziel
ht erreicht werden. Der Unterricht aber führte

von vollendeten sinnlichen Anschauungen zu deutlichen Begriffen, er sollte „die Grundkräfte des menschlichen Geistes entfalten". Solche Grundkräfte sind die Kraft des Kennens (Geisteskraft), des Könnens (Kunstkraft) und des Wollens (Herzenskraft); diese wesentlichsten Kräfte des Menschen zu entwickeln, war also Ziel des Unterrichts. Der Pädagog Pestalozzi war mithin der erste, der den Unterricht in den Dienst der Erziehung stellte. Gerade vom Rechenunterricht erwartete er sehr viel; er erschien ihm zur Bildung der Geisteskräfte am geeignetsten, deshalb betrachtete er ihn als den „Mittelpunkt des gesamten Unterrichts".

8. Die Sturm- und Drangperiode des Rechenunterrichts im 19. Jahrhundert.

Lebhaft wogte der Streit über die weittragenden Ideen dieses genialen Mannes hin und her. Selbst Goethe*) sprach 1815, als er in Wiesbaden zum Besuch war, über „den Dünkel, den dieses verfluchte Erziehungswesen erzeugt", über „die Dreistigkeit der kleinen Buben, die vor keinem Menschen erschrecken, sondern ihn in Schrecken setzen." Hierzu der bekannte Goethesche Vers:

Das ist eine von den vielen Sünden;
Sie meinen: Rechnen, das sei ein Erfinden,
Und weil sie so viel Recht gehabt,
Sei ihr Unrecht mit Recht begabt;
Und weil ihre Wissenschaft exakt,
So sei keiner von ihnen vertrakt.

Raumer tadelt besonders die Dressur; der Lehrer habe weiter nichts zu tun, als das Lehrbuch pedantisch mit seinen Schülern durchzusprechen. Niemeyer bezweifelt, ob die erworbene Fertigkeit in den formalen Übungen sich auch auf die Dauer erhalten werde, und ob diese als allgemeines Bildungsmittel erachtet werden dürfe, weil Schüler, die an diesen Rechnungen besonderes Wohlgefallen erwiesen haben, leicht in anderen Dingen das schwächste Urteil zeigen. Hottinger sagt: „Das Schlimmste und Bedauerlichste ist, daß Pestalozzi den Geist seiner Erfindungen durch den ihm selbst so sehr verhaßten Buchstaben getötet hat, daß er seine Zöglinge zu allezeit fertigen Rechenknechten, steifen Schreibern und hölzernen Zeichnern bildet, die wie ewig Baugefangene die ganze unermeßliche und herrliche Natur wie durch das Gitter ihrer Quadrate beschauen usw."

Die Anhänger Pestalozzis aber waren begeistert „von der Herrlichkeit der neuen Methode", die den psychologischen Funktionen (auch im Rechnen) nachginge, die den wahren Elementarunterricht bedeute, die Konsequenz, Sicherheit und Bestimmtheit vereinige, die wahrhaft erziehend sei; von der Methode, die bewirke, daß der Rechenunterricht sich auf Anschauung gründe, daß er deutliche Begriffe und das eigene Nachdenken erzeuge und in organisch in einandergreifenden und mit der geistigen Entwicklung des Kindes übereinstimmenden Übungen fortschreite.

*) Nach Boisseré, Bd. 1, S. 259, abgedruckt im Südd. Schulboten 1870 N. 5.

Diese „Träger und Pfleger Pestalozzischer Ideen", wie Jänicke sie nennt, haben sämtlich im engen Anschluß an ihren Herrn und Meister die entschiedene Betonung des Anschauungsprinzips, die zu weit gehende Bevorzugung des formalen Bildungsprinzips und die dadurch bedingte Zurückdrängung des materialen Zwecks des Rechenunterrichts gemeinsam. Das Zahlenrechnen verdrängte das so lange Zeit bevorzugte Zifferrechnen fast ganz, und man verfiel in das entgegengesetzte Extrem, d. h. man vernachlässigte das schriftliche und das angewandte Rechnen.

Da ihnen die einförmigen tabellarischen Übungen nicht genügten, suchten sie neue Mittel zur Verwirklichung der neuen reformatorischen Ideen.

Schon im Jahre 1802 ließ Pöhlmann seine auf Pestalozzischen Ideen beruhenden Rechenbücher erscheinen. Aus ihnen dürfte hervorzuheben sein die Veranschaulichung der Bruchzahlen durch Stäbe, die Betonung des schriftlichen Rechnens und das Geschick, die Lehrstoffe elementar zu behandeln.

Der bedeutendste der unmittelbaren Pestalozzianer, d. i. derjenigen Männer, welche mit Pestalozzi in persönlichem Verkehr standen, und zugleich der größte Rechenmethodiker der älteren Pestalozzischen Schule, ist Dr. Ernst Tillich, Vorsteher einer Erziehungs- und Lehranstalt zu Dessau. Tillich, von Pestalozzi angeregt, aber mit seinen Elementarbüchern nicht zufrieden, übergab dem Büchermarkte i. J. 1806 sein: „Allgemeines Lehrbuch der Arithmetik oder Anleitung zur Rechenkunst für jedermann". In der Vorrede sagt Tillich: „Dieses Handbuch, welches anspruchslos in die Reihe verschwisterter Werke tritt, hat sich zum Ziel gesetzt, denkend rechnen und rechnend denken zu lehren." Tillichs Buch zerfällt in drei Teile. Der erste Teil gibt die „Anleitung zum natürlichen oder Kopfrechnen nach kombinatorischen Grundsätzen", der zweite Teil enthält die „Anleitung zum schriftlichen Rechnen" und der dritte Teil die „Methodenlehre".

Tillichs Bücher fanden bei den Zeitgenossen nicht die Aufnahme, die sie verdienten; erst am Ende des Jahrhunderts haben Schüler des akademisch pädagogischen Seminars von Stoy in Jena (Göpfert, Bräutigam u. a.) wieder auf diese ausgezeichneten Arbeiten hingewiesen.

Tillich ist in seinen Darlegungen durchaus selbständig. So betont er die Unmöglichkeit, bei größeren Zahlen sich jeder einzelnen bewußt zu werden und kommt hierbei naturgemäß auf die Zahlenordnung. Zuerst von allen Rechenmethodikern hebt er die Bedeutung der allseitigen Behandlung des ersten Zehners hervor. Der Schüler soll die Regeln an einfachen Zahlen finden und dann erst auf größere übertragen. Als Grundübung stellt Tillich das Zählen hin und zwar das Zählen an Gegenständen, die nicht durch besondere Eigenschaften zerstreuen.

An die Denkkraft der Kinder stellt er in dem ersten Teile seines Buches nicht geringe Anforderungen. So gibt er z. B., wie Jänicke sagt, den jungen Rechenschülern folgende Kopfrechenaufgabe: „Von fünf unbekannten (?) Zahlen beträgt die dritte 80. Die erste ist 20 weniger als die zweite, und diese beträgt 50 mehr als die fünfte, welche 12 weniger als die vierte ist. Die vierte endlich ist 5 mehr als die dritte. Welches sind die unbekannten Zahlen und ihre Summe?

Auflösung: Da die dritte Zahl bekannt ist, so muß diejenige Zahl, welche mit ihr verglichen wird, zunächst beachtet werden. Diese Zahl ist hier die vierte, welche 5 mehr beträgt als die dritte und folglich 85 sein muß. Die fünfte ist 12 weniger als die vierte, folglich usw."

Zur Behandlung des Zahlenkreises bis 10 hat Tillich seinen Rechenkasten konstruiert, den er also beschreibt: „Diese einfache Rechenmaschine besteht aus 100 verschiedenen Stäben für alle einfachen Zahlen von 1—10. Jeder einfachen Zahl gehören 10 Stäbe. Die Einer, von denen des öfteren Gebrauchs wegen gewöhnlich 20 bis 30 vorhanden sind, sind Würfel von der Größe eines Zolls. Alle übrigen Zahlen sind nach dem Verhältnisse der Mehrheit länger. Die Zwei hat also die Länge von 2, die Drei von 3 Zollen; die Breite und Dicke bleibt aber nur 1 Zoll. All diese Stäbe befinden sich in einem Kasten mit 10 Fächern, wovon ein jedes die 10 Stäbe enthält, welche zu einer Zahl gehören. Natürlich richtet sich die Größe eines Faches nach der Länge der Stäbe."

Die Beurteilung dieses Tillichschen Rechenkastens ist eine sehr verschiedene. So nennt Prof. Dr. Stoy die Arbeit Tillichs „das Muster eines mit psychologischer Gewissenhaftigkeit und Feinheit angelegten Lehrganges. Sein Rechenkasten mit den Einheitswürfeln und den die mehrmalige Wiederholung der Einheit darstellenden und so die geordnete Bildung der Zahlenreihen erzeugenden Zahlstäben entwickeln in der Hand eines pünktlichen Lehrers eine solche Gewalt, daß selbst zurückgebliebene und durch die Schuld eines mangelhaften Elementarunterrichts unklar und unsicher gewordene Schüler geheilt und in ein gesundes Wachstum versetzt werden können." Dr. Dittes ist hierüber anderer Ansicht. Er sagt: „Dieser Apparat kann offenbar gute Dienste leisten, hat aber den Fehler, daß er die Zahl durch die Größe darstellt, was offenbar der reinen Zahlanschauung Eintrag tut; denn wenn auch ein Körper z. B. 6mal so groß ist, wie der als Einheit angenommene Würfel, so ist dennoch jener Körper nur einer, also kein unmittelbares Bild jener Sechs."

Schmid, Pestalozzis langjähriger Mitarbeiter, gab 1810 „Die Elemente der Zahl als Fundament der Algebra nach Pestalozzischen Grundsätzen" heraus. Mit hochtönenden Redensarten empfahl er das Buch, das, weil Schmid in Isferten wirkte und Isferten „als eine Art pädagogische Prophetenschule" angesehen wurde, zunächst ungleich größeres Aufsehen erregte als das Tillichsche Buch. Doch sagt Prof. Lindner, der Herausgeber der 2. Auflage von Tillichs Lehrbuch, daß die Bearbeitung von Schmids Elementen überflüssig gewesen sei, da sie nichts Neues enthalte und Tillichs Lehrbuch in wissenschaftlicher und pädagogischer Bedeutung nicht erreiche. Dies harte Urteil muß gerechtfertigt sein; denn man stellte selbst in Pestalozzis Institut den Unterricht nach Schmids Elementen ein und kehrte zu der Anschauungslehre von Krüsi zurück.

Größeren Anklang als Schmids „Elemente der Zahl" fand die im Jahre 1813 von M. C. G. Rebs, Kantor in Zeitz, herausgegebene „Praktische Anleitung zum Rechnen nach Pestalozzis Lehrart für Schullehrer, Seminaristen und alle, die diese Methode näher kennen lernen

wollen". Dieses Buch hat Pestalozzis Geist besonders in Mitteldeutschland verbreitet. Nebs steht auf Pestalozzischem Boden, doch vermeidet er die einseitigen, ermüdenden Reihen und fügt eine Sammlung von praktischen Textaufgaben bei.

Als entschiedener Anhänger Pestalozzi's zeigt sich auch der preußische Reg.- und Schulrat v. Türk in seinem „Leitfaden zur zweckmäßigen Behandlung des Unterrichts im Rechnen für Landschulen und für die Elementarschulen in den Städten" (1816). Türk charakterisiert seinen Pestalozzischen Standpunkt selbst, wenn er sagt: „Mir erscheint die Fertigkeit im Rechnen durchaus nur als Nebensache . . . Hauptsache aber ist die Übung im Denken, die Entwicklung und Stärkung des Denkvermögens. Es gibt Millionen von Menschen, die das Rechnen füglich entbehren können. Es gibt keinen einzigen, der das Denken entbehren kann." An anderer Stelle gibt er aber zu erkennen, daß über dem formalen Zweck der materiale nicht vernachlässigt werden darf; er sagt nämlich: „Die jungen Leute sollen rechnen lernen, weil sie im gemeinen Leben der Rechenfertigkeit bedürfen." Deshalb gibt er angewandte Aufgaben, die er nicht nach ihrer Form, sondern nach ihrem Inhalt ordnet, so daß er als einer der ersten Vorläufer des Sachrechnens zu betrachten sein dürfte. — Die Bedürfnisse der Volksschule hat Türk unter allen Verbreitern der Pestalozzischen Ideen am richtigsten erfaßt, das zeigt sich in seinem Buche in dem Ausscheiden alles Unwesentlichen, in der bestimmten Ausdrucksweise und in dem streng methodischen Gang.

Kawerau, Oberlehrer am Seminar in Bunzlau (später Schulrat in Köslin) gab 1818 den „Leitfaden für den Unterricht im Rechnen nach Pestalozzischen Grundsätzen" heraus und widmete ihn seinem Lehrer „Herrn Heinrich Pestalozzi". Dieser Leitfaden ist ein Anleitung für Seminaristen und Lehrer; seine Bedeutung liegt mit darin, daß er, wie Jänicke sagt: „den Anbruch der neuen Phase der Geschichte des Rechenunterrichts signalisiert". Er vermeidet die geisttötenden Reihen, die steifen Formen des sprachlichen Ausdrucks und die einseitige Betonung des formalen Zieles; dagegen erstrebt er bei aller methodischen Strenge des Verfahrens eine freie Beweglichkeit, Selbsttätigkeit und Selbständigkeit der Schulen und eine Berücksichtigung der Bedürfnisse des praktischen Lebens. Doch löst sich auch das schriftliche Rechnen bei Kawerau nicht aus den Banden des Mechanismus, das sehen wir an den von ihm empfohlenen Proportionen und an der Kettenregel.

Nie zuvor hat der Rechenunterricht in der Volksschule so gewichtige Anregungen empfangen, als in den 12 Jahren von der ersten Herausgabe des Tillichschen Rechenbuches bis zum Erscheinen des Leitfadens von Kawerau. Gewaltig war die Bewegung bei den deutschen Lehrern und bei vielen anderen sich für die Volksschule interessierenden Personen, und es ist selbstverständlich, daß sich den unbedingten Anhängern Pestalozzis eine Richtung entgegenstellte, die zwar den Geist und das Anschauungsprinzip der Pestalozzischen Methode beibehalten wollte, aber das einseitige Formalprinzip und das unzweckmäßige Lehrverfahren verwarf, die also den Pestalozzischen Weg durch Aufnahme des Bewährten in dem alten Rechen-

verfahren bürgerlich gangbar zu machen suchte. Die Hauptvertreter dieser Richtung sind Hoffmann, Stephani, Graser, Dinter, Zerrenner, u a.

Zuerst machte sich dieser scharfe Gegensatz zu den einseitigen Pestalozzischen Ideen bemerklich in dem vom Pfarrer Hoffmann in Weilimdorf bei Stuttgart 1815 herausgegebenen „Lehrbuch der Arithmetik für Schüler zum Selbstunterricht". Hoffmann hatte sich schon 1810 als ein gründlicher Kenner der Pestalozzischen Lehrweise bewiesen, als er eine eingehende Beurteilung der Pestalozzischen Anschauungslehre und der Schmidschen Elemente der Zahl schrieb. In seinen beiden Schriften verurteilt er das einseitige Formalprinzip, und verneint sogar den Einfluß des bekannten Lehrverfahrens auf die Denkkraft, außer für die allereinfachsten logischen Gesetze („logischer Mechanismus"); er vermeidet die bei Schmid vorkommenden „sprachlichen Verschrobenheiten und Dunkelheiten, hohen und hohlen Redensarten" und läßt dem Kopfrechnen in ausgedehntem Maße das Zifferrechnen mit Proportionen und Reesischem Satze folgen.

Der bayerische Kreisschulrat Dr. H. Stephani gab 1815 eine „Ausführliche Anweisung zum Rechenunterricht in Volksschulen nach der bildenden Methode" heraus. Er wendet sich gegen die toten Gedächtnisübungen, überhaupt gegen das Neue und will das vorhandene Alte verbessern und vollenden. Die Schüler sollen die Rechenkunst finden, wie sie vor uns im menschlichen Geiste gefunden worden ist usw. — In der Gruppierung des Stoffes ist kein Fortschritt zu bemerken und auch sonst ist das Neue, was Stephani brachte, wertlos und entbehrlich, mitunter beinahe lächerlich. Zur „Ausfüllung der einzigen kleinen Lücke, um unserem bisherigen alten System der Rechenkunst seine Vollendung zu geben", führte er eine neue Grundrechnungsart, das Ponderiren (Zerlegen der Zahlen in Summanden und Faktoren) ein; er nannte die Null den „Keiner", die Brüche „Teilzahlen", weil es unschicklich sei, „ein Wort in Schulen zu gebrauchen, welches zur Bezeichnung eines Leibesschadens verwendet wird, von dem man nicht gern öffentlich spricht;" er übte beim Dividieren fast nur das Messen usw. Sein Rechenunterricht zerfällt in drei Kurse: „Zahlenrechnen", d. h. Kopfrechnen; „Zifferrechnen", d. h. Tafelrechnen; „die bürgerliche Rechenkunst", d. h. Anwendung. In diesem 3. Kursus gibt Stephani eine große Fülle guter, angewandter Aufgaben aus verschieden Unterrichtsfächern und aus dem Geschäftsverkehr. Da er nun hier auch betont, daß der Rechenunterricht ein Teil des Gesamtunterrichts sein soll und den Sachunterricht zu berücksichtigen habe, kann man über die oben gerügten Schwächen milder urteilen.

Schärfer und nachhaltiger als Stephani betont Graser die Bildung der Kinder fürs Leben. Er gehört zu den ersten deutschen Pädagogen, die eine wissenschaftliche Darstellung der Erziehung und des Unterrichts versuchten. Dem Empiriker Pestalozzi war der hochgebildete Philosoph Graser an Wissen, Klarheit des Urteils und gewandter Redeweise weit überlegen. Er unterscheidet ebenfalls drei Bildungsmittelpunkte, nämlich Natur,

Mensch und Gott, und hierin zeigt sich schon der höhere Standpunkt Grasers. Die Schule soll Erziehungsanstalt werden usw. usw. Es ist hier nicht der Ort, Grasers Verdienste um die Pädagogik im allgemeinen darzulegen, sondern wir wollen nur versuchen, Grasers Verdienste um den Rechenunterricht kennen zu lernen.

Graser hat kein Rechenbuch geschrieben, aber er stellt eigenartige Prinzipien auch für das Lehrverfahren im Rechnen auf. Aller Unterricht muß vom Leben aus- und auf dasselbe zurückgehen; also wird im Rechnen die Aneignung von Namen, Zahlen und Formen zwar ein Wissen erzeugen, wahrhaft bildend aber wird nur die Auffassung der Dinge in ihren vielgestaltigen Verhältnissen zum Leben sein. — Eine bloße formale Übung im Rechnen ist für die Elementarschulen von geringem Nutzen. Der Stoff ist aus dem Gesamtunterrichtsgebiete aufzusuchen; Bohnen, Marken, Striche u. dgl. sind unnütze Mittel des ersten Unterrichts. Es soll ein Typus alles Rechnens angenommen werden; dieser liegt im Zahlenkreise von 1 bis 10. — Die Hauptrechenkunst muß im Kopfe sein, sie übt das innere Anschauungsvermögen mehr und nimmt zugleich das Denkvermögen in Anspruch. — Das Kopfrechnen ist so weit zu betreiben, bis das Anschreiben der Zahlen, ihrer großen Vielheit wegen, dringendes Bedürfnis wird.

Eine Konsequenz der Graserschen Ansicht ist die Verbindung des Rechnens mit dem ersten Sach- und Sprachunterrichte. Graser macht das Wohnhaus zur Grundlage seines Unterrichts und bei diesem ist es das Fenster mit 10 Scheiben, das Graser als typisches Veranschaulichungsmittel verwertet. Man sieht auch hier wieder, wie leicht man bei zwangsweiser Verbindung vom richtigen Wege abweicht; denn ein Fenster mit 10 Scheiben ist wohl selten vorhanden, gezeichnet aber bietet es die Mängel der Pestalozzischen Tabellen.

Graser gleicht also Pestalozzi darin, daß er den Rechenunterricht auch als Erziehungsmittel aufgefaßt haben will; sein Bildungsziel ist aber nicht das formale, sondern das materiale Prinzip; er dürfte deshalb als der Hauptvertreter des Materialprinzips gelten.

Früher als Graser fordert schon Dinter 1806 in seinen „Vorzüglichsten Regeln der Pädagogik, Methodik und Schulmeisterklugheit", daß das Rechnen „teils als Bildungsmittel der Kraft, teils als Fertigkeit fürs Leben" angesehen werde. An anderer Stelle sagt er: „Was über die Rechnungen des alltäglichen Lebens, der Haushaltung, der Ökonomie hinausgeht, gehört nicht in die öffentliche Bürger- und Landschule, sondern in Privatstunden." Er hat eine „Anweisung zum Rechnen" für sächsische Dorfschulen und preußische Schulen und auch „Rechenaufgaben" herausgegeben.

Zerrenner schließt sich eng an Stephani an. In seinem „Methodenbuch" bezeichnet er das Rechnen als einen notwendigen Teil des Volksschulunterrichts, weil es die Geisteskräfte übt und in allen Verhältnissen des Lebens höchst nötig gebraucht wird. Er fordert die Kenntnis von Münzen, Maßen und Gewichten, Aufgaben aus der Sphäre der Jugend u. a. m.

Es dürfte hier die Stelle sein, einiger Rechenmethodiker zu gedenken,

die unbeeinflußt von dem Geiste Pestalozzis ebenfalls den Kampf aufnahmen gegen die durch die Peschechschen Rechenbüchern noch immer verbreitete alte Lehrweise. Diese Methodiker arbeiteten im 19. Jahrhundert im Sinne von Overberg und Rochow und gelangten früher zu einem ersprießlichen Rechenunterricht als die Pestalozzianer und ihre Gegner. — Besonders war man in einem großen Teile Süddeutschlands der Pestalozzischen Art nicht gefolgt, sondern hatte versucht, im Sinne Rochows sich einerseits vom Mechanismus frei zu machen, ohne auf der anderen Seite der Pestalozzischen Kraftbildung an der abstrakten Zahl zu viel Übergewicht einzuräumen. Der Hauptvertreter dieser Richtung ist **Bartholomäus Bacher**, Pfarrer in Ruhpolding in Bayern, dessen theoretisch-praktisches Hand- und Methodenbuch für Volksschullehrer (1806) in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts in fast allen Schulen Bayerns gebraucht wurde.

Seinen Standpunkt zur Pestalozzischen Methode kennzeichnet der Verfasser in der Vorrede zu der 2. Auflage (1814) in folgendem: „Denen, welche es an diesem Buche etwa tadelnswert finden möchten, daß ich in dasselbe nichts von der in den neuesten Zeiten bekannt gewordenen Pestalozzischen Lehrmethode aufgenommen habe, diene zur Antwort: Ich hielt dies für unnötig, weil dieselbe zu vieles Eigentümliche an sich hat, als daß ich etwas allgemein Belehrendes und für unsere Volksschulen Anwendbares darüber hätte sagen können.“ In diesem Buche finden wir die Grundsätze der Anschaulichkeit, Stufenmäßigkeit und Gründlichkeit in schlichten Worten ausgedrückt und mit ansehnlichem Geschick praktisch betätigt. Grundgedanken dieses Hand- und Methodenbuches sind: Das Rechnen ist für jedermann notwendig, doch ist keine große Rechenkunst zu üben; als Rechenstoff wird genügen 1. die vier sogenannten kleinen Rechnungsarten, 2. die Behandlung der Brüche, 3. die Regeldetri. Der sinnlichen Anschauung folgt die Abstraktion; mündliches und schriftliches Rechnen werden getrennt behandelt, korrespondieren aber mit einander; bei dem Kopfrechnen wird das Zahlenzerlegen angewendet; das Zehnersystem ist die Grundlage aller Rechenkenntnis; die Stufenfolge der Übungen entspricht dem Grundsatz vom Leichten zum Schweren; die Aufgaben sind dem Gesichts- und Erfahrungskreise der Kinder zu entnehmen usw. Wir finden hierin alles Wesentliche des modernen Rechenunterrichts vorgebildet.

Im Sinne Bachers wirken noch **Windorf** in Saalfeld (1810), **Pfrändel** in München (1812), **Schön** in Würzburg (1812) u. a.

So wogte der Streit am Schluß des 2. Jahrzehnts des 19. Jahrhunderts hin und her.

Kampfobjekte waren: Kraftbildung an der abstrakten Zahl und Ausbildung fürs Leben an konkreten Fällen; Trennung von reinem und angewandtem Rechnen oder nicht; der dezimale Fortschritt; die Anschauungsmittel und ihre Verwertung im Unterrichte; die Rechenstufen; Verhältnis zwischen Kopf- und Tafelrechnen; Beginn und Ausdehnung der Bruchrechnung; Kunstgriffe und Lösungsformen u. a. m.; fürwahr, wirklich eine Sturm- und Drangperiode.

9. Ausgleich der Gegensätze und Ausbau der Rechenmethode.

Lindner, der schon erwähnte Herausgeber der 2. Auflage des Tillichschen Rechenwerks, versuchte einen Ausgleich der hart aufeinander treffenden Gegensätze, indem er eine Durchdringung der gegenüberstehenden Ansichten empfahl. Ein Erfolg seiner Bemühungen war ausgeschlossen, da er nicht zeigte, wie diese Durchdringung zu bewerkstelligen sei. So blieb es dem Führer der damaligen „preußisch-pestalozzischen Schule", dem bekannten Weißenfelser Seminardirektor Harnisch, vorbehalten, „der Methodik des Rechenunterrichts diejenigen Bahnen anzuweisen, die sie in vielen Stücken bis auf den heutigen Tag nicht wieder verlassen hat".

Über sein Verhältnis zu den strengen Pestalozzianern gibt er in seiner nachgelassenen Schrift „Mein Lebensmorgen" Aufschluß. Er schreibt folgende herrliche Worte: „Auf die Frage, ob ich ein Pestalozzianer sei, kann ich mit einem ebenso entschiedenen Ja als mit einem ebenso entschiedenen Nein antworten. Ich antworte nein, sobald man meint, ein Pestalozzianer sei der, welcher Niederersche Philosopheme vergöttert, Pestalozzische Zahlen- und Maßverhältnisse oder Joseph Schmidsche Linienzusammenstellungen lange angebetet und das Heil der Zukunft von Pestalozzischen Formen und Formeln erwartet hat. Ich antworte ja, wenn man unter einem Pestalozzianer einen Schulmann versteht, der weder im Gedächtniswerk, noch in den gegenstandslosen Verstandesübungen, sondern in der allseitigen Ausbildung des ganzen Menschen das Ziel der Pestalozzischen Bestrebungen und in der Liebe das Mittel findet, um sie zu erreichen."

Harnisch hatte als Lehrer an dem berühmten Plamannschen Lehr- und Erziehungsinstitut die Übertreibungen und Einseitigkeiten der Pestalozzischen Art kennen gelernt und eine freiere Auffassung der Pestalozzischen Gedanken und Ideen anzubahnen versucht. Aber erst in Breslau, als erster Lehrer am dortigen Seminar, führte er diese freiere Auffassung in der methodologischen Bearbeitung aller Fächer des elementaren Unterrichts durch. So erschien auch sein „Leitfaden bei dem Rechenunterricht". Obwohl dieser Leitfaden Anklänge an Tillich aufweist, ordnet doch Harnisch mehr als Tillich den Mathematiker dem Pädagogen unter und faßt die Bedürfnisse der Volksschule schärfer ins Auge. Er lenkte die von Pestalozzi ausgegangene gewaltige Aufregung in ruhigere Bahnen durch eine Reihe von Sätzen, die bis zum heutigen Tage gelten, und die er nicht nur aufgestellt, sondern deren Verwirklichung im Unterricht er auch versucht hat. Jänicke bezeichnet als solche Sätze: a) Auch das Rechnen hat die harmonische Ausbildung aller geistigen Kräfte und zugleich der Geschicklichkeit fürs praktische Leben als Ziel. b) Der Schüler soll mit Einsicht nud Bewußtsein rechnen, soweit es seine Kraft gestattet und zugleich Fertigkeit, Schnelligkeit und Sicherheit im Rechnen besitzen. c) Tafelrechnen und Kopfrechnen sind in gegenseitiger Verbindung und Unterstützung zu lehren. d) Die Brüche müssen möglichst früh auftreten, und alle Spielereien mit denselben sind zu vermeiden. e) Der Stufengang im Rechnen richtet sich überhaupt nach der Zehnerordnung. f) Reines und angewandtes Rechnen darf nie

getrennt werden. g) Die Kräfte, die beim Rechnen in Anspruch genommen werden müssen, sind Anschauung und Gedächtnis; das Kind muß die Zahlen und ihre Veränderungen an sinnlichen Gegenständen wirklich sehen und das Angeschaute im Gedächtnis bewahren. h) Die Schüler dürfen nicht zu lange am Sinnlichen gefesselt werden. i) Die Schüler müssen stets in vollständigem Satze antworten. k) Sie sollen veranlaßt werden, selbst Aufgaben zu stellen. l) Die angewandten Aufgaben müssen ihren Stoff vorherrschend dem rechnenden Leben entlehnen.

Von Harnisch angeregt, schrieben im Anschluß an den oben genannten Leitfaden zuerst Mücke und später Scholz ihre Anweisungen zum Kopf- und Zifferrechnen. Mückes Buch war nicht den Grundsätzen völlig entsprechend; es war ein Mittelwesen zwischen „dem guten Alten und dem brauchbaren Neuen“. Das Buch von Scholz dagegen erwarb sich großen Beifall und ist oft wieder aufgelegt, umgearbeitet und verbessert worden. Zu seiner allmählichen Vervollkommnung trugen namentlich die Ausstellungen, welche Diesterweg und Hentschel zu machen hatten, viel bei. Seit der 4. Auflage (1836) führt es den Titel: „Praktischer Rechenlehrer oder Anweisung im Rechnen“. Jänicke faßt die Bedeutung von Harnisch in folgenden Sätzen zusammen. „Aus Harnisch' erster Aussaat, befruchtet von Pestalozzis Ideen, erwuchs hundertfältige Frucht, und noch heute steht die rationelle Rechenmethode auf den von ihm aufgestellten unanfechtbaren Prinzip: den Rechenstoff in eine Reihe organisch zusammenhängender und seinem eigenen Wesen entsprechender Übungen zu zerlegen, die mit den Entwicklungsstufen des menschlichen Geistes gleichen Schritt halten und so dem Schüler nicht nur eine naturgemäß forschreitende Verstandesübung, sondern auch die für das spätere Leben notwendige Kenntnis und Fertigkeit im Zahlenwesen gewähren.“

Zur Pflege der aufgehenden Saat fanden sich bald tüchtige und willige Helfer. Seit dem Jahre 1820 mehren sich die Rechenbücher, welche eine Verbindung des guten Alten mit dem besseren Neuen herbeizuführen suchen. Wir nennen die Rechenbücher von Kopf (1822), Kranke (1823), Denzel (1828), Diesterweg und Heuser (1829), Stern (1832), Unger (1841), Hentschel (1842), Stubba (1846).

Kopf, Seminarlehrer in Neuzelle, will in seiner „Anweisung zum Rechnen nach naturgemäßen Grundsätzen“ solchen Lehrern Handbietung leisten, welche von der Haltlosigkeit der alten Methode überzeugt, etwas Besseres suchen, aber sich in den Schriften der Neuerer nicht zurecht finden können. Er sagt z. B.: „Das Stürmen der Neuerer hat die älteren Schullehrer erschreckt; die unseligen Floskeln, mit welchen manche Bücher prunken, hat vielen Lehrern, die fortschreiten möchten, die neue Methode abscheulich gemacht.“ Wir finden aber eine zu starke Neigung zur Konservierung des „guten Alten“ und ein widerwärtiges Streben zu moralisierenden erbaulichen Ansprachen.

Bedeutender sind die Rechenbücher des Schulinspektors Kranke in Hannover, die sich zum Teil bis in die Gegenwart erhalten haben. Krankes ücher sind Anleitungen und Exempelbücher für die verschiedensten Schulen. eine Methode begründet er durch den Zweck des Rechenunterrichts. Kranke

sagt: Jeder Unterricht hat einen doppelten Zweck. Es soll 1. der Schüler durch denselben gewisse Kenntnisse oder Fertigkeiten, die entweder jedem Menschen oder doch dem Lernenden in seinen Verhältnissen nötig, nützlich oder angenehm sind, erlangen; und es sollen 2. durch den Unterricht die Kräfte des Schülers angeregt, geübt und so entwickelt werden, daß er dieselben in seinem künftigen Berufe auch zu anderen Absichten zu gebrauchen vermöge . . . Wird dies auf den Rechenunterricht angewendet, so ergibt sich: Es soll der Lernende durch diesen Unterricht in den Stand gesetzt werden, die in seinem künftigen Berufe vorkommenden arithmetischen Aufgaben richtig aufzulösen, mit Sicherheit und schnell zu rechnen und die begriffenen und eingeübten Regeln auf wirkliche in seinem Berufskreise vorkommenden Fälle anzuwenden wissen. Es soll aber der Rechenunterricht auch als wirksames Mittel zur Entwicklung der Geisteskräfte dienen; denn gründliches Rechnen gewöhnt an ernste Arbeit und nimmt die Aufmerksamkeit in Zucht; indem es den Schüler zwingt, aus einer Aufgabe das Wesentliche auszuscheiden und von den Nebensachen zu trennen, übt es ihn im planmäßigen und klaren Denken; endlich gibt es Veranlassung zu einem bestimmten und deutlichen Ausdruck der Gedanken." Von der Methode des Rechenunterrichts sagt Kranke: „Sie begreift dreierlei in sich: 1. daß der Lehrer das Ziel deutlich vor sich sehe, zu welchem er den Zögling überhaupt und gerade jetzt führen möchte; 2. daß er feste Grundsätze habe und sich daraus bestimmte Regeln ableite, wie das Kind zu diesem Ziele zu führen sei; 3. daß er diese allgemeinen Regeln auf den Schüler, den er gerade jetzt vor sich hat, anzuwenden wisse."

Der Lernende soll in den Stand gesetzt werden, die Aufgaben richtig und schnell zu rechnen und die begriffenen und eingeübten Regeln auf alle in seinem Berufskreise vorkommenden Fälle anzuwenden; die angewandten Aufgaben sollen in kleine Erzählungen gekleidet werden, der Schüler hat dann „in jedem einzelnen Falle die Verfahrungsweise selbst zu erfinden". . . „Der Lehrer schafft das Bedürfnis der Erfindung, der Schüler erfindet." Jänicke sagt von dieser Erfindungsmethode, sie sei nichts anderes, „als eine voluminöse Interpretation des Grundsatzes: Die Rechenregeln sollen nicht gegeben, sondern aus Anschauung und Übung entwickelt werden!" Kranke ist ein unterrichteter, vielseitiger und gründlicher Methodiker; er begründet sein Lehrverfahren ausführlich und paßt das Rechnen den tatsächlichen Verhältnissen der Volksschule und ihrer beschränkten Leistungsfähigkeit an. — Das Rechnen mit Punkten in seiner Rechenfibel ist wohl am meisten anzufechten, und geradezu verkehrt ist es, zwischen „anschauliche Darstellungen" arithmetische Operationszeichen zu setzen.

Denzel, der weit über seine engere Heimat Württemberg hinaus gefeierte Rechenmeister, steht nach Plan und Ausführung seines Lehrganges zwischen den reinen Pestalozzianern und den Methodikern älteren Datums. Bei der Unmöglichkeit, alle die Rechengänge und Rechenbücher genau zu charakterisieren, will ich hier nur erwähnen, daß er im schriftlichen Rechnen die Schlußrechnung, dann aber auch die Proportion und den

Reesischen Ansatz empfahl und daß er als Veranschaulichungsmittel eine Leiter mit verschiedenen Stufen, Sprossen und Absätzen benutzte.

Als einer der hervorragendsten Rechenmethodiker des 19. Jahrhunderts gilt Diesterweg. Seine Ansichten über den Rechenunterricht sind teils in seinem „Methodischen Handbuch“, teils im „Wegweiser“ enthalten. Es ist Pestalozzisches Gold in deutscher Fassung, was Diesterweg bietet, aber keiner der deutschen Pädagogen hat die Ideen Pestalozzis so klar und fest, so scharf und plastisch ausgesprochen und so psychologisch begründet wie Diesterweg. Hier können nur einige der Hauptsätze Diesterwegs angeführt werden. „Bei der Begriffsbildung suchen wir die Einheit, unter welche die Gegenstände zu fassen sind, bei der Zahlbildung dagegen setzen wir eine Einheit und suchen die Mehrheit. Dort steigen wir von der gegebenen Vielheit zur Einheit auf; hier bestimmen wir die Mehrheit der Einheiten, welchen dasselbe Merkmal, das als Grundeinheit gilt, zukommt. Das Zählen der Dinge besteht daher in der Angabe, wieviele Dinge einer Art vorhanden sind, oder in gewöhnlichem Sprachausdrucke: Zählen heißt die Menge der gleichartigen Dinge einer Art angeben. Ein jedes Ding bildet für sich eine Einheit. Diese Vorstellung der Einheit entsteht aber nur im Verhältnis zu einer Mehrheit oder Vielheit. Einheit und Mehrheit werden immer zusammengedacht oder stehen in notwendiger Beziehung zu einander. Die eine Vorstellung ist nicht wie die andere; mit der einen ist die andere gesetzt oder gegeben . . . Die Einheiten sind konkrete Merkmale, weil sie an den einzelnen Dingen haften, oder von ihnen abstrahierte Merkmale, also immer doch konkret-abstrakt, niemals rein-abstrakt. Diese Merkmale geben den Namen der Zahl her, z. B. zehn Bäume = zehnmal ein Baum. Abstrahiert man aber auch von diesem Namen, so bleibt die abstrakte Vorstellung der Eins übrig. Die Eins ist daher die abstrakte Einheit. Rechnen heißt: aus gegebenen Zahlgrößen — durch dieselben und ihr Verhältnis — andere finden. Beim Rechnen hat man es mit den Vorstellungen von der Menge gleichartiger Dinge zu tun; es ist daher ein geistiger Akt und zwar die Erzeugung neuer Zahlvorstellungen aus gegebenen. Es geschieht nicht durch Einfälle, sondern durch gewolltes, absichtliches Denken. Dieses Rechnen in der bloßen Vorstellung, ohne den Gebrauch äußerer Mittel oder Zeichen, ist das Kopfrechnen. Gebraucht man zugleich Ziffern, so nennt man das Rechnen Zifferrechnen. Beides soll Denkrechnen sein. Es gibt also dem Wesen nach nur eine Art des Rechnens . . . Alle Aufgaben werden durch Denken, nicht durch Ziffern gelöst . . . Es gibt nur eine Rechenmethode, welches diejenige ist, die zugleich der Natur des zu entwickelnden Geistes, namentlich die durch den Rechenstoff zu bildenden Anlagen und dem Wesen des Materials entspricht . . . Deshalb darf die Methode nicht dem Belieben überlassen werden . . . Hauptgrundsatz für den elementaren Rechenunterricht, wie für jeden Zweig des Elementarunterrichts ist die Anschaulichkeit. Dieser Grundsatz besagt nicht nur, daß die ersten Zahlvorstellungen aus sinnlicher (innerer, durch äußere Mittel veranlaßter) Anschauung gewonnen, sondern daß alle Operationen auf ursprünglich rein anschauliche

Erkenntnis zurückgeführt werden sollen, und er verwirft alle an die Spitze gestellten allgemeinen Begriffe, alles Regelwerk, jede Vorschrift, alles Gegebene und Positive. Der Schüler soll die Operationen unter Leitung selbst finden und sich zum allgemeinen, wo und wie es not tut, hinaufschwingen, damit er im Gebiete der Regeln und Begriffe überall auf dem festen Boden der Anschauung stehe . . . Wir verbinden überall mit der Einsicht die Übung, die Praxis mit der Theorie; beide sind nicht von einander getrennt, sondern gehen ineinander auf; der mündlichen Übung folgt überall die schriftliche, oder das Zifferrechnen dem Kopfrechnen; beides bewegt sich in unzertrennlicher Einheit vorwärts . . . Jeder Sprung, jede Übereilung bei den Elementen verdirbt und verzerrt den nachfolgenden Unterricht und bringt Schwanken und Unlust hervor. Mit der Vorstellung wird das Wort geboren; solange daher der Schüler die Operationen nicht mündlich darlegen kann, sind die Nebel des Geistes nicht verschwunden." Aus der bisherigen Darstellung erhellt auf unzweideutige Weise, welche Zwecke Diesterweg durch den Unterricht in der Zahlenlehre anstrebt, nämlich Geistesbildung und Bildung fürs praktische Leben. Er sagt a. a. O.: „Die Geistesbildung hat ihren selbständigen Wert in sich. Sich auszubilden, ist der höhere Zweck des Lebens . . . Jedes Kind soll im Rechnen soweit kommen, daß es mit Leichtigkeit mündlich und schriftlich Aufgaben löst, wie sie das gewöhnliche Leben bringt. Die formale Bildung kann ebensogut an kleinen Zahlen und einfachen Verhältnissen wie an großen Zahlen und verwickelten Aufgaben erreicht werden."

Aus Diesterwegs speziellen Anweisungen soll hier nur folgendes hervorgehoben werden:

„Wie man eine Aufgabe rechnen muß, ergibt sich aus ihrem Verständnis; dieses setzt die Kenntnis der Sach- und Zahlenverhältnisse voraus. Der **Ausrechnung** einer Aufgabe muß ihre **Lösung** (Darstellung der Schlußfolge) vorausgehen. Den Nachweis für die Richtigkeit des Verfahrens hat die mündliche Darstellung zu liefern, nicht die Übereinstimmung des Resultates mit der Angabe im Fazitbuch. Fertigkeit in Behandlung der Zahlen (Sicherheit in den 4 Rechenoperationen) ist ein Augpunkt bei dem Unterrichte in der Zahlenlehre; aber man halte das gehörige Maß. Die Volksschule hat nur die **allgemeinen** Bedürfnisse zu berücksichtigen und diesen in vollstem Maße zu genügen. Das Kopfrechnen muß auf Zahlenzerlegung beruhen, es darf nicht ein in die Phantasie versetztes Zifferrechnen sein. Die Benutzung von Rechenvorteilen ist zulässig. Man wähle also leichtere und bequemere Zahlen usw."

Stern, Direktor des Seminars in Karlsruhe, sucht in seinem „Lehrgang des Rechenunterrichts nach geistbildenden Grundsätzen" (1832) ebenfalls Pestalozzischen Geist mit den berechtigten praktischen Gesichtspunkten zu verbinden. Sein Hauptverdienst ist die Ausscheidung des Proportionssatzes als Lösungsform der Regeldetriaufgaben und die Übertragung der Methode des mündlichen Rechnens, von der Mehrheit auf die Einheit und von dieser auf eine andere Mehrheit zu schließen, auf das schriftliche Rechnen. Man nannte diese Lösungsform **Schlußrechnung** oder wegen der Ansatzform **Zweisatz** (Sternscher Zweisatz). Von Sterner

wird die Einführung des Zweisatzes dem Nürtinger Reallehrer Schäffle zugeschrieben, der schon 1830 diese Lösungsform beschreibt.

Eigenartig sind die Rechenbücher des Professors Dr. Unger, die „Arithmetischen Unterhaltungen“ (1836), der „Leitfaden für den Unterricht im Kopfrechnen“ (1841) und die „Sammlung arithmetischer Aufgaben“ (1852). In den „Arithmetischen Unterhaltungen“ löst Unger 900 algebraische Aufgaben; vielfach sind die Rätsellösungen der Inder und Alcuins wieder aufgefrischt. (Über Algebraische Aufgaben in der Volksschule siehe Abschnitt 55.) Wichtiger ist Ungers Leitfaden für das Kopfrechnen. Unger sagt u. a.: „Das Rechnen ist die Mathematik der Volksschule.“ „Man rechne stets mit den kleinsten und bequemsten Zahlen, und man wird der besonderen Rechenvorteile nicht bedürfen.“ „Man mache nicht das Einüben der gefundenen Regel, sondern das Suchen derselben zur Hauptbeschäftigung.“ „Man soll nicht das Allgemeine geben und das Gegebene auf besondere Fälle anwenden lassen, sondern man soll vom Besonderen zum Allgemeinen gehen und das Selbstgefundene unter besonderen Bedingungen benutzen.“ „Eins recht wissen und ausüben gibt höhere Bildung als Halbheit im Hundertfältigen.“

Als Vater des neuen Volksschulrechnens ist Hentschel anzusehen, in ihm erreicht die sogenannte empirische Rechenmethodik die höchste Stufe ihrer Entwicklung. Es wäre überflüssig, Hentschels Bedeutung noch besonders hervorzuheben. Viele der jetzt lebenden Rechenlehrer und Rechenmethodiker sind unmittelbare, fast alle aber sind mittelbare Schüler Hentschels, und was sie lehren und was sie schreiben atmet Hentschels Geist. Nur wenige Worte will ich meinem unvergeßlichen Lehrer hier widmen, da Worte nicht ausreichen, nur annähernd die zwingende Gewalt seines Unterrichts zu beschreiben.

„Hentschel war ein Meister in der Didaktik und ein Rechenlehrer von Gottes Gnaden“, sagt Dittes, und Kehr sagt . . . „Fürwahr, der Mann versteht es, einen tüchtigen Elementarunterricht zu geben und den parador klingenden Grundsatz der Pädagogik wahr zu machen: Wenn die Schüler reden sollen, muß der Lehrer schweigen können, beide aber müssen hören lernen. Solch ein intensiver, die Kraft des Schülers nach allen Seiten in Anspruch nehmender Elementarunterricht bringt entschieden reichen Gewinn.“ Wangemann sagt: „Hentschel ist ein Feind jener Methode des Denkrechnens, die über Formeln und Regeln das Rechnen selbst hintenansetzt; er will vielmehr durch kunstlose Schlüsse oder durch ein Verfahren, das wirkliches Denken und Überlegung in Anspruch nimmt, zum Ziele führen. Der Weg, den er einschlägt, ist das Zurückführen auf die Einheit, dem er selbst da, wo eine gewisse Weitläufigkeit damit verbunden ist, den Vorzug gibt. Hentschel selbst sagt unter Benutzung des Tillichschen Ausspruchs: „Der Schüler soll denkend rechnen und rechnend denken lernen, das ist das eine; er soll neben der Einsicht auch diejenige Fertigkeit gewinnen, welche das Leben verlangt, das ist das andere.“ Jenes erfordert Lückenlosigkeit, Anschaulichkeit und Reichhaltigkeit des Unterrichts; die Fertigkeit aber ist nur durch vielfache unausgesetzte Übung zu erreichen.

Bücher, „Hundert Rechenaufgaben, elementarisch gelöst“ (1837) —

„Lehrbuch des Rechenunterrichts in Volksschulen" (1842) — „Rechenfibel" — „Aufgaben zum Zifferrechnen" — „Rechenbuch für die abschließende Volksschule" — „Aufgaben zum Kopfrechnen" sind fast alle heute noch in neuen Bearbeitungen von Költzsch weit verbreitet und verdienen alle Beachtung.

10. Das Rechnen unter dem Gesichtspunkt des „erziehenden Unterrichts".

Aus dem vorigen Abschnitt ersehen wir, daß der Rechenunterricht durch eine große Zahl von Methodikern, besonders durch Diesterweg und Hentschel, derartig gefördert worden war, daß man ihn wohl das bestbestellte Fach der Volksschule nennen konnte. So sagt Jänicke: „In der Hauptsache muß die Methode des Schulrechnens gegenwärtig als abgeschlossen betrachtet werden." Er begründet dies damit, daß er auf die allgemeine Herrschaft des Prinzips des rationellen Rechenunterrichts: „Durch Übung der geistigen Kraft Bildung fürs Leben", hinweist. — Bestimmter noch urteilt Kallas; er sagt: „Das Kapital- und Glanzfach der seminaristischen Pädagogik ist die Methodik des elementaren Rechnens. ... Die ältere Schule Pestalozzis hat Partielles nach den Grundsätzen des Meisters ausgebaut, die neuere begann ihre epochemachenden Arbeiten mit Diesterwegs „Methodischem Handbuch für den Gesamtunterricht im Rechnen" und schloß sie mit Hentschel, der eben als der große Meister die Rechenmethodik zum Glanzfach der Seminarien erhoben hat."

Nun muß die Ansicht des Abschlusses der Entwicklung der Methodik des Rechenunterrichts schon deshalb falsch sein, weil das Rechnen dem Leben dienen soll; das Leben aber ist nie abgeschlossen, es entwickelt sich von Tag zu Tag, und dieser Entwicklung muß der Rechenunterricht folgen.

Außerdem waren nicht alle Ideen Pestalozzis wirklich ausgebildet worden. Hartmann schreibt hierzu: „Konnte da nicht ein Neuerer kommen und den Hebel gerade an der Stelle einsetzen, wo sie stehen geblieben waren, d. h. Pestalozzis Grundlage berichtigen, ergänzen oder — durch Aufstellung eines neuen Prinzips — ganz beseitigen wollen? Diese Möglichkeit war nicht ausgeschlossen. Und weiter: Konnte nicht an Stelle der formal-materialen Bildung ein höheres Bildungsziel treten? Hat nicht Pestalozzi selbst ein solches angedeutet? ... Der Rechenunterricht konnte also weiter entwickelt werden durch Abänderung oder Beseitigung des Pestalozzischen Anschauungsprinzips und durch Aufstellung eines höheren Bildungszieles. Ja, es lag sogar die Möglichkeit vor, Pestalozzis Formalprinzip völlig zu verneinen und eine Entwicklung des Rechenunterrichts lediglich nach dem Materialprinzipe anzustreben."

Forschen wir nun in der neueren Literatur der Methodik des Rechenunterrichts, so finden wir

1. die Aufstellung eines neuen Bildungsziels,
2. die Ableugnung des Formalprinzips und
3. die Verneinung des Anschauungsprinzips.

Früher ist schon ausgesprochen worden, daß der Pädagog Pestalozzi der erste gewesen ist, der den Unterricht, vorzüglich den Rechenunterricht, in den Dienst der Erziehung gestellt hat. Bald wäre dieser Gedanke bei dem heftigen Kampf der Meinungen verloren gegangen, da war es Herbart, der mit allem Nachdruck als obersten Bildungszweck „Charakterstärke der Sittlichkeit" hinstellte und der Mathematik eine wichtige Rolle innerhalb dieses „erziehenden Unterrichts" zuwies, die sie nicht zufällig und nebenbei, sondern planmäßig zu erfüllen habe.

Die dieser Ansicht zugrunde liegenden Gedanken sind folgende: Der Rechenunterricht wirkt auf den Gedankenkreis ein durch Vermehrung des Inhalts und durch Beweglichmachung desselben (Material- und Formalprinzip). Ist dies der einzige Zweck des Rechenunterrichts, so ist der Unterricht kein erziehender; werden aber diese neuen Zustände einem höheren Zwecke dienstbar gemacht, so wirkt der Unterricht erziehend. Herbart nennt diesen höheren Zweck „Charakterstärke der Sittlichkeit", d. i. die zum Wollen treibende sittliche Einsicht. Der Rechenunterricht soll nun erstens die Klarheit und Bestimmtheit der Einsicht selbst und zweitens die Klarheit und Bestimmtheit der Objekte, auf welche das Wollen gerichtet ist, fördern. Es ist nicht abzuleugnen, daß der Rechenunterricht imstande ist, diese ihm zugewiesene Stellung in dem großen Unterrichtsplan auszufüllen, ohne daß dadurch die alten Ziele, formale und materiale Bildung, beiseite geschoben zu werden brauchen.

Herbart gab die Idee, das Ziel; die weiteren Ausführungen zur Erreichung desselben überließ er anderen. Bald wären nun auch Herbarts Anregungen in Vergessenheit geraten, da war es Grube, der ein Jahr nach Herbarts Tode sie zum zweiten Male rettete. Von Grube erschien im Jahre 1842 den „Leitfaden für das Rechnen in der Elementarschule, nach den Grundsätzen einer heuristischen Methode. Ein pädagogischer Versuch zur Lösung der Frage: ‚Wie weckt der Unterricht sittliche Bildung'. Im Jahre 1881 ergänzte Grube bei der 6. Auflage seines Buches den Titel durch den Zusatz: „Ein methodischer Beitrag zum erziehenden Unterricht". Wir können schon aus dem Titel des Buches schließen, daß Grube mehr noch als das Unterrichtsverfahren den Unterrichtszweck ins Auge gefaßt hat und daß er die von Pestalozzi und Herbart gegebenen Anregungen weiter verfolgen und weiter ausbauen will. So heißt es im Vorwort zur ersten Auflage im Anschluß an die Erörterung zur Bildung der Anschauung: „Mit dieser intensiven Bildung der Anschauung hängt die Bildung zur Sittlichkeit auf das innigste zusammen. Nur aus der Vertiefung in das Lehrobjekt kann die Liebe zu demselben entstehen, und nur das, was der Mensch liebt, will er auch. Nur der Unterricht wirkt lebendig auf das Gemüt des Schülers, welcher mit dem Verstande zugleich den Willen erobert. Wir haben deshalb das Prinzip der Sittlichkeit als allein maßgebend für die Erziehung wie für ihren wesentlichen Teil, en Unterricht, an die Spitze unserer Entwicklung gestellt."

An anderer Stelle sagt Grube bei der Einteilung des Rechenstoffs: Wo die Liebe zur Arbeit nicht durch die Arbeit selbst hervorgerufen wird, bleiben alle Zuchtmittel und Vermahnungen vergeblich. Diesen lebendigen

Trieb für die Sache in dem Schüler zu erzeugen, ist die Lebensaufgabe des Elementarunterrichts, welcher für das gesamte Schulleben, ebenso für die Erkenntnis- wie für die Willens-Entwickelung, den Grund legen soll. Weil aber das Rechnen vorzugsweise das rationelle Objekt der Elementarschule ist, so muß hier auch vorzugsweise jene Einheit des Erkennens und Willens erstrebt werden. Ohne einen organisch gegliederten Unterrichtsstoff möchte aber alle Mühe des Lehrers, auf die sittliche Bildung des Schülers zu wirken, vergeblich sein; denn nur mit dem Bewußtsein der in stetiger Einheit sich entwickelnden Kraft kann in dem jungen Geiste der Trieb entstehen, diese selbsttätig weiter zu entwickeln." — Und an anderer Stelle: „Ich bin den faßlichen Anweisungen, welche das Rechnen in eine Unzahl von Übungen zersplittert haben, dadurch entgegengetreten, daß ich jede Zahl ganz einfach als Individuum anschauen ließ, so daß nicht mehr die Operation den Einteilungsgrund bildete, sondern aus der allseitigen Anschauung jeder einzelnen Zahl sich die Operationen von selbst ergaben... Nicht die subjektive Willkür des Lehrers ist der Lehrgang, sondern dieser ist mit der Anschauung des Zahlobjektes gegeben. Das Verständnis des Exempels geht über zur produktiven Anschauung, welche das Exempel selber macht, und weil der Schüler überall die freie Überschau seiner Tätigkeit hat, genießt er sich selber an seiner Arbeit. Bis zu diesem ästhetischen Punkte hat der Rechenunterricht trotz aller Methodik bisher nicht geführt; denn vor lauter Virtuosität in den einzelnen Operationen konnte sich die Kraft des Schülers nicht im individuellen Ganzen konzentrieren. Das elementare Rechnen nach den Spezies auseinanderfallen zu lassen, ist dasselbe, als im Anschauungsunterrichte dem Kinde die Gegenstände nach den Rubriken von Größe, Gestalt, Farbe usw. vorzuführen, oder die Botanik mit dem Linnéschen System zu beginnen. Wie aber das Kind den Gegenstand nicht kennen lernt, wenn es nach einem Merkmale verschiedene Gegenstände anschaut, sondern wenn es den einen Gegenstand nach seinen verschiedenen Merkmalen betrachtet — und wie es falsch ist, dem Anfänger in der Botanik die Pflanzen so vorzuführen, daß er erst die Wurzel, dann den Stengel usw. anschaue, daß er vielmehr die Pflanze ganz sieht und sehen soll: so lernt der Schüler z. B. auch die Zahl 4 nicht kennen, nämlich mit wahrer Durchdringung des Objektes, wenn er heute $2 + 2 = 4$ lernt, nach einigen Wochen, wenn das Subtrahieren an die Reihe kommt, $4 - 2 = 2$ usw. Vielmehr hat er ja, wenn er weiß, daß $2 + 2 = 4$ ist, damit zugleich auch die Anschauungen, $2 \times 2 = 4$; $4 - 2 = 2$; $4 : 2 = 2$, und die Methodik hat unrecht, wenn sie diesen objektiven Zusammenhang nach den Operationen zerreißt. Eine solche Teilung stärkt nicht, sondern schwächt die Kraft der Anschauung, weil sie deren Konzentration auf einen Punkt, und somit das Beobachten im Anschauen hindert."

Man nennt das auf diesen Grundsätzen aufgebaute Unterrichtsverfahren die „monographische Zahlenbehandlung" oder kurz die „Grubische Rechenmethode". (Über die Ausführung derselben vgl. C. Abschnitt 2). Mit dieser monographischen Methode hat Grube die Pestalozzische Grundlage, das Anschauungsprinzip, weiter ausgebildet. Jede Zahl bildet

eine besondere methodische Einheit, wie die Gegenstände des naturgeschichtlichen und des Anschauungsunterrichtes, die Zahlanschauung mußte eine gründliche und allseitige sein. Demnach ist Grubes Unterrichtsziel die sittliche Bildung, und sein Unterrichtsverfahren die allseitige Betrachtung der Zahlen. Grube fand viele Gegner, aber es ist merkwürdig, daß diese Gegner das Grubesche Unterrichtsziel kaum berücksichtigten, mit großer Schärfe aber sein Unterrichtsverfahren bekämpften.

So schreibt Sobolewsky in seinen Rechenstudien: „Die Grubesche Art hat gewiß den Charakter eines stufenmäßigen, anregenden und bildenden Unterrichts. Indessen bestehen gegen denselben doch mancherlei Bedenken. So vielerlei verschiedene Rechenoperationen fast auf einmal vorzunehmen, muß verwirren. Das Zusammenzählen kommt nicht zu seinem Rechte, da die Kinder beispielsweise bei der Zahl 6 immer nur mechanisch 6 antworten . ." Egger urteilt im Rechenbuch für schweizerische Volksschulen: „Wenn auch die Methode manches Gute für sich hat, so ist doch nicht zu verkennen, daß das Weiterschreiten von Zahl zu Zahl sehr ermüdend ist und daß dasselbe der geistigen Entwicklung des Kindes nicht entspricht, wenn es an die eben eingetretenen Kinder die hohe Anforderung stellt, sogleich zu multiplizieren und zu dividieren." Hug tadelt in der Mathematik der Volksschule: „Wer zugleich beim ersten Rechenunterricht alle Operationsformen einführt, der handelt gegen die historische Entwicklung. Wer aber den Schülern von Anfang an alle Operationen lehrt, um sie die Zahlen erwerben und allseitig auffassen zu lassen, der verlangt, daß sie Mittel benutzen sollen, die noch gar nicht vorhanden sind, d. h. er handelt gegendie „psychologische" Entwicklung." Am schärfsten kritisiert Knilling in seiner Schrift: „Zur Reform des Rechenunterrichts" die Grubesche Methode, freilich auch die Methode fast aller Rechenlehrer, auch wenn sie nicht nach Grube arbeiten. Knilling sagt: „Grube geht von der Voraussetzung aus, daß die Zahlen genau auf dieselbe Weise wie die Sinnendinge, aus der Anschauung erfaßt und erkannt werden. Die Zahlanschauung bietet aber keine Analogie zur Anschauung und Vorstellung der Sinnendinge. Grubes Methode setzt im Menschen ein Vermögen voraus, von dem er keine Spur besitzt. Weil die Grubeschen Prämissen falsch sind, sind es auch die hieraus gezogenen Folgerungen. Es ist vergebliche Mühe, dem Kinde die Zahlen zur klaren Anschauung bringen zu wollen. Das Zerlegen einer Zahl in ihre möglichen Bestandteile ist nutzlose Spielerei; denn das Zerlegen (und Vergleichen) deckt die Beschaffenheit der Mengen nicht auf . . ."

Rein sagt dagegen: „Man hat in neuerer Zeit da und dort Einwendungen gegen das Grubesche Verfahren erhoben. Mit wenig Glück. Es ist hier nicht der Ort, auf die Sache einzugehen; soviel aber steht unseres Erachtens fest: Die allseitige Betrachtung der Zahlen innerhalb des ersten Zehners ist eine Errungenschaft, die als bleibender methodischer Erwerb wird angesehen werden dürfen. Eine andere Frage ist, ob das Prinzip der allseitigen Zahlenbetrachtung auch auf den nächst höheren Zahlenkreis bis 100 anzuwenden sei. Hier wiegen die Bedenken offenbar schwerer. Für den ersten grundlegenden Zahlenraum halten wir unbedingt an demselben fest."

Ein Anhänger Grubes ist Kaselitz. Er sucht den Grubeschen Fehler dadurch zu vermeiden, daß nicht die Zahl in Beziehung zu den verschiedenen vorhergehenden Zahlen, sondern in Beziehung zu dem verwandten Zahlenkreise betrachtet wird. So fällt die Entwicklung und der Fortschritt des Stoffes mit der Entwicklung des kindlichen Geistes zusammen. In jedem Zahlenkreise folgen die Operationen in ihrer organischen Verbindung der Kenntnis der Zahlen, nicht umgekehrt. (Vgl. Hug.) Jede Stufe ist die notwendige Entwicklungsstufe für die nachfolgende. Die auf gleichen Zahlanschauungen beruhenden Operationen können in den verschiedensten Zahlenkreisen zu gleicher Zeit behandelt werden und sich gegenseitig vertiefen. Die operativen Zahlen treten besonders beim Vervielfachen und Teilen in den höheren Zahlenkreisen unter Bezugnahme auf die früher behandelten Zahlenkreise auf. Das Verfahren ist einfach, anschaulich und erfolgreich. (Vgl. C., Abschnitt 3.)

Das Grubesche Prinzip der sittlichen Bildung hat neuerdings in Beetz (Typenrechnen) einen Vertreter gefunden. Beetz sagt: „Es ist merkwürdig, daß der Kern der Grubeschen Theorie, die bezweckte sittliche Bildung, vor der Form der monographischen Zahlenbetrachtung zunächst vollständig zurücktrat." Weiterhin sucht er nachzuweisen, daß das Rechnen wohl imstande ist, sittliche Bildung zu erzeugen. Er sagt: „1. Die Mathematik ist die einzige Wissenschaft, welche der menschlichen Erkenntnis offen liegt, deren Resultate eine unumstößliche Wahrheit haben. Die richtige Lösung der einfachsten Rechenaufgabe führt zur unbedingten Wahrheit, die von dem Kinde unmittelbar gefühlt wird. Wahrheit aber ist das erste und größte sittliche Gute. 2. Mit der Erkenntnis der unerbittlichen Regelmäßigkeit der merkwürdigen Verhältnisse wächst das Interesse... 3. Unübersehbar ist der mittelbar ethische Einfluß des Rechnens. Auf die Zahl stützen sich alle exakten Wissenschaften..." Und an anderer Stelle: „Der Erziehung liegt nur an demjenigen Willen etwas, welcher sich den Gesetzen unterwirft und sich selbst im Interesse der Allgemeinheit vergißt. Das kostet Selbstüberwindung. Im Rechnen aber ist subjektive Willkür ausgeschlossen." — Hinsichtlich des Lehrverfahrens will Beetz durch künstliche Gruppierung von Rechenkörpern, den Rechentypen, zum Ziel gelangen. Durch diese Rechentypen sollen Zahlen und Rechnungsarten veranschaulicht werden. Jeder Typus ist in dem andern unverändert enthalten. Die bisherigen „Zahlbilder" verwirft er und setzt für die Zahlen von 1 bis 12 folgende Rechentypen: •, • •, • • / •, • • / • •, • • / • / • •,

• • / • • / • •, • • / • • • / • •, • • / • • • / • • •, ...

In einer Schrift, „Der vereinfachte Rechenunterricht", will Beetz den

eine besondere method[illegible] [illegible] Zahl gliedern. [illegible]
lichen und des Ansch[illegible] [illegible] entgegentrete, nämlich als
gründliche und [illegible] [illegible] und als Maß der Ver-
die sittliche [illegible] [illegible] die Zahl drei Rechenarte:
trachtung der [illegible] [illegible] schlechthin), Rechnen mit [illegible]
daß diese Geor[illegible] [illegible] und Rechnen mit den [illegible]
großer Schärfe [illegible] [illegible] engern Sinne). Es ist nicht [illegible]
[illegible] Gedanken liegen.

So [illegible]
Art [illegible]
Un[illegible] [illegible] Formal- und Anschauungsprinzip.

[illegible] bei Lebzeiten Pestalozzis, entbrannte in
[illegible] Jahrhunderts ein heftiger Kampf gegen
[illegible] pestalozzischen Formalprinzips, nur wurde er
[illegible] geführt. Der Rechenunterricht sollte die
[illegible] zu einander nur noch soweit berücksichtigen,
[illegible] der Schüler angehörte oder voraussichtlich
[illegible]. Damit trat das Materialprinzip oder das
[illegible] grund. Man nannte diese Art des Unterrichts
[illegible]. Sie ist wegen ihrer Bedeutung in diesem Buche
[illegible] ausführlich behandelt worden.

[illegible] Gruppe von Rechenmethodikern will das Pestalozzische
[illegible] nicht gelten lassen. Hauptvertreter dieser Richtung
[illegible] Neumünster in Holstein und Knilling aus Traunstein
[illegible] Beide fordern das Zählen als Anfang des Rechenunterrichts,
[illegible] als Gegensatz zu dem Anschauungsprinzip das „Zähl-
[illegible] Die notwendigen Untersuchungen über die Natur des Zählens
[illegible] gibt Tanck unter dem Titel „Das Rechnen auf der Unter-
[illegible] Beitrag zur Frage nach der Entstehung der Zahlbegriffe“
[illegible] im theoretischen Teile seines Buches: „Zahlanschauung,
[illegible] und Zahlbegriff“. Durch diese Arbeiten sind die in der
[illegible] hervorgetretenen Bemühungen, die psychische Entwicklung der
[illegible] zu ergründen, hervorgerufen worden. Die Arbeiten von
[illegible] und Knilling enthalten manches Gute, doch gehen sie vielfach über
[illegible] hinaus. Tanck ist der ruhigere Kämpfer; sein Grundsatz „man
[illegible] mit dem, wozu die Voraussetzungen im Kinde sich finden und das
[illegible] für den weiteren Ausbau des Unterrichtsgegenstandes von grund-
[illegible] Bedeutung ist — das ist das Zählen“, wird von vielen neueren
[illegible] geteilt, und so gehören seine Rechenhefte zwar zu den besseren
[illegible] auf diesem Gebiete, sie bieten aber trotzdem verhältnismäßig
[illegible] Neues. Knilling hingegen versprach viel. Er sagt: „Ich will
[illegible] an dem bestehenden Lehrverfahren nicht etwa nur herumbessern,
[illegible] will es vielmehr vom Grunde und von der Wurzel aus neugestalten.
[illegible] wenn schon der erste Teil meiner Arbeit umstürzlerisch ausgefallen
[illegible] der zweite oder praktische, ausführende, soll noch weit radikaler geraten.“
[illegible] unterscheidet sich sein Leitfaden für den ersten Unterricht nur in
[illegible] Äußerlichkeiten von anderen Leitfäden. Tanck findet verwandte

…iker im 19. Jahrhundert, Knilling aber muß weiter zurückgehen bis in … und 18. Jahrhundert. Hartmann sagt: „In der Tat, durch seine Ver… … Pestalozzischen Anschauungsprinzips und durch die Betonung des … wobei das Zählen und das darauf sich gründende Rechnen … Tätigkeiten sind, schraubt Knilling den Rechenunterricht … als hundert Jahre zurück“, und an anderer Stelle: „Dem …n Unterrichtszwecke, diesem Hauptwertmesser für alle rechenmethodischen …ungen der Gegenwart, begegnet man weder in Tancks noch in …lings Arbeiten. Ersterer spricht sich über den Zweck des Rechen…errichts überhaupt nicht aus; letzterer stellt als einziges Ziel die ‚Rechen…tigkeit für das praktische Leben‘ auf. Diese aber will er leicht und …nell erreichen. Genau dasselbe haben bekanntlich auch die Rechenmethodiker des 17. Jahrhunderts versprochen.“

12. Schlußwort.

Das Leben bietet keinen Stillstand, und stetige Weiterentwicklung ist das Ziel der Menschheit. So ist es auch Aufgabe des Methodikers, nicht stillzustehen, sondern mit aufmerksamem Auge die Weiterentwicklung der Methode zu verfolgen und daraus zu lernen. Der vorstehende kurze Abriß über die Geschichte des Rechenunterrichts soll uns zeigen, wie nach und nach die Ziele des Rechenunterrichts und die Wege zur Erreichung der Ziele aufgestellt, bekämpft, verbessert und geklärt worden sind. Das Ergebnis wird nun je nach Anlage und Charakter ein verschiedenes sein, in jedem Individuum wird es sich anders gestalten. Doch werden wir darin einig sein, *daß wir uns nicht loslösen können von der Pestalozzischen Grundlage, der Anschauung, und daß wir ebensowenig das Pestalozzische Formalprinzip als das Materialprinzip älterer und neuerer Methodiker unberücksichtigt lassen dürfen, wenn wir durch beide das Hauptziel des erziehenden Unterrichts, die Erkenntnis der sittlichen Güter und das sittliche Urteil, das zum sittlichen Handeln führt, also den religiös-sittlichen Charakter, auch durch den Rechenunterricht erreichen helfen wollen.*

[illegible] [illegible]odik.

[illegible] [illegible]nterricht.

[illegible] Wie wird dem Zögling [illegible] Unterrichtsmethode [illegible] Die hervorragendsten [illegible] Bedürfnis einer [illegible] allein die Bekannt- [illegible] genügt. [illegible] das Objekt) oder [illegible] bestimmt werden. [illegible] die wissenschaft- [illegible] die andere durch das [illegible] sie geht von den [illegible] erstere anwendbar [illegible] erst bilden und [illegible]

[illegible] sich, was das Kind [illegible] oder analysiere. [illegible] herbeigeschafft, [illegible] Durch [illegible] Anschauungen [illegible] ist also ein [illegible] der durch Anschauung [illegible] der [illegible] Elemente [illegible] Abstraktion wie [illegible] Zusammenstellung der [illegible] (System). Der zweite Teil des [illegible] Abstraktionsprozeß. Damit aber das Wissen [illegible] zu diesen vier Stufen eine fünfte treten, die den Gebrauch [illegible] Herbart hat diese Stufe Methode genannt.

Wir setzen für diese Herbartschen [illegible], die die betreffenden Vorgänge nicht vollständig genau bezeichnen, folgende deutsche Namen: 1. Vorbereitung (Analyse), 2. Darbietung (Synthese), 3. Vertiefung oder Verknüpfung (Assoziation), 4. Zusammenfassung (System) und 5. Anwendung (Methode).

Es würde heute unmöglich sein, bei der Darlegung der Methode eines Unterrichtsfaches der „Formalstufen" nicht zu gedenken. Sind es doch diese „Formalstufen", mit denen die Jünger Herbarts zunächst sich

zum Volksschulunterrichte gewendet haben, um mit ihnen und durch sie denselben ihren Prinzipien gemäß zu gestalten. Die Methode manches Unterrichtsfaches mußte dabei bedeutende Umgestaltungen erfahren, damit es durch diese Methode die Stellung ausfüllen kann, welche ihm in dem Schulorganismus zum Heile des Ganzen angewiesen werden muß. Anders ist es bei der Methode des Rechenunterrichts. Seit langem ist die Methode dieser Disziplin derartig bearbeitet worden, daß man meinen muß, in den Autoren wenigstens indirekte Anhänger Herbarts vor sich zu haben. Ist es nicht ein Beweis von der Lebensfähigkeit, ja von der Notwendigkeit der Formalstufen, wenn wir sehen, wie die verschiedensten Meister des Rechenunterrichtes, die wissenschaftliches Streben und praktische Erfahrungen vereinigten, dem Rechnen schon längst Wege gewiesen haben, die denen gleichen, die wir durch die Formalstufen beschreiten sollen! — Somit wird es leicht sein, im Rechnen nach den Formalstufen zu unterrichten; braucht doch selbst der strebsame Lehrer, der bis dahin nichts von Neuerungen wissen wollte, im Rechnen sich nicht viel anders zu geben als bisher. Der Lehrer freilich, der die Kinder im Rechnen nicht unterrichtete, sondern mechanisch dressierte, der wird alles anders finden und mit Unlust und Mißtrauen an die neue Arbeit gehen. Doch wir wissen, daß solche Lehrer zu den seltensten Ausnahmen gehören werden, und die Strebsamkeit und innere Tüchtigkeit unseres Volksschullehrerstandes gibt uns die Gewißheit, daß es stets so bleiben, ja daß es noch besser werden wird.

Der Rechenunterricht gliedert sich schon von Natur in eine große Anzahl von methodischen Einheiten. Vor 60 und mehr Jahren freilich behandelte man z. B. das Rechnen mit unbenannten Zahlen derartig, daß man zuerst numerierte und dann im großen Zahlenraume die vier Grundrechnungsarten trieb. Jetzt gibt es wohl kein Rechenbuch mehr, das noch diesem Gange huldigt. Fast in jedem Buche findet man die Zahlenkreise bis 10, 20, 100, 1000 und darüber ausgeschieden, und in ihnen hat man größere methodische Einheiten, die der planmäßige Unterrichtsgang, der mit Erfolg verknüpft sein soll, verlangt. Andrerseits gliederte ein alter Rechenmeister einer städtischen Schreibschule oder vielleicht ein allzu eifriger Anhänger des modernen Sachrechnens die Aufgaben aus dem bürgerlichen Leben nach den Sachverhältnissen, denen sie entstammten. So unterschied man mitunter auch eine Heu- und Strohrechnung usw. Dies waren aber keine methodischen Einheiten, es war ein Zerpflücken des Unterrichtsstoffes und damit auch der Kraft der Schüler, das die Erreichung des Unterrichtszweckes nicht fördern konnte. Auch hierin ist aber seit langem eine heilsame Änderung eingetreten. Man bezieht die Sachverhältnisse auf die der Rechnungsausführung zugrundeliegenden Gesetze und hat darin die methodischen Einheiten gefunden.

Ob nicht die gebräuchliche allzu peinliche Gliederung der bürgerlichen Rechnungsarten mitunter in den alten Fehler verfällt und zusammengehörige, oft nur durch Namen geschiedene Rechnungsarten als methodische Einheiten behandelt wissen will?

Wir sehen also, der Rechenstoff ist in methodische Einheiten gegliedert.

Nun werden wir aber nicht auf den vermeintlichen Lorbeeren ausruhen dürfen, sondern wir müssen uns durch das neue Streben in der pädagogischen Welt bestimmen lassen, die jetzt vorhandene Gliederung des Rechenstoffes zu durchdenken und nachzusehen, ob hier zu wenig oder dort wohl gar zu viel gegliedert sei. Das Hervorheben der operativen Zahlen, die einheitliche Beziehung der Bruchrechnung auf Grundanschauungen, bezw. auf Grundregeln, das Zusammenfassen verwandter Rechnungsarten, das Reihenbilden, die Behandlung einer Reihe von Sachgebieten usw. würden hierher gehören.

Der unterrichtlichen Behandlung eines Unterrichtsstoffes soll die Zielangabe vorangehen. Nach Rein ist die Zielangabe von großer Wichtigkeit, denn sie verdrängt die vorhandenen Vorstellungen, sie versetzt den Schüler in den neuen Gedankenkreis, sie erregt Erwartung und günstige Stimmung für den Unterricht, und sie reizt den Schüler zur selbsttätigen Mitarbeit.

Man unterscheidet das fachwissenschaftliche Ziel, (Haupt- und Teilziel) und das Unterrichtsziel. Im Rechnen wird das fachwissenschaftliche Ziel sich meistens mit den Stoffüberschriften decken, die Aufstellung desselben ist also meist überflüssig. Das Unterrichtsziel muß sich direkt an den Zögling wenden. Soll es nun die oben angegebene Wirkung haben, so darf es nicht nur die Rechnungsart angeben (das wäre überdies meistens ein fachwissenschaftliches Ziel), sondern es muß sich auf die einzelne größere oder kleinere Aufgabe beziehen, und da der Inhalt der methodischen Einheiten kein rein formaler sein soll, muß das Ziel konkret gehalten sein. Was soll es z. B. dem Kinde nützen, wenn wir sagen, wir wollen heute Brüche mit Brüchen vervielfachen. Führt aber diese Ankündigung zu einer dem Sachunterrichte entnommenen Aufgabe, so kann man dies eher gelten lassen, liegt doch in ihr zu gleicher Zeit die Nötigung, diese Aufgabe wirklich zu rechnen. So könnte man z. B. bei der Vervielfachung mit mehrfach benannten Zahlen sagen: Wir wollen heute berechnen, wieviel Wilhelm Schulze für seinen Konfirmationsanzug bezahlen muß, oder: Wir werden berechnen, wieviel ein Fabrikbesitzer an Kranken- oder Invalidenversicherungsbeiträgen in einem Monat (in einem Jahr) bezahlen muß u. a. m. Eine Voranstellung des Zieles ist also dann überflüssig, wenn diese Voranstellung nichts anderes als eine formale Ankündigung ist. Wird aber ein Ziel aufgestellt, so ist es wünschenswert, daß es in derselben Stunde noch erreicht wird, sonst müßte es in der nächsten Stunde vielleicht unter Zuhilfenahme der Erinnerung der Kinder noch einmal angeführt werden.

Die Vorbereitung wird nach der methodischen Einheit, die behandelt werden soll, verschieden sein. Sie kann z. B. als Einführung oder Darlegung der heranzuziehenden Sachverhältnisse auftreten (der Buchhändler erläßt mir einen Teil der auf der Rechnung vermerkten Summe als Vorbereitung der Rabattrechnung); sie kann die Beschaffung derjenigen Kenntnisse und Fertigkeiten bezwecken, die zum Verständnis der darzubietenden methodischen Einheit unbedingt nötig sind (je größer die Wiederholungszahl bei gleicher Grundzahl, desto größer auch das Vielfache usw. als Vorbereitung auf das Vervielfachen der Brüche); sie kann

endlich auch in der Wiederholung derjenigen früher behandelten Stoffe bestehen, an die sich der neue Stoff organisch anschließt (das Einmaleins der 6 als Vorbereitung zum Teilen durch 6 im Zahlenkreise bis 1000). Die einzelnen zur Lösung der Aufgabe erforderlichen Arbeiten sind zusammenzufassen und einzuprägen; denn nur bei unbedingter Sicherheit wird das Kind die notwendige freie Verfügung über den Stoff besitzen. Fehlerhaft aber wird es sein, die Vorbereitung zu breit anzulegen, oder sie zu lang auszudehnen oder gar Teile des Neuen mit in sie hereinzuziehen.

Bei der Darbietung wird zunächst das Verfahren an einer typischen Aufgabe entwickelt. Die schulgemäße Lösungsform wird ins Auge gefaßt, und die einzelnen Teile derselben müssen sich der Reihe nach bei der Darbietung ergeben. So heißt es z. B. bei dem Vervielfachen eines Bruches mit einem Bruche: Vervielfachen eines Bruches mit einer ganzen Zahl; Teilen des Vielfachen; Rückschluß auf die Wiederholungszahl usw. — oder bei der Aufgabe: $43 + 25 : 43 + 20$; $63 + 5$; Feststellen der Summe von den Zahlen, die zu 43 gezählt sind usw.

Die Vertiefung verlangt eine Vergleichung des auf der zweiten Stufe Dargebotenen unter sich und auch mit früher Erworbenem. Zu der Vergleichung unter sich führt die Übung der gefundenen Lösungsformen an einer Reihe von ähnlichen Aufgaben, die zunächst alle demselben Sachgebiete entnommen sind. Sind z. B. die Zinsen von 500 Mk. zu 4% in 1 Jahr berechnet, so wird die Berechnung der Zinsen von demselben Kapital in derselben Zeit zu einem andern Prozentsatze zur Vertiefung dienen, auch die Berechnung der Zinsen zu demselben Prozentsatze und derselben Zeit aber von einem andern Kapital wird hierher gehören. Oder wenn ich bei der Kaselitzschen Behandlung der operativen Zahl 7 das Zuzählen der 7 zur 4 so eingeführt habe, daß ich zuerst den Zehner vollmachen ließ, dazu 6 brauchte, und den siebenten Einer noch zu diesem Zehner legte, so daß sich ergab, daß 4 dazu $7 = 11$ ist, so wird das Zuzählen der 7 zu 14, 24, 34, 44, 54 zur Vertiefung dienen. Später werden dann die Lösungsformen miteinander und auch mit den früheren verglichen, und das Gleichartige wird angegeben. Wir stehen damit schon in der 4. Stufe, der Zusammenfassungsstufe.

Die Zusammenfassung ist nicht allein die Ableitung und Feststellung einer Regel, denn eine Regel im engeren Sinne des Wortes ergibt sich nicht bei jeder Rechnungsart, sondern zur Stufe der Zusammenfassung ist auch die vollständig korrekte Angabe des Verfahrens zu rechnen. Das sichere Wissen, daß 7 zu 4 gelegt stets eine Einheit in den nächsten Zehner bedingt, ist ebensogut Zusammenfassung, als die Angabe der Regel: Zähler mal Zähler und Nenner mal Nenner, oder als die Sicherheit in der selbständigen Anwendung des Normalverfahrens.

Selbstverständlich ist die Anwendung des Gelernten. Angewandte Aufgaben sollen auch dann gegeben werden, wenn die Haupttätigkeit auf Erzielung der Zahlenkraft gerichtet ist, also bei dem Rechnen mit unbenannten Zahlen. Die einfache Benennung genügt hier nicht, es müssen die Verhältnisse des Lebens herangezogen werden. Ein trockenes Zusammenzählen von Nüssen und Nüssen oder Äpfeln und Äpfeln

kann nicht Anwendung genannt werden. Dieses Zusammenzählen wird aber schon zur Anwendung, wenn damit auch nur die einfachsten Verhältnisse verbunden werden. Sollen die Kinder aber von der Anwendung Nutzen haben, so ist es notwendig, daß Aufgaben mit den herangezogenen Verhältnissen so lange gelöst werden, bis nicht nur vollständige Sicherheit im Rechnen, sondern auch Selbständigkeit in der Beurteilung der Aufgaben und der Verhältnisse erzielt ist. Deshalb dürfen die Aufgaben bei der Anwendung nicht im bunten Wechsel die verschiedensten Verhältnisse nur streifen, sondern bei jeder methodischen Einheit sind wenig Sachgebiete, diese aber umfassend, heranzuziehen. Siehe B., Abschnitt 5.

Hiermit ist das Rechnen in den Dienst der anderen Unterrichtsfächer gestellt; viele derselben werden nach der mathematischen Seite ihre notwendige Ergänzung im Rechnen finden, wie vor allem Raumlehre, Erdkunde, Naturlehre und Naturbeschreibung. Erwähnt braucht nicht zu werden, daß auch aus den anderen Unterrichtsgebieten geeignete Stoffe Verwendung finden können. Daß der erste Rechenunterricht seinen Stoff dem Anschauungskreise der Kinder zu entnehmen hat, ist eine Forderung, die hier wohl nicht wieder aufgestellt zu werden braucht, so selbstverständlich ist sie. Wenn wir nun auch nicht die Märchen und Robinson allein in den Mittelpunkt des Unterrichts der beiden ersten Schuljahre stellen, so wird doch auch in anderem Stoffe sich mathematisches Material finden, und die sonstige Umgebung des Kindes ist so reich an geeigneten Sachgebieten, daß wir auf gekünstelte und nur für Schulzwecke zusammengesetzte Anwendungsaufgaben vollständig verzichten können.

Der naturgemäße Unterrichtsgang im Rechnen gliedert sich von selbst nach den Formalstufen. Nannte man früher als die drei Haupttätigkeiten des Lehrers bei dem Rechenunterricht die Einführung, die Übung und die Anwendung, so würde die erste dieser Tätigkeiten mit der Vorbereitung und Darbietung, die zweite mit der Vertiefung, die dritte mit der Zusammenfassung und Anwendung ziemlich zusammenfallen. Zu gleichem Ziel wird man kommen, wenn man den Rechenunterricht im Anschluß an folgende drei Imperative erteilt: „Mache klar!“ „Präge ein!“ „Wende an!“

Wenn nun auch nach den vorstehenden Erörterungen die Beachtung der Formalstufen den Rechenunterricht nicht wesentlich umgestaltet, so sind diese doch auch für den genannten Unterrichtszweig von hoher Bedeutung. Sie zwingen den Lehrer, allen Schlendrian aufzugeben und nicht erst beim Stundenanfang sich auf den Stoff zu besinnen. Die geeignete Darlegung der Notwendigkeit der betreffenden methodischen Einheit verlangt reifliche Überlegung, wenn sie nicht in unnütze Spielerei ausarten soll; die Vorbereitung muß eine planmäßige, die Darbietnng eine korrekte, das Ziel scharf ins Auge fassende sein. Die von dem jungen Lehrer häufig versäumte notwendige Übung wird durch die Stufe der Vertiefung so lange bedingt, bis die Zusammenfassung ermöglicht ist, und die Anwendung führt uns auf den Anfang zurück, sie verlangt eine genaue Kenntnis nicht nur des geistigen Standpunktes der Kinder, sondern auch der örtlichen Verhältnisse, wenn sie wirksam sein soll.

2. Die Vorbereitung des Lehrers auf die Rechenstunde.

Alle Aufgaben müssen nach dem alten pädagogischen Grundsatz geordnet werden, daß das dem Kinde Leichte, Einfache und Nahe zuerst, das Schwere, Zusammengesetzte und Entfernte hernach heran komme. Fast sollte man glauben, es sei jetzt unnötig, die warnende und mahnende Stimme noch zu erheben, daß diese so bekannten Grundsätze im Rechnen auch befolgt werden. Wie vielfach aber zeigt trotz der sorgfältig eingerichteten Rechenlehrbücher die Praxis die Nichtbefolgung dieser selbstverständlichen Forderungen. Wer z. B. beim Beginn des Zusammenzählens Hunderter, Zehner und Einer sofort zu Hundertern, Zehnern und Einern zählen lassen will, oder wer bei der Zinsrechnung sofort neben Kapital und Zinsfuß die Zeit und diese vielleicht gar in Bruchteilen des Jahres heranzieht, dem mangelt es entweder an pädagogischem Verständnis oder an dem rechten Fleiße.

Die häusliche Vorbereitung des Lehrers auf die Rechenstunde ist ja in der Regel bei weitem nicht so umfassend, als vielleicht die Vorbereitung auf eine Religionsstunde. Doch darf diese Vorbereitung nicht ganz wegfallen. Man kann die Vorbereitung teilen in eine unmittelbar zur vorliegenden Rechenstunde notwendige Vorbereitung und in eine mittelbare Vorbereitung, die der Rechenlehrer Tag für Tag üben soll.

Eine Gruppierung des Rechenstoffes jeder Rechnungsart, also ein Aufstellen von kleinen methodischen Einheiten, ist als der Anfang jeder unmittelbaren Vorbereitung zur Rechenarbeit anzusehen. Die Lehrbücher geben hierzu Anleitung, doch wird es sich empfehlen, daß der Lehrer nach sorgfältiger Überlegung des im Lehrbuch Gebotenen sich nun selbst an die Arbeit macht. Die Grundsätze, nach denen der Rechenstoff gruppiert werden soll, sind in der Einleitung dieses Abschnittes kurz erwähnt. Der Lehrer untersuche also vor der Stunde, worin die Schwierigkeiten der Aufgaben liegen, danach gliedere er den Stoff, so daß jede Aufgabenart, die zur Einführung einer anderen notwendig ist, vor dieser behandelt wird; er untersuche ferner, wie diese Schwierigkeiten zu überwinden sind, d. h., er bereite sich auf die Behandlung des Stoffes gewissenhaft vor. Ehe der Lehrer zur Schule geht, muß er wissen, was er mit jeder Abteilung im Kopfrechnen nehmen und womit er jede Abteilung im Tafelrechnen beschäftigen will. Die Fragen, wo sind wir stehen geblieben, was habt ihr zuletzt gerechnet, sind nicht nur zeitraubend, sie zeigen auch (wenn sie nicht Gewohnheitssache geworden sind), daß der Lehrer sich auf seine Rechenstunde nicht vorbereitet hat. In kurzer Zeit hätte er sich klar machen können, welche Aufgabengruppen hier oder dort, mündlich oder schriftlich zu rechnen sind, und in ebenso kurzer Zeit würde er sich, wie schon erwähnt, mit dem einzuschlagenden Gange vertraut gemacht haben. Sieht sich der Lehrer dann auch das Tafelrechenheft an, damit er die häuslichen Aufgaben wohl vorbereite und in verständigem Maße stelle, legt er diese Vorbereitung schriftlich nieder und benutzt er endlich die Erfahrungen im Laufe der Unterrichtsstunde als Korrektur, so erhält er nach wenigen Jahren einen individuell gestalteten Rechenlehrplan

für seine Klasse, der die sichere Erreichung der Ziele des Rechenunterrichtes wesentlich erleichtert. Solche unmittelbare Vorbereitung des Lehrers wird ausreichend sein.

Mehr Mühe und Zeit wird es dann kosten, wenn der Lehrer die Anwendung in der rechten Weise ausführen will. Die hierzu notwendige Vorbereitung ist die mittelbare, und sie muß eine fortwährende sein. Augen und Ohren muß der Lehrer offen haben, um die Beziehungen des Rechenunterrichts zu den andern Unterrichtsfächern, also auch zu der Umgebung des Kindes, aufrecht zu erhalten und recht zu pflegen. Da können Verhältnisse mit dem Rechenunterricht verknüpft werden, zu deren Heranziehung man sonst im Unterricht vielleicht gar keine Gelegenheit hätte, und das hierdurch erzielte sachliche Wissen ist ein sehr schätzenswertes Nebenprodukt des Rechenunterrichts. Entfernungen, Preisverhältnisse, Einwohnerzahlen, statistische Angaben und besondere Erwerbsverhältnisse der Gegend usw. sind es, mit denen sich der Lehrer vertraut machen muß; sie muß er im Rechenunterrichte benutzen, wenn dieser für die praktische und auch für die formale Seite recht fruchtbringend sein soll. Jede Aufgabensammlung leitet den Lehrer hierzu an; aber der Lehrer, der die Aufgaben aus der Aufgabensammlung so rechnen lassen wollte, wie sie dastehen, würde vielfach totes Material bieten, also auch kein Leben erwecken. Die Formen der Aufgaben müssen mit lebendigem Inhalt durch den Geist des Lehrers gefüllt werden, dann nur können sie wirksam sein. Wie leicht ändern sich die Sachverhältnisse, und selbst die beste Aufgabensammlung veraltet in manchen Aufgaben nach kurzer Zeit; wie verschieden sind die Verhältnisse der verschiedenen Gegenden, und alle diese Verhältnisse können in einer Aufgabensammlung doch nicht berücksichtigt werden. Einige Beispiele mögen die fragliche Angelegenheit weiter erläutern. Eine vor wenig Jahren neu erschienene Aufgabensammlung setzt den Preis von dem kg Zucker auf 0,75 ℳ fest, während der Schüler vor dem Schulweg das kg mit 45 Pf. bezahlt hat; die Zahl der Zahnstocher, die ein Kind täglich schnitzt, kann für Schüler einer Gegend, in der diese Industrie getrieben wird, zu einer ganz praktischen Aufgabe verwendet werden, während dieselbe Aufgabe in einer anderen Gegend langer Erläuterungen bedürfen würde, da die Schüler vielleicht kaum wissen, was Zahnstocher sind; wie groß die Entfernung zwischen Delitzsch und Bitterfeld ist, kann mit Nutzen herangezogen werden in der Umgegend dieser Städte, ein Thüringer Kind dagegen würde damit wenig erwärmt werden können usw. Deshalb stellen wir die Forderung, der Lehrer sei kein sklavischer Nachbeter der Aufgabensammlung, sondern er suche die Aufgaben mit lebendigem Inhalte zu erfüllen. Viel wird gewonnen sein, wenn sich der Lehrer gewöhnt, die Aufgaben frei zu stellen. Lehrer, die nur eine Rechenabteilung im Kopfe beschäftigen, sollten überhaupt nur bei sehr zusammengesetzten Aufgaben (die aber wohl dann nicht dem Kopfrechnen zugewiesen werden dürften) das Rechenbuch in der Schule zur Hand nehmen. Auge und Geist sind freier, wenn sie nicht durch das Heft abgelenkt werden. Es ist auch gar nicht zu schwer, geeignete Aufgaben frei zu stellen, wenn man sich stets darüber im klaren ist, welche

Gruppen der Rechnungsart sind zu wiederholen, welche neu zu nehmen. Hätte ich z. B. einige Stunden im Zahlenkreise bis 1000 addiert, so wüßte ich, wiederholt muß vielleicht Gruppe 1 a) — c) und 2, neu eingeführt Gruppe 3 a werden (vgl. C., Abschnitt 11), und stehe ich bei der Zinsrechnung, so weiß ich, ehe ich zur Schule gehe, daß ich Aufgaben stellen muß, in denen die Zinsen von verschiedenen Kapitalen zu verschiedenem Prozentsatze zuerst in vollen und dann in Bruchjahren gesucht werden sollen. — Guter Wille und etwas Übung rüsten den Lehrer bald mit der Fertigkeit aus, diese Formen in Zahlen umzusetzen.

Zu der mittelbaren Vorbereitung des Lehrers auf die Rechenstunde gehört auch die an anderer Stelle noch erwähnte Anlegung eines örtlichen Rechenheftes. So eben ist ausgeführt worden, daß die eingeführten Hefte nur die Form der Aufgaben geben und daß der Inhalt derselben vom Lehrer gegeben werden muß. Da empfiehlt es sich, daß der Lehrer die Verhältnisse und Zahlen, die sich für seinen Rechenunterricht eignen, niederschreibt. Hat der Lehrer nur eine Rechenabteilung zu unterrichten, so werden die Überschriften des Büchleins den zu behandelnden Rechenstoffen entsprechen; unterrichtet er mehr als eine Abteilung, so werden diese Abteilungen die Hauptüberschriften ergeben. So schreibt vielleicht ein hier in der Nähe wohnender Lehrer der einklassigen Schule unter II. Mittelstufe, 3. Vervielfachen ein: Aussaat: 1 ha 166 kg Weizen, 156 kg Roggen, 138 kg Gerste, 115 kg Hafer. Ernte usw. oder unter III. Oberstufe, 6. Verhältnisrechnung. Entfernungen: Von Delitzsch nach Bitterfeld 12 km, nach Leipzig 20 km, nach Halle 27 km usw. — Das gibt Jahr für Jahr fortgesetzt und verbessert ein stattliches, praktisches Sachrechenbuch. Und wie gern wird der unerfahrene Erbe dieses der Schul-Bibliothek einverleibte Buch benutzen, und wie leicht wird hierdurch dem in eine ganz andere Gegend mit wesentlich andern Verhältnissen versetzten Lehrer das „Heimisch werden“ gemacht!

3. Die Rechenstunde.

Jeder Schüler unserer Volksschule hat einen Anspruch auf ungefähr 1300 Rechenstunden. Wenn der Schüler in jeder Rechenstunde nur ein ganz kleines Teilchen lernt, so muß sich am Ende der Schulzeit schon ein respektables Wissen ergeben; doch wird jedes dieser Dreizehnhundertstel auch gebraucht, um den Schüler im Rechnen so ausgerüstet dem Leben zu übergeben, wie es gefordert werden muß.

Wie muß nun eine Rechenstunde eingerichtet sein, damit durch sie das vorgesteckte Ziel mit erreicht wird?

Die Schularbeit ist keine leichte; sie erfordert neben der hingebenden Liebe auch die sich aufopfernde Kraft. Daß die Rechenarbeit innerhalb der gesamten Schularbeit auch in dieser Hinsicht nicht die letzte Stelle einnimmt, ist jedem Lehrer, der es treu meint, nicht unbekannt. Die Hauptarbeit hat auch hier der Lehrer der einklassigen Schule zu leisten. Nicht der in den mehrklassigen Schulen erweiterte Lehrstoff ist es, der

für seine Klasse, der die sichere Erreichung der Ziele des Re[illegible]
wesentlich erleichtert. Solche unmittelbare Vorbereitun[illegible]
wird ausreichend sein.

Mehr Mühe und Zeit wird es dann kosten, wenn [illegible]
Anwendung in der rechten Weise ausführen will. Die h[illegible]
Vorbereitung ist die mittelbare, und sie muß eine fortwähr[illegible]
und Ohren muß der Lehrer offen haben, um die Bezieh[illegible]
unterrichts zu den andern Unterrichtsfächern, also auc[illegible]
des Kindes, aufrecht zu erhalten und recht zu pflegen.
hältnisse mit dem Rechenunterricht verknüpft werden.
ziehung man sonst im Unterricht vielleicht gar kei[illegible]
und das hierdurch erzielte sachliche Wissen ist ein [illegible]
Nebenprodukt des Rechenunterrichts. Entfernung[illegible]
Einwohnerzahlen, statistische Angaben und besonde[illegible]
der Gegend usw. sind es, mit denen sich der [illegible]
muß; sie muß er im Rechenunterrichte benutzen.
praktische und auch für die formale Seite recht [illegible]
Jede Aufgabensammlung leitet den Lehrer hier[illegible]
der die Aufgaben aus der Aufgabensammlung [illegible]
wie sie dastehen, würde vielfach totes Mater[illegible]
Leben erwecken. Die Formen der Aufgaben m[illegible]
durch den Geist des Lehrers gefüllt werden, [illegible]
sein. Wie leicht ändern sich die Sachverh[illegible]
Aufgabensammlung veraltet in manchen Au[illegible] [illegible]teilungen
verschieden sind die Verhältnisse der versch[illegible] [illegible] beschäftigen
diese Verhältnisse können in einer Aufgab[illegible] [illegible]et zur Stunde
sichtigt werden. Einige Beispiele mögen [illegible] [illegible]n und mit metho-
erläutern. Eine vor wenig Jahren ne[illegible] [illegible] ohne Aufgabe sein.
setzt den Preis von dem kg Zucker auf [illegible]men, sie erhält zuerst
vor dem Schulweg das kg mit 45 Pf. [illegible] behandelten Stoffe.
stocher, die ein Kind täglich schnitzt, [illegible] Abteilungen kurz nach-
der diese Industrie getrieben wird, [illegible]. Der Helfer erhält
verwendet werden, während dieselbe [illegible] schriftlichen Aufgaben
langer Erläuterungen bedürfen würde, [illegible] weiter üben kann, sind nach Seite
wissen, was Zahnstocher sind; wie groß [illegible] auch hier kann die Rechenarbeit
und Bitterfeld ist, [illegible] mit Nutzen [illegible] schnell Rechenschaft, ob sie die
dieser Städt[illegible] Kind [illegible] Auch während dieser vorbereitenden
werden [illegible] als Helfe[illegible] gabe der im Kopfe beschäftigten Ab-
kein [illegible] geben die neue Aufgabe desselben
Aufgabe[illegible] schriftlichen Aufgaben ist nun beendet.
wenn [illegible] zurück. Eine neue Rechnungsart wird
nur [illegible] Kopf[illegible] an mehreren Übungsbeispielen ver-
[illegible] der Helfer beobachtet, ein irrendes
[illegible] der ganzen Klasse aufrecht erhalten.
[illegible] rechnet nun auf der Tafel noch
[illegible] die Abteilung, die der Helfer
[illegible] beschäftigt; der Lehrer übersieht

die in der Rechenstunde angefertigten schriftlichen Arbeiten und wendet sich dann einer anderen Abteilung zu usw. (Vgl. auch B., Abschnitt 9.) Dies muß alles ohne auffälliges Hasten und Jagen geschehen, „Stille und Wärme“ üben auch hier den wohltätigsten Einfluß aus.

Nicht die planmäßige Beschäftigung der Abteilungen und nicht die methodische Geschicklichkeit bei der Einführung eines neuen Rechenstoffes allein genügen zur Erreichung des Rechenzieles. Eines wird häufig, besonders von jungen Lehrern, vergessen, das ist die Übung. Übungsaufgaben werden wohl von jedem Lehrer nach jedem dargebotenen Stoffe in ausreichender Anzahl gestellt, und doch soll die Übung versäumt werden? Die einzelnen Gebiete des Rechenunterrichtes stehen in so engem Zusammenhange, daß zum Verständnis eines weiteren Stoffes das früher Gelernte immer wieder herangezogen werden muß. Wer z. B. das Einmaleins nicht kann, kann nie vervielfachen lernen, und ohne Beherrschung des Grundgesetzes der Zehnerordnung gibt es kein Verständnis vom Dezimalbruch usw. Es ist deshalb die Aufgabe jedes Rechenlehrers, *in jeder Rechenstunde* irgendein Gebiet zu *wiederholen*; denn gerade die Übung durch planmäßige Wiederholung ist es, die in vielen Schulen fehlt und durch deren Fehlen die Ergebnisse des Rechenunterrichts in Frage gestellt werden. — Der Lehrer muß sich eine richtige Verteilung der zu wiederholenden Stoffe anlegen. Welches sind nun solche *eisernen Stoffe*, die immer wieder dem Verständnis und dem Gedächtnis vorgeführt werden müssen? Mit jedem Jahre wachsen diese Stoffe an, ohne daß man behaupten dürfte, daß die ersten nun allmählich entbehrlich geworden wären. Zuerst sind es die *Einsen*, d. i. die Reihen nach den vier Grundrechnungsarten geordnet; von diesen hat die meiste Bedeutung das „Einmaleins“. Durch zwei Jahre hindurch lernen die Kinder das Einmaleins, wollte man aber nicht fleißig wiederholen, so würde das endliche Ergebnis am Schluß des 2. Jahres sehr traurig sein. Aber auch die Reihen aus den anderen drei Grundrechnungsarten sind von hohem Werte und müssen fleißig wiederholt werden; gewisse Resultate kann man nicht oft genug hören, so z. B. die Übungen mit den kleinsten Zahlen, aber mit Übergang in den neuen Zehner. Hierauf folgen die *schulgemäßen Lösungen* nach den vier Grundrechnungsarten. Gib hier nicht zu große Zahlen, aber gib viel Aufgaben, schließe an jede ausführliche Aufgabe mehrere Beispiele zum Schnellrechnen an und wiederhole häufig. Besonderen Wert haben hier bei wieder die Aufgaben, in denen Zahlen von 100 oder 1000 abgezogen werden, desgleichen auch die Vervielfachungs- und Teilungsaufgaben durch kleine Potenzen von 10. Übungen im *Zahlenschreiben* werden ebenfalls hierher gehören, desgleichen auch die Angabe der *Währungszahlen* und die Beziehung der gebräuchlichsten Maße und Gewichte zu den Münzen (l : hl = Pf. : Mk.). Auch die 6 *Grundregeln für die Bruchrechnung*, *die Regeln über Teilbarkeit der Zahlen durch 2, 3, 4 und 5*, *die schulgemäße Lösung für Vervielfachen und Teilen durch Brüche*, die *Prozentreihen* u. a. sind Stoffe, die zu diesen eisernen Rechenstoffen zu zählen sind. — Der Lehrer wird entweder zum Anfang oder zum

Schluß einer Rechenstunde eines der angeführten Gebiete, das auch als häusliche Aufgabe gegeben werden kann, üben und somit erneutes Verständnis und erneute Fertigkeit erzielen. Die Abteilungen können hierbei fast immer gemeinschaftlich beschäftigt werden. Die Erfahrung lehrt nun, daß es gerade für den eifrigen Lehrer sehr schwer ist, zum Schluß der Stunde die notwendige Zeit zur Wiederholung zu erübrigen. Ich empfehle deshalb dringend, die Wiederholung an den Anfang der Stunde zu legen. Dies empfiehlt sich auch noch dadurch, daß unter besonderen Umständen diese Wiederholung nicht nur zur Übung, sondern auch zur Vorbereitung des zu behandelnden Stoffes verwendet werden kann. — Siehe die ausführlichen Stoffverteilungs- und Wiederholungspläne in B., Abschn. 8 und Abschn. 10.

4. Der mündliche Ausdruck bei dem Rechenunterricht.

„Das Rechnen ist auf allen Stufen als Übung im klaren Denken und richtigen Sprechen zu betreiben.“ (Allgemeine Bestimmungen vom 15. Oktober 1872.) Diese Forderung ist scheinbar sehr einfach; denn jeder Lehrer, der nicht mechanisiert, muß beim Rechnen auf klares Denken hinzielen. Denken und Rechnen sind nicht auseinanderzuhalten, wo aber klar gedacht wird, da kann auch richtig gesprochen werden; denn das klare Denken ist die Vorbedingung zum richtigen Sprechen. Wenn also der Lehrer den Rechenunterricht so betreibt, daß der Schüler auf klare Anschauungen gegründete Vorstellungen und Begriffe bildet, daß er zuerst unter der Leitung des Lehrers und dann selbständig urteilen und schließen lernt, dann muß er auch die Sprachfertigkeit der Kinder dadurch fördern. Ist letzteres nicht geschehen, so hat sich der Lehrer einer Unterlassungssünde schuldig gemacht, er hat nicht mit zäher Energie darauf gehalten, daß das Verstandene auch in Worte umgesetzt wurde.

Wie fördert der Lehrer die Sprachfertigkeit, und was soll im Rechenunterricht gesprochen werden?

Der erste Rechenunterricht ist durchweg Anschauungsunterricht, jede Rechenstunde muß eine Sprachstunde sein. Das Kind soll Zahlvorstellungen gewinnen. Der Lehrer zeigt vor, und die Kinder lernen aussprechen, was sie vorgezeigt erhalten: Das ist ein Finger usw. Stets wird im Satz geantwortet. Auch wenn dann gerechnet wird, hat das Kind bei der Darbietung stets, bei der Vertiefung in der Regel im Satze zu antworten; das Zahlwort als Antwort genügt nicht.

Auf der Unterstufe wird also das Kind im Rechnen meistens im Satze sprechen müssen, Ausnahmen dürften vielleicht die Einmaleinsreihen machen. Ein selbständiges Vorrechnen der Aufgabe ist aber nicht zu verlangen. Die Forderung, zwei oder drei Schlüsse aneinanderzureihen, ist für das Kind zu schwer, außerdem wird es auch durch die mangelnde Sprachfertigkeit gehemmt.

In der Mittel- und Oberstufe fördert der Lehrer die Sprachfertigkeit vor allem durch die schulgemäßen Lösungen. Bei der Darbietung antwortet das Kind in Sätzen, welche zur schulgemäßen Lösungsform zugesetzt werden. Die Vertiefung bewirkt, daß jedes Kind imstande

sein muß, jede Aufgabe der angeführten Art nach diesem Normalverfahren zu lösen. (Ausnahmen bestätigen auch hier die Regel, und fast jede Schule wird einige Schüler kennen, welche trotz aller Mühen des Lehrers das angeführte Ziel doch nicht erreichen; dies dürfen aber eben nur Ausnahmen und zwar seltene Ausnahmen sein.) Ist aber dies Ziel erreicht, so hat die Schule noch eine andere Aufgabe zu lösen, nämlich die Rechenfertigkeit durch Übung zu sichern und sie so weit auszubilden, daß sie in der Praxis verwendet werden kann. Bei dieser Übung kann nicht jede Aufgabe vorgerechnet werden, auch wird die Antwort nicht im ganzen Satze, sondern möglichst kurz, d. h. im Resultat, gegeben. Häufig wird auch hier das sogenannte Schnellrechnen angewendet. Ich betone aber nochmals, dieses Schnellrechnen darf nicht an der Spitze einer Übung stehen, sondern es kann erst nach erzielter Sicherheit in der schulgemäßen Lösungsform eintreten. Beim Schnellrechnen werden nur Resultate angegeben. So erreicht der Rechenunterricht sein formales und sein praktisches Ziel. — Würde aber die Sprachfertigkeit der Schüler nicht mehr gebildet werden, wenn man ihnen bei der Lösung der Aufgaben von vornherein völlig freie Hand ließe? Der Trugschluß, der hier zugrunde liegt, kann nur den Neuling täuschen. Aller Unterricht gibt in seinen Anfängen, d. i. auf seiner Unterstufe, feste Formen. Woher sollte das Kind die Sprachformen nehmen, wenn sie ihm nicht gegeben werden! Dies tut auch der Rechenunterricht. Welcher bildende Wert nun in der möglichst kurzen und korrekten Lösungsform enthalten ist, welchen hohen Grad von geistiger Zucht diese Formen bedingen, davon wird an anderer Stelle gesprochen werden. Ebendaselbst (vergleiche C., Abschn. 7) ist aber auch die Bedeutung der freien Lösungsformen gebührend gewürdigt. Diese haben für den gereifteren Schüler ihren hohen Wert auch in sprachlicher Hinsicht, wenn der Lehrer stets darauf hält, daß die freien Lösungsformen nicht in bloßen Andeutungen, sondern in korrekter vollständiger Weise gegeben werden. Achtet dann der Lehrer noch auf Sicherheit und Gewandtheit in der Auffassung und Wiedergabe der Aufgaben und der entwickelten Regeln, wird er nicht müde, immer wieder im kleinen zu ermahnen, zu leiten und zu führen, so werden die Fortschritte der Kinder auch im sprachlichen Ausdruck erfreulich sein, und der Rechenunterricht wird auch hierin seine richtige Stelle in dem Schulorganismus einnehmen.

Ich will hier Gelegenheit nehmen, einige Ausdrucksformen im Rechnen zu empfehlen, andere zu verwerfen. Auf der Unterstufe lasse ich für die sonst gebräuchlichen „und“ und „weniger“ die die Rechnungsart direkt bezeichnenden Wörtchen „dazu“ und „davon“ setzen. Die Schwierigkeiten, welche sich bei der Klarstellung des „weniger“ ergaben, führten mich auf diese Änderung, die an sich nicht wesentlich und auch nicht neu ist, die aber nach meiner Erfahrung sich recht gut bewährt hat. — Ich lasse nicht „borgen“. Die gebräuchliche Vorrechnungsform ist: 6 von 4 geht nicht, ich borge mir einen Zehner und verwandle ihn in Einer, 1 Zehner hat 10 Einer usw. Dafür sage ich direkt: ich verwandle einen Zehner in Einer! Dieser Ausdruck gibt das Wesentliche, der Ausdruck „borgen“ muß erst erläutert werden. (Vergleiche C., Abschnitt 4.) Auch

dies „mir“ ist falsch; denn die anderen Schüler und auch der Lehrer arbeiten mit. — 5 kg kosten nicht 5 mal mehr als 1 kg, sondern 5 mal soviel, dasselbe gilt von dem 5 mal weniger und dem 5 mal so wenig oder besser dem 5. Teil. Mehr und weniger setzen einen Grundwert voraus, der den tatsächlichen Verhältnissen nicht entspricht. Ähnliche Ungenauigkeiten finden sich bei dem Vervielfachen, wenn man ruhig verwechselt 4 mal so viel und noch 4 mal so viel. Es ist ein bedeutender Unterschied, ob ich jemandem wünsche, daß er 4 mal so alt oder noch 4 mal so alt werden möge, als er ist. — Ein- und Mehrzahl dürfen ebenfalls nicht verwechselt werden. 3 kg kosten, 1 kg aber kostet so und soviele Mark. 15 — 10 ist 5 und nicht sind 5 usw. — Man gewöhne sich daran, nicht mit 5 zu teilen, sondern durch 5. Die Vorstellung ist dieselbe, aber der Ausdruck ist der auch sonst gebräuchliche. Die Vertauschung der Faktoren ist bei der Auflösung einer Aufgabe unzulässig. Wenn 1 m 3 ℳ kostet, so kosten 19 m nicht 3 × 19 ℳ, sondern 19 × 3 ℳ. Bei der Ausrechnung kann man sich dann freier bewegen, doch muß der Schüler die Vertauschung der Faktoren bei benannten Zahlen erklären können. Im vorliegenden Falle würde es also heißen: 19 × 1 ℳ = 19 ℳ, 19 × 3 ℳ sind 3 mal soviel, also 3 × 19 ℳ. — Wir dürfen Faktoren bei der Ausrechnung vertauschen, aber nicht verwechseln. Ebenso ist es nicht gleich, ob ich sage be-zahlt oder ge-zahlt. Ware wird bezahlt, Geld aber gezahlt. — Wir sagen bei der Division durch einen Bruch oder durch eine gemischte Zahl nicht „der $\frac{2}{3}$te Teil“ oder „der $4\frac{1}{6}$te Teil“, sondern „geteilt durch $\frac{2}{3}$“ oder „geteilt durch $4\frac{1}{6}$“. — 756 heißt nicht siebenhundert und sechsundfunfzig, sondern siebenhundertsechsundfunfzig; das „und“ wird nur benutzt bei der Bildung der Zehner und Einer von 21 bis 99. — Wir sagen „sechzehn, siebzehn, sechzig und siebzig“ und nicht: sechszehn, siebenzehn, sechszig und siebenzig“. — Die Verwechslung von Teilen und Enthaltensein wird noch besonders getadelt werden, doch ist auch die Sitte nicht zu loben, die beide Divisionsformen in einen Topf wirft und hineindividiert. Letzteres soll enthaltensein heißen, und das Wort „Enthaltensein“ wird außerdem besser durch „Messen“ ersetzt.

Ähnliche falsche Formen würden noch mit Leichtigkeit gefunden werden. Der Lehrer soll diese Formen nicht durchgehen lassen; denn die Kinder gebrauchen ebenso gern und sicher die richtigen wie die falschen Formen. Die letzteren erfüllen aber nicht die an der Spitze dieses Abschnittes aufgestellte Forderung des richtigen Sprechens, weil nicht klar gedacht worden ist.

5. Angewandte Aufgaben und das Sachrechenprinzip.

Die Aufgabe jedes Volksschulrechenbuches muß die richtige Verbindung des Kraft- und Sachprinzips sein; jede einseitige Betonung einer dieser Richtungen bedingt die Unbrauchbarkeit des betreffenden Buches.

Die soeben ausgesprochene Forderung ist nicht neu, und fast alle Rechenbücher nach Ablauf des ersten Drittels des vorigen Jahrhunderts

suchten beide Richtungen zu vereinigen; doch ist nicht zu verkennen, daß, beeinflußt von der Pestalozzischen Forderung der Kraftbildung, selbst in der Theorie das Sachprinzip häufig nicht gebührend gewürdigt wurde. In der Praxis kam dazu, daß in den übervoll besetzten Schulen größtenteils aus Not, mitunter vielleicht auch aus Bequemlichkeit, das sogenannte Tafelrechnen in ungesunder Weise vorherrschend wurde, dieses wieder artete zum Regelrechnen aus, und die Sachgebiete wurden nur so nebenher berührt. Das Rechnen wurde den Fertigkeiten zugezählt und der Rechenunterricht in Wirklichkeit trotz der Gegenwirkung namhafter Theoretiker demgemäß gestaltet.

Aus dem Kampfe gegen dieses Zifferrechnen nur einige Angaben! Dr. Eisenlohr spricht 1854 der Pestalozzischen Zahlenlehre zugunsten der Anforderungen des praktischen Lebens das Todesurteil, er sagt: „Die Zeit der formalen, abstrakten Methode ist vorüber, und die Herrschaft der praktischen Lebensbedürfnisse beginnt.“ An anderer Stelle sagt Eisenlohr: „Das Rechnen, ja die größte an unsern Schulaufgaben erlangte Fertigkeit, geht nicht so, wie es sein sollte, ins Leben über. Bei allem Kraftaufwande für Gewinnung eines Resultates bleiben wir unmittelbar vor dem Ziele stehen und werden der Früchte unserer Arbeit verlustig. Das Kind lernt wohl rechnen, aber unser Volk rechnet nicht. Es ist eben etwas, was es mit dem Verlassen der Schulbänke gern hinter sich läßt und abstreift ... Gewiß trägt an allem diesen auch die Schule ihre Schuld infolge einer einseitigen Richtung und schiefen Betreibung des Rechenunterrichts selbst. Seine Mängel bestehen darin, daß wir unsere Kinder wohl rechnen, aber zu wenig berechnen lassen ... Es ist unnatürlich und verkehrt, in unseren Schulen die Kinder an abstrakten, formalistischen Unterrichtsgegenständen festzuhalten und ihnen das Material zur Anwendung derselben vorzuenthalten und auf diese Weise zu scheiden, was Gott namentlich für die Gebiete des Volks zusammengefügt hat.“ Goltzsch will den Rechenunterricht als einen natürlichen Zweig des Gesamtunterrichts betrachtet und ihn als integrierenden Bestandteil der einheitlichen Volksschulerziehung zum Zwecke seiner sittlichen Lebensführung organisch eingegliedert wissen. „Der Rechenunterricht soll seine isolierte, aber auch seine selbständige Stellung aufgeben und sich möglichst eng an den Sachunterricht anschließen.“

Salberg, der 1874 ein Buch unter dem Titel „Sachrechenmethode“ erscheinen ließ, sagt in einem späteren Aufsatz: „Das Wesen des Sachrechnens besteht darin, daß die Schüler irgend ein eine Vielheit darstellendes Ding hernehmen, unter Anleitung des Lehrers alle daraus ableitbaren Rechensätze festhalten und das Gefundene mit dem richtigen Worte zum Ausdruck bringen. Nach allseitiger erschöpfender Behandlung dieses Gegenstandes, d. h. nachdem alle ableitbaren Rechensätze festgestellt sind, kommt ein zweiter, dritter an die Reihe, um in gleicher Weise behandelt zu werden.“ Diese Gegenstände, „Sachen“, sind nicht beliebige Dinge, sondern „Rechendinge“, d. h. die im Verkehr gebräuchlichen Münzen, Maße und Gewichte. Die Kinder sollen mit diesen selbst rechnen und so „Lehrziel und Lehrmittel auf ein Objekt konzen-

trieren" ... Deshalb sagt er: „Fort mit den Strichen, Kugeln, Bohnen aus der Elementarschulklasse, insoweit sie nur als Hilfsmittel dienen sollen." Salberg betrachtet sein Verfahren als einen neuen Abschnitt in der Entwicklung des Rechenunterrichts. Er schließt: Im Rechnen kommen Ziffern, Zahlen und Sachen vor, und hat man schon eine Periode des Zifferrechnens und eine Periode des Zahlenrechnens gehabt, so wird meine Methode die Periode des Sachrechnens einleiten.

Kaselitz verlangt 1867: „Auch der Rechenunterricht der Volksschule soll Gesinnungsunterricht sein, da der Wert eines Menschen sich nicht danach bestimmt, was er weiß, sondern nach dem, was er will und tut." Sachse verlangt in „des Lehrers Rüstzeug in dem Kampfe der Schule gegen die Sozialdemokratie" im Jahre 1873: „Im Anschluß an die Unterweisungen über die unwandelbaren Gesetze gegenseitiger Verpflichtungen im Leben und die Gleichheit von Leistung und Gegenleistung sollen ungezwungen sich ergebende volkswirtschaftliche und sittliche Grundsätze entwickelt und bestimmt und knapp ausgesprochen werden, ja dieselben sollen in den Rechenheften in Form von Lebensregeln und Merksätzen fixiert werden", und Knilling verlangt einen besonderen „Sachkursus" zur Einführung der Schüler in das Verständnis der allgemeinen Verkehrsverhältnisse, von Handel und Gewerbe, damit er zur selbständigen Beurteilung und Lösung von Rechenexempeln des werktätigen Lebens befähigt werde.

In den Rechenbüchern der zweiten Hälfte des vorigen Jahrhunderts wurde deshalb fast allgemein die gewonnene rechnerische Kraft in den Dienst des Lebens gestellt, d. h. es wurden angewandte Aufgaben im Anschluß an reine Zahlenaufgaben gegeben, so sollte „klares Denken und richtiges Sprechen an berechtigtem (Rechen-)Stoff" erzielt werden. Fehlerhaft war es dabei, wenn in einer Gruppe dieser angewandten Aufgaben viele verschiedene Sachverhältnisse nebeneinander dargestellt wurden; der Lehrer kam aus dem Erklären nicht heraus und ließ oft aus Zeitmangel sämtliche den Sachverhältnissen entnommene Aufgaben weg.

Diesem „Durchlaufen der verschiedensten Sachgebiete im bunten Wechsel" (Thrändorf, Konzentration oder konzentrische Kreise) traten nun noch besonders die Anhänger des Konzentrationsprinzips entgegen. Die Verwertung der Sachgebiete des Rechnens sollte vom Standpunkt des „erziehenden Unterrichtes" aus geschehen. Auch diese rechenunterrichtliche Konzentration ist nicht neu. Ob Suevus aus Freystack in seinem Rechenbuche im Jahre 1593 moralisierende Bemerkungen an das Alter Adams und Methusalems anschließt, oder ob Rochow die Anlehnung des ersten Rechenunterrichtes an den Anschauungsunterricht fordert; ob Stephani auf die Aufgaben aus Geographie und Geschichte hinweist, indem er den Rechenunterricht als einen Teil des Gesamtunterrichtes betrachtet, oder ob Graser das Wohnhaus in den Mittelpunkt seines Rechenunterrichts stellt (Grasersches Fenster): überall finden wir hier und bei vielen anderen Betonung des Konzentrationsprinzips. Ganz besonders aber wurde die Konzentrationsidee betont und psychologisch begründet von Herbart, Ziller

und deren Schülern, diese fordern prinzipiell die Anordnung der praktischen Aufgaben nach stofflicher Verwandtschaft.

Wichtig hierfür sind die Arbeiten von Rein, Pickel und Scheller, von Honke, Wiget, Just, Teupser, Stucki, Räther, Heiland, Muthesius, Hartmann u. a. m. Letzterer sagt 1888: „Durch diese Anordnung der praktischen Aufgaben nach stofflicher Verwandtschaft wird

1. das unmittelbare Interesse auch für die Rechenstoffe im engeren Sinne geweckt,
2. größere Klarheit und Bestimmtheit für die Sachgebiete selbst erzielt,
3. der psychologische Gang des Rechenunterrichtes begünstigt,
4. die Betätigung des sittlichen Charakters angebahnt und
5. die Verwirklichung der Konzentrationsidee gefördert."

An anderer Stelle spricht sich Hartmann näher über Punkt 5, die Konzentrationsidee betreffend, aus. Er sagt: „Völlig einverstanden sind wir mit Muthesius, wenn er fordert, der geordnete Gang des Rechenunterrichts dürfe nicht durch den Konzentrationsstoff gestört werden. Nicht zugeben aber können wir, daß der geordnete Gang des Rechenunterrichts die Verknüpfung mit Sachgebieten, die dem Kinde psychologisch nahe liegen, schlechthin ausschließt. Solange nicht, als nicht allgemein bewiesen ist, daß jeder Konzentrationsstoff störend wirken und jedes Sachgebiet des Rechnens ein Bestandteil des eigentlichen Konzentrationsstoffes sein muß."

Als Beispiel für die praktische Durchführung des rechenunterrichtlichen Konzentrationsprinzips, die von vielen Methodikern mit mehr oder minder Glück versucht worden ist, möchte ich aus Stucki, Rechnen im Anschluß an den Realunterricht, folgende Sachgebiete für die Mittelstufe der Volksschule anführen:

A. Aus dem botanischen Unterricht: 1. Der Raps (13 Aufgaben); 2. die Kartoffel (18 Aufg.); 3. der Löwenzahn (10 Aufg.); 4. der Hanf (10 Aufg.); 5. die Erdbeere (14 Aufg.); 6. das englische Raigras (9 Aufg.); 7. unsere Obstbäume (23 Aufg.); 8. das Getreide (20 Aufg.)

B. Aus dem zoologischen Unterricht: 1. Die Ziege (12 Aufgaben); 2. die Honigbiene (15 Aufg.); 3. etwas über die Muskelkraft der Insekten (15 Aufg.); 4. über die Singvögel (13 Aufg.); 5. der Seidenspinner (15 Aufg.); 6. das Rind (35 Aufg.).

C. 6 Gruppen von Aufgaben aus der Heimatskunde mit zusammen 99 Aufgaben.

D. 9 Gruppen von Aufgaben aus der Geographie mit zusammen 172 Aufgaben, darunter z. B. 9 über „Unser Schulwesen".

Es steckt gewiß ein tüchtiges Stück Arbeit in dieser Auswahl von Aufgaben, und es ist nicht zu verkennen, daß das Interesse der Schüler am Rechnen aber auch am Sachgebiete durch diese mathematische Beleuchtung ganz besonders erregt werden muß, aber jeder Praktiker weiß, daß sich z. B. der Ausführung doch recht viele Hindernisse in den Weg

stellen. Die Rechenaufgaben, die im Anschluß an eins der genannten Gebiete gegeben werden, können unter Umständen alle Arten des Rechnens umfassen. Die Kinder müssen also schon rechnen können, sonst wird das „Durchlaufen der Rechnungsarten im buntesten Wechsel“ (siehe oben Thrändorfs Ausspruch über den bunten Wechsel der Sachgebiete) verderbenbringender wirken als sonst der bunte Wechsel der Sachgebiete. Nun kann man z. B. bei der Betrachtung der Kartoffel entweder die angeführten 18 Rechenaufgaben geben, und man wird den Rechenunterricht wesentlich unterstützen, oder man bringt diese Aufgaben in der notwendigen rechnerischen Verteilung bei den einzelnen Rechnungsarten in der Anwendungsstufe. Es ist also nicht ausgeschlossen, daß die Kartoffel an mehr als einer Stelle als Sachgebiet für das Rechnen auftreten kann. Zu empfehlen wird es ferner sein, bei der Einführung einer neuen Rechnungsart ein leichteres Sachgebiet zu wählen, an dem die Kinder zuerst die Notwendigkeit dieser Rechnungsart erkennen und ein Interesse hierfür gewinnen. Hierauf folgt die Übung an einfachen benannten bzw. unbenannten Zahlen und der gewonnenen Kraft wird dann in der Anwendungsstufe aus dem ersten oder aus einem oder mehreren verwandten Sachgebieten geeigneter Stoff geboten.

Häufig wird man sich bei der Heranziehung mancher Sachgebiete über deren Beziehung zum Kindesgeiste täuschen. Die Betrachtung des Wohnzimmers von der Schulstube aus, die Möglichkeiten, die im Obstgarten in fruchtbaren und unfruchtbaren Jahren eintreten können, die Anzahl der Familien im Wohnhause (Mietskaserne), die Anzahl der Laternen in der Straße usw. sind nicht ganz unbedenklich für 6jährige Kinder. Andererseits wird manches Sachgebiet nach allen möglichen und unmöglichen Richtungen hin ausgenutzt, und es ist mindestens fraglich, ob hierdurch das Interesse der Kinder geweckt oder ob dasselbe getötet wird. Man kann auch hierin zu weit gehen, und man ist in der Verfolgung dieses teleologischen Prinzips zu weit gegangen. Der Altmeister Diesterweg hat hierüber schon sehr richtig gesagt: „Unter praktischer Richtung verstehe ich nicht die unausgesetzte Berücksichtigung des künftigen und unmittelbaren Bedarfs im engen Lebenskreise, sondern die Art des Unterrichts, welche dem Schüler nichts gibt, ihn zu nichts anleitet, was weder für die Erhellung des Kopfes noch für die Stärkung der Willenskraft eine Bedeutung hat. Alles, was er lernt, muß unmittelbar entweder auf den menschlichen Geist oder im menschlichen Leben verwendbar sein.“

Es ist naturgemäß, daß dem Kopfrechnen die Einführung und ein Teil der Übung und Anwendung an kleineren Zahlen und durchsichtigen Verhältnissen, dem Tafelrechnen die Übung und Anwendung an größeren Zahlen und mäßig schweren Verhältnissen zufallen wird. Das Kopfrechnen kann vielleicht das bieten, was ein für einen weiten Kreis geschriebenes Tafelrechenheft nicht immer geben kann, nämlich das unmittelbare Eingehen auf die Umgebung der Kinder mit allen Eigentümlichkeiten derselben. Es muß nun die Aufgabe des Lehrers sein, hier geeignete Sachgebiete auszuwählen und an der rechten Stelle zu verwenden. Wenn ein Kopfrechenheft im Unterricht gebraucht werden soll, so kann dies nur die Form und vielleicht

auch die Reihenfolge der Aufgaben bestimmen, den Inhalt muß der Lehrer geben. Nur, wenn er dies tut, wird er wirklich innere Befriedigung am Rechenunterrichte finden.

Wir fassen im Anschluß an die vorstehenden Ausführungen unsere Ansicht über die rechnerischeu Sachgebiete dahin zusammen:

1. Jedes Rechengebiet schöpft seine Aufgaben aus Sachgebieten, die sich anlehnend an die Entwicklung der Kinder von Jahr zu Jahr erweitern.

2. Bei der Neueinführung einer Rechnungsart werden geeignete Aufgaben einem Sachgebiete entnommen, und hieran wird die Notwendigkeit der Rechnungsart dargelegt; hierauf folgt ausgedehnte Übung an sogenannten abstrakten Aufgaben zur Gewinnung der Rechenfertigkeit, und diese wird dann wieder in den Dienst des ersten und auch in den Dienst anderer Sachgebiete gestellt. Die Anzahl der Aufgaben auf der Anwendungsstufe muß zahlreich genug sein, daß Selbständigkeit und unbedingte Sicherheit erzielt werden kann.

3. Eine allseitige Ausbeutung jedweden Sachgebietes ist in einem Rechenbuche, das für weitere Gebiete geschrieben ist, unmöglich; das Rechenbuch kann nur gewisse typische Sachgebiete ausnutzen. Wünschenswert wird es aber sein, wenn jeder Lehrer im Anschluß an die im Rechenbuche behandelten Sachgebiete die besonderen Sachgebiete seiner Gegend im Rechenunterricht verwertet.

4. An einzelnen Stellen werden mit Absicht Aufgaben aus verschiedenen Sachgebieten zusammengestellt, damit die Kinder auch in der so wichtigen selbständigen Beurteilung der Aufgaben geübt werden.

Von den Sachgebieten, die in meinen bei H. Herrosé in Wittenberg erschienenen Aufgaben zum Tafelrechnen, Ausgabe A für Stadtschulen und andere mehrklassige Volksschulen, herangezogen worden sind, hebe ich folgende hervor:

1. Schuljahr.

(Zahlenkreis von 1—20.)

Märchen mit rechnerischem Beiwerk; außerdem: Schulstube; Schulhaus; Schulhof; Schulgarten; kleine Münzen, nämlich: das Pfennigstück; das Zweipfennigstück; das Fünfpfennigstück und das Zehnpfennigstück.

2. Schuljahr.

(Zahlenkreis bis 100.)

Bei der Wiederholung die wichtigsten Sachgebiete des 1. Schuljahres; außerdem: Unser Garten; unsere Haustiere; kleine Ausgaben; unser Blumen-, Obst- und Gemüsegarten; unser Haus; die Ergebnisse der Jagd; die Münzen bis zum Markstück, das Meter und das Zentimeter, das Hektoliter und Liter.

3. Schuljahr.

(Zahlenkreis bis 1000.)

Bei der Wiederholung sowohl wie auch bei der Neubehandlung sämtliche Sachgebiete des 2. Schuljahres; außerdem: Die Straße (Zählen der Häuser und Messen der Längen); Haushaltungsausgaben; Invalidenrente; Wohltätigkeit; Münzen, Maße und Gewichte u. a. m.

4. Schuljahr.

(Höherer Zahlenkreis.)

Bei der Wiederholung geeignete Sachgebiete aus den früheren Schuljahren; außerdem: Die Stadt; der Amtsbezirk; die Volkszählung; die Entfernungen; die Versicherungen; Haushaltungsausgaben; Bestellung des Ackers; Ernte; Zeitmaße u. a. m.

5. Schuljahr.

(Das Rechnen mit mehrfach benannten Zahlen.)

Die Münzen, Maße und Gewichte; Haushaltungsausgaben; Rechnungen; aus der Tararechnung; aus der Rabattrechnung; Invalidenversicherung; die Post; Lohn und Preisberechnungen, Zinsberechnungen u. a. m.

6. Schuljahr.

(Bruchrechnung.)

Die wichtigsten Sachgebiete aus den früheren Schuljahren werden hier unter der Berücksichtigung des Bruchs herangezogen; außerdem Raumberechnungen.

7. Schuljahr.

(Anwendung der Bruchrechnung auf Regelbetri- und Durchschnittsrechnung; erweiterte Regelbetri, Zeitrechnung; Invalidenversicherung; Verhältnis- und Prozentbestimmungen.)

Die wichtigsten Sachgebiete aus den früheren Jahren; außerdem: Unsere Tabaksindustrie; von unserer Landwirtschaft; unser Verkehrswesen; fremde Münzen und Maße; Steuern; Zölle; allgemeine Haushaltungsausgaben; Gewinn- und Verlustrechnung; aus der Rabattrechnung; Raumberechnungen.

8. Schuljahr.

(Die bürgerlichen Rechnungsarten.)

Wichtige frühere Sachgebiete werden wiederholend herangezogen; außerdem: Zinsrechnung; Rabattrechnung; Gesellschaftsrechnung; Mischungsrechnung; Versicherungen; aus dem Haushalt der Familie und Gemeinde; Nahrungswert der Nahrungsmittel; landwirtschaftliche Aufgaben; physikalische Aufgaben, Raumberechnungen u. a. m.

Ich wiederhole, daß man nie vergessen möge, daß die Aufgabensammlungen nur die Form geben, die der Lehrer mit lebendigem Inhalt erfüllen muß.

6. Behördliche Bestimmungen über den Rechenunterricht.

Für die Entwicklung der Methodik eines Unterrichtsfaches ist es nicht unwichtig, wenn von Zeit zu Zeit das von vielen Seiten Anerkannte durch behördliche Bestimmungen festgelegt wird. Zunächst wird das Festgelegte eingehend und kritisch untersucht, und dann bildet es einen Baustein zum weiteren Ausbau des betreffenden Unterrichtsgebietes; es ist eine neue Sprosse an der Leiter, an denen die Methodiker bis zum möglichst hohen Standpunkt gelangen wollen und sollen. Solche Bestimmungen sind also gewöhnlich Endglieder langer Entwicklungsreihen und Vorstufen neuer Forschungen. — Wir sind jetzt in der glücklichen Lage, bei den behördlichen Bestimmungen für unsere Volksschule anerkennen zu können, daß sie die Ergebnisse der Pädagogik und die Bedürfnisse der Volksschule berücksichtigen und das Erreichbare feststellen. — Hier sollen nun nicht allein die auf das Rechnen bezugnehmenden Abschnitte der preußischen Bestimmungen, sondern auch die von einigen anderen deutschen Staaten aufgeführt werden. Die Beurteilung ergibt sich leicht und wird durch Vergleichung der Bestimmungen noch erleichtert.

Für den Rechenunterricht in den Volksschulen **Preußens** sind die „**Allgemeinen Bestimmungen vom 15. Oktober 1872**" maßgebend. Diese Bestimmungen sagen im § 28 vom Rechenunterricht:

Auf der Unterstufe werden die Operationen mit benannten und unbenannten Zahlen im Zahlenraume von 1 bis 100, auf der mittleren diejenigen im unbegrenzten Zahlenraume mit benannten und unbenannten Zahlen gelernt und geübt; auf der letzteren auch angewandte Aufgaben aus der Durchschnittsrechnung, Resolutionen und Reduktionen und einfache Regeldetri gerechnet; Pensum der Oberstufe sind die Bruchrechnung, welche bereits auf den unteren Stufen in der geeigneten Weise vorbereitet werden muß, und deren Anwendung in den bürgerlichen Rechnungsarten, sowie eingehende Behandlung der Dezimalbrüche.

In der mehrklassigen Schule erweitert sich das Pensum in den bürgerlichen Rechnungen durch Aufnahme der schwierigeren Arten und das in der Rechnung mit Dezimalen durch die Lehre von den Wurzelextraktionen.

Auf der Unterstufe wird in der Schule mit einem oder zwei Lehrern, soviel es sein kann, in der mehrklassigen Schule regelmäßig nur im Kopfe gerechnet. Bei Einführung einer neuen Rechnungsart geht auf allen Stufen das Kopfrechnen dem Tafelrechnen voran. Bei der praktischen Anleitung ist überall die Beziehung auf das bürgerliche Leben ins Auge zu fassen; darum sind die Exempel mit großen und vielstelligen Zahlen zu vermeiden und die angewandten Aufgaben so zu stellen, wie sie den wirklichen Verhältnissen entsprechen.

Durch diese Aufgaben sind die Schüler zugleich mit dem geltenden System der Maße, Münzen und Gewichte bekannt zu machen.

Das Rechnen ist auf allen Stufen als Übung im klaren Denken und richtigen Sprechen zu betreiben; doch ist als der letzte Zweck stets die Befähigung der Schüler zu selbständiger, sicherer und schneller Lösung der ihnen gestellten Aufgaben anzusehen.

Dem Unterricht sind in allen Schulen Aufgaben-(Schüler-)Hefte, zu denen der Lehrer das Fazitbüchlein in Händen hat, zugrunde zu legen.

22 Jahre später, am 31. Mai 1894, wurden in dem Lehrplan für die höhere Mädchenschule für Preußen folgende auf den Rechenunterricht bezüglichen Bestimmungen erlassen:

V. Rechnen: a) Allgemeines Lehrziel: Sicherheit und Gewandtheit im Rechnen mit Zahlen und in dessen Anwendungen auf die gewöhnlichen Verhältnisse des bürgerlichen Lebens, namentlich auf dem Gebiete der Hauswirtschaft, des Spar- und Versicherungswesens und der einfachen Vermögensverwaltung. Förderung klaren und besonnenen Denkens durch vielseitige Anschauung und Benutzung der Zahl.

Letzter Zweck bleibt die Befähigung der Schülerinnen zu selbständiger und schneller Lösung der ihnen gestellten Aufgaben.

b) Lehraufgabe: Das Rechnen mit einfach benannten ganzen Zahlen bildet das Pensum der Unterstufe (1.—3. Schuljahr), das Rechnen mit mehrfach benannten Zahlen, mit Dezimalbrüchen und gemeinen Brüchen und leichte angewandte Aufgaben das Pensum der Mittelstufe (4.—6. Schuljahr). Der Oberstufe fällt zu die ausgiebige Anwendung des so erlernten Rechnens auf die im Anschauungskreise der Schülerinnen liegenden bürgerlichen Verhältnisse, sowie der auf Anschauung zu begründende und mit Meß- und Rechenoperationen in beständiger Verbindung zu haltende Unterricht in der elementaren Raumlehre.

Besonderes Gewicht ist zu legen auf die Sicherheit des Kopfrechnens im Zahlenkreise von 1—1000, auf das angewandte Rechnen mit Dezimalbrüchen bei Münzen, Maßen und Gewichten, auf die Prozentrechnung mit ihren verschiedenen Anwendungen, auf Sicherheit der geometrischen Grundbegriffe und der einfachen Flächenberechnungen. Auf allen Stufen empfiehlt sich bei der Auswahl der Aufgaben die Berücksichtigung des bürgerlichen Haushalts.

c) Methodische Bemerkungen: Auf der Unterstufe wird regelmäßig nur im Kopfe gerechnet, in den Klassen IX und VIII unter Anwendung einer Rechenmaschine (Rechenkasten). Bei Einführung einer neuen Rechnungsart geht auf allen Stufen das Kopfrechnen dem schriftlichen Rechnen voran; dieses ist zugunsten des Kopfrechnens möglichst zu beschränken. Die Aufgaben aus dem Leben sind stets so zu wählen, daß die Schüler mit den tatsächlichen hier in Betracht kommenden Verhältnissen bekannt werden; Aufgaben mit unwahrscheinlichen großen Zahlen oder unwahrscheinlichen Bruchteilen sind zu vermeiden, ebenso nicht gebräuchliche Formen und Ausdrücke. Schematische Regeln sind besonders auch bei der Bruchrechnung und bei der Anwendung des Dreisatzes und des Vielsatzes entbehrlich. Algebraisches Rechnen auch in seinen Anfängen

ist ausgeschlossen. Es kommt alles darauf an, die Schülerin zum sichern Überblick über die in Betracht kommenden Verhältnisse und Beziehungen zu befähigen und zur einfachsten und schnellsten Lösung der Aufgaben zu führen. Die Ausdrucksweise sei kurz und bestimmt.

Es dürfte angebracht sein, hier auch einige Abschnitte aus den am 1. Juli 1901 herausgegeben preußischen „Bestimmungen, betreffend das Seminar- und Präparandenwesen“ anzuführen, soweit diese das Volksschulrechnen betreffen. Das eigentliche Volksschulrechnen schließt mit der 2. Klasse der Präparandenanstalt (Schüler von 15 bis 16 Jahren), ab. Die Gründe dafür, daß dies Volksschulrechnen überhaupt in den Lehrplan aufgenommen worden ist, sind nach Angabe der Bestimmungen der „ver-schiedene Bildungsgang der aufzunehmenden Zöglinge“ und die Notwendigkeit, „die Schüler zu gleicher Bildungs- und Leistungsfähigkeit“ zu fördern; deshalb ist „der Lehrstoff der Oberstufe der Volksschule in seinen hauptsächlichen Teilen wiederholend durchzuarbeiten und entsprechend zu erweitern“.

Über die Behandlung sind folgende Bestimmungen wichtig: „... Auf das Kopfrechnen ist besonderes Gewicht zu legen; hierbei ist nach Sicherung des Normalverfahrens auch auf die Benutzung der sich darbietenden Rechenvorteile hinzuweisen. Zur Förderung der Gewandtheit und Sicherheit im Kopfrechnen sind in jeder Rechenstunde mannigfaltige Übungen vorzunehmen, die mit dem behandelten Stoffe im Zusammenhang stehen und zu denen auch die Lösungen algebraischer Aufgaben durch einfach Schlüsse (ohne Gleichungen) gehören.

Die Aufgaben für das angewandte Rechnen sind aus den Verhältnissen des praktischen Lebens (des Lebens im Hause, des landwirtschaftlichen, gewerblichen, kaufmännischen Betriebes, des Verkehrslebens, der staatlichen und kommunalen Wirtschafts- und Wohlfahrtseinrichtungen u. a.) und auch aus den Gebieten einzelner Wissenszweige (wie Naturkunde, Geographie) zu entnehmen, es ist dabei auch darauf Bedacht zu nehmen, statt zusammenhangsloser Mannigfaltigkeit diese Aufgaben mit Beziehung auf die bezeichneten Gebiete nach sachlichen Gesichtspunkten zu Gruppen zu ordnen.

Bei geeigneten Stellen schließen sich volkswirtschaftliche Belehrungen an (z. B. über Arbeit, Kapital; Preisbildung, Lohn; Miete, Pacht, Zins; Wertpapiere, Wechsel- und Scheckverkehr; Märkte, Messen, Börsen; Haushalt der Familie, des Gewerbebetriebes, der Gemeinde, des Staates; Zölle, Steuern; Versicherungswesen u. a.) ...“

Im Königreich Sachsen gelten für das Rechnen nach dem „Lehrplan für die einfachen Volksschulen des Königreichs Sachsen vom 5. November 1878“ folgende Bestimmungen:

§ 4. Rechnen: „Der Rechenunterricht soll die Schüler befähigen, im Verkehr des gewöhnlichen Lebens vorkommende Berechnungen selbständig und sicher auszuführen.

Die Schüler sind daher in anschaulich entwickelnder Weise zum Verständnis der einschlagenden Rechenoperationen anzuleiten, hauptsächlich

aber in der mündlichen und schriftlichen Lösung praktisch gewählter Aufgaben mit mäßigen Zahlen zu üben.

Innerhalb der ersten vier Schuljahre werden die Grundrechnungsarten in den Gebieten 1 bis 10, 1 bis 100, 1 bis 1000 teils mit gleich-, teils mit ungleichbenannten Zahlen erläutert und geübt; doch soll die Erweiterung des Zahlenraumes über 1000 hinaus nicht ausgeschlossen sein. Dabei ist die Kenntnis der deutschen Münze, Maße und Gewichte zu begründen, die Bruchrechnung durch gelegentliche Anwendung der gebräuchlichsten gemeinen und Dezimalbrüche, die Regeldetri durch Gewöhnung an den Schluß über die Einheit vorzubereiten.

Demgemäß wird innerhalb der letzten vier Schuljahre zuvörderst die Einübung der Grundrechnungsarten fortgesetzt und zu Ende geführt; alsdann gelangt die Rechnung mit Brüchen, vornehmlich Dezimalbrüchen, endlich die Regeldetri unter Anwendung auf die wichtigsten bürgerlichen Rechnungsarten zur Behandlung. Die Regeldetriaufgaben werden lediglich nach dem Schlusse über die Einheit, nicht nach Proportionen gelöst.

Mündliches und schriftliches Rechnen sind in Verbindung zu betreiben.

Bei schriftlichen Berechnungen ist auf Sorgfalt der Ausführung streng zu halten.

Die Zahl der Abteilungen ist in allen Klassen möglichst zu beschränken.

Als Lehrmittel sind außer der Rechenmaschine Aufgabenhefte für die Hand der Schüler erforderlich."

Kurz sind die in der Ministerial-Verordnung vom Jahre 1875 für das Großherzogtum Sachsen-Weimar gegebenen Bestimmungen. Es heißt im § 3, Punkt 4: „Rechnen mit Zahlen und Raumgrößen. An der Unterstufe, welche sich mit Bilden, Zerlegen und Verbinden der Zahlen von 1 bis 100 beschäftigt, werden die vier Grundrechnungsarten an ein- und zweistelligen Zahlen geübt.

Die Mittelstufe erreicht eine angemessene Fertigkeit in den vier Grundrechnungsarten mit ungleich benannten Zahlen. Mündliches und schriftliches Rechnen mit dem Schluß auf die Einheit. Die Aufgaben sind vorzugsweise aus dem Gebiete der Haus- und Landwirtschaft zu entnehmen. Betrachtung mathematischer Körper und ihre Begrenzung.

Auf der Oberstufe die vier Grundrechnungsarten mit gemeinen und Dezimalbrüchen. Die verschiedenen Anwendungen des Schlusses auf die Einheit in schwierigen Aufgaben. Kenntnis der gangbaren Münzen, Maße und Gewichte, Übungen im Messen und Berechnen der im gewöhnlichen Leben als meßbare Raumgrößen am häufigsten vorkommenden Flächen und Körper. Die Aufgaben sind vorzugsweise aus der Haus- und Landwirtschaft und dem Gewerbsleben zu wählen."

Noch kürzer sind die Bestimmungen des Hamburger „revidierten Lehrplans für die siebenstufigen Volksschulen für Knaben (1896) nebst Anhang, enthaltend den Lehrplan für die Selekten für Knaben". Es wird hierin über „Rechnen und Algebra" folgendes geschrieben:

a) Lehrziel.

Die Schüler sollen eine klare Einsicht in die Gesetze der Zahlen und Fertigkeit in den einzelnen Rechenoperationen erlangen und befähigt werden, Aufgaben aus dem praktischen Leben sicher und gewandt zu lösen.

Unter b folgt die Stoffverteilung, die hier übergangen werden mag; nur eine Bemerkung aus der Stoffverteilung der Selekta soll erwähnt werden, es heißt dort u. a.: Rechnen. Schwierigere Aufgaben aus dem Gebiete des bürgerlichen Rechnens mit besonderer Berücksichtigung der vaterstädtischen Verhältnisse.

Ähnliche Bestimmungen gelten für den Volksschulrechenunterricht auch in deu übrigen deutschen Staaten.

7. Grundsätze über die Verteilung des Rechenstoffs in der mehrklassigen Schule.

In der mehrklassigen Schule wird der Rechenstoff je nach der Anzahl der Klassen verschieden auf dieselben verteilt werden. Eine Angabe der Klasse, welche einen gegebenen Rechenstoff behandeln soll, würde deshalb vielfach ungenau sein und falsch verstanden werden können. Die Allgemeinen Bestimmungen verteilen daher den Rechenstoff nur auf Unter-, Mittel- und Oberstufe und überlassen den Lehrplänen der einzelnen Schulen die weitere Gliederung.

In der dreiklassigen Dorfschule wird jede dieser 3 Stufen in wenigstens 2 Abteilungen zerfallen, so daß der gesamte Rechenstoff in mindestens 6 Jahrespensen geteilt werden muß. Zwei Abteilungen für jede Klasse sind meistens ausreichend, aber auch nicht zu viel. Stundenlanges, angestrengtes Kopfrechnen ermattet die Schüler zu sehr, die Formen des Tafelrechnens müssen auch durch häufige Übung befestigt werden, daher muß in angemessener Weise Kopf- und Tafelrechnen abwechseln. Das Tafelrechnen braucht dadurch nicht zu sehr bevorzugt zu werden, da der Lehrer jederzeit, auch wenn er sich nicht mit der Abteilung direkt beschäftigt, das Kopfrechnen üben lassen kann. Vergleiche hier die für die einklassige Schule empfohlenen Hilfsmittel, als: a) Gleichzeitige Beschäftigung von zwei Abteilungen an demselben Stoff, b) Beschäftigung durch Helfer, c) Kopfrechnen auf der Tafel durch Reihenbilden. — Zur Unterstufe gehören zwei Jahrgänge, hier also die 6. und 5. Abteilung. Der Rechenstoff der Unterstufe ist der Zahlenkreis bis 100. Nach der gebräuchlichsten Stoffverteilung wird die 6. Abteilung den Zahlenkreis bis 20, die fünfte Abteilung den bis 100 behandeln. Nach der Kaselitzschen Verteilung würden der 6. Abteilung die operativen Zahlen 1 bis 4 in den Zahlenkreisen bis 40 und der 5. Abteilung die operativen Zahlen von 5 bis 10 in den Zahlenkreisen bis 100 nebst den Ergänzungsaufgaben zufallen. Von den drei Jahrgängen der Mittelstufe werden die beiden ersten die 4. und der letzte die 3. Abteilung bilden. Jedes Kind der 4. Abteilung wird den Rechenstoff 2 mal durchmachen, daher kann dann dieser Abteilung der umfangreichere Stoff, die vier Grundrechnungsarten im Zahlenkreise bis

1000 und im größeren Zahlenkreise, zugewiesen werden; für die 3. Abteilung bleiben dann die vier Grundrechnungsarten mit mehrfach benanten Zahlen, die Durchschnittsrechnung und die Regeldetri übrig. Für die Oberstufe bleiben noch drei Jahrgänge übrig, doch lehrt die Erfahrung, daß nicht alle Kinder mit dem 6. Schuljahre die Oberstufe erreichen. Es werden sich hier die zwei Abteilungen ungesucht ergeben. Die Kinder, welche drei Jahre in der Oberstufe verweilen, werden entweder den Stoff der 2. oder meistens den der 1. Abteilung 2mal durchmachen. Die 2. Abteilung wird die Bruchrechnung, die 1. Abteilung die bürgerlichen Rechnungsarten behandeln.

In vierklassigen Schulen schon ist es möglich, daß jeder Jahrgang eine Rechenabteilung bildet; denn da die acht Jahrgänge gleichmäßig auf die Klassen verteilt sein werden, hat jede Klasse zwei Jahrgänge und zwei Rechenabteilungen. Die Forderung der Übereinstimmung der Anzahl der Rechenabteilungen mit der Anzahl der Jahrgänge ist für fünf-, sechs- und siebenklassige mit aller Entschiedenheit zu stellen. Es werden dann entweder drei, zwei oder nur eine Klasse je zwei Rechenabteilungen enthalten. In achtklassigen Schulen ist in jeder Klasse selbstverständlich auch nur eine Rechenabteilung.

Für die Verteilung des Rechenstoffs bei einer mehr als dreiklassigen Schule wird man, um Mißverständnisse zu vermeiden, stets das Schuljahr angeben, in dem der betreffende Stoff behandelt werden soll. Über die ausführliche Stoffverteilung in mehrklassigen Schulen vergleiche den folgenden Abschnitt.

8. Stoffverteilungs- und Wiederholungspläne für den Rechenunterricht in mehrklassigen Schulen.

Der Rechenunterricht ist wohl derjenige Unterricht, bei dem sich jede Vernachlässigung am ehesten und am fühlbarsten spürbar macht. Daher erklärt sich die Unzufriedenheit, die Schulrevisoren und Lehrer besonders bei der Beurteilung der Rechenleistungen so sehr häufig empfinden. — Wie kommt es aber, daß selbst bei treuester Arbeit und unter Beachtung aller gegebenen Vorteile der Rechenunterricht nicht immer den gewünschten Erfolg hat, daß vielfach das Verständnis, häufiger noch die Fertigkeit fehlt? Rechenverständnis wird durch korrekte Darbietung gewonnen, durch vertiefende Aufgaben befestigt und durch stetige Wiederholung erhalten; Rechenfertigkeit kann nur durch fortgesetzte Übung erworben und durch andauernde Wiederholung erhalten werden. Es kann mithin nur an der nicht ausreichenden Wiederholung liegen, wenn das früher Erworbene verloren gegangen ist, und wir müssen deshalb der Wiederholung bei Erstrebung befriedigender Rechenleistungen unsere ganz besondere Aufmerksamkeit zuwenden. Nun genügt es nicht, wenn wir in den Rechenstunden bald hier, bald dort, wo es gerade fehlt, und wenn uns zufällig Zeit dazu bleibt, frühere Erkenntnisse auffrischen und eine verloren gegangene Fertigkeit zurückzuerobern suchen. Die Wiederholung muß eine planmäßige sein, und ihr muß in jeder Rechenstunde eine wenn auch kurze Zeit gewidmet werden. Gerade das letztere wird von den [illegible] Lehrern am

häufigsten versäumt, da die Freude am Unterricht sie von der Wiederholung abhält. — Die nachfolgenden Pläne setzen den wöchentlichen Wiederholungsstoff durch alle acht Schuljahre hindurch fest. Der Rechenlehrer kennt die Wichtigkeit der Gebiete, die in den Plänen häufiger herangezogen werden als andere. Die Pläne wollen aber auch den Rechenlehrer zwingen, an die stündliche Wiederholung zu denken und sich an dieselbe zu gewöhnen.

Es wird in jeder Rechenstunde eine kurze Zeit der Wiederholung zugewiesen. Je sicherer sich die Kenntnis der wiederholten Gebiete erweist, desto mehr kann die Wiederholungszeit abgekürzt werden. Am leichtesten und eindringlichsten wird die Wiederholung in Klassen sein, die mehrere Rechenabteilungen vereinen. In mehrklassigen Schulen werden meistens nur 2 Abteilungen zu einer Klasse gehören. In solchen Klassen wiederholt die obere Abteilung zunächst mit der unteren den Wiederholungsstoff der letzteren, dann aber in besonderer Zeit oder im Anschluß an den Unterricht der zweiten Abteilung die Rechenstoffe der zweiten Abteilung. Die normale Verteilung der Zeit für die Wiederholung und für die Durchnahme des neuen Stoffes dürfte in jeder Woche vielleicht folgende sein:

1. Std. { 10 Min. Wiederholung mit beiden Abteilungen. (Stoff der 2. Abt.)
25 „ II. Abteilung Kopfrechnen; I. Abteilung Tafelrechnen.
25 „ II. „ Tafelrechnen; I. „ Kopfrechnen.

2. Std. { 5 Min. Wiederholung mit beiden Abteilungen. (Stoff der II. Abt.)
25 „ II. Abt. Tafelrech.; I. Abt. 5 Min. Wiederhol. und 20 Min. [Kopfrechnen.
30 „ II. „ Kopfrech.; I. „ Tafelrechnen.

3. Std. wie 1. Std.
4. Std. wie 2. Std.

Abweichungen von diesem Normalplan werden eintreten und können nicht vermieden werden; nur darf sich der Lehrer nicht zu weit von dem gegebenen Plan entfernen, weil sonst die oben erwähnten Übelstände eintreten werden.

Um die Übersicht über das jedesmalige Rechengebiet zu erleichtern, sind die Stoffverteilungspläne den Wiederholungsplänen gegenübergestellt worden. Daß in den erstgenannten der Stoff nicht auf Wochen, sondern auf Monate verteilt worden ist, bedarf keiner weiteren Begründung. Die Rechenstoffe selbst sind nach den in R. Herrosés Verlag (H. Herrosé) in Wittenberg erschienenen Rechenheften des Verfassers, und zwar nach der im Jahre 1903 vollendeten vollständigen Umarbeitung derselben, geordnet.

1. Schuljahr.

(Aufgaben zum Tafelrechnen von Schroeter, Ausgabe A, 1. Heft.)

Stoffverteilungsplan. **Wiederholungsplan.**

1. und 2. Vierteljahr.

April und Mai: Einführen und Befestigen der Zahlen von 1—5. (Gruppe 1 und 2.)

Allgemeine Grundsätze für die Wiederholung im 1. und 2. Schuljahr.

1. Nach der jedesmaligen Erweiterung

Juni: Einführen und Befestigen der Zahlen von 6 bis 10; Zu- und Abzählender 1. (Gruppe 3 und 4.) Juli und August: Zu- und Abzählen der 2, 3, 4 und 5. (Gruppe 5 bis 12.) September: Zu- und Abzählen der 6, 7, 8, und 9. (Gruppe 13 bis 18.)	des Zahlenraumes werden in dem neu erschlossenen Gebiete zunächst die vorher behandelten Zahlen zu- und abgezählt. (Siehe Stoffverteilungsplan.) 2. Bei der Behandlung jeder Zahl werden in jeder Stunde Aufgaben mit anderen früher behandelten Zahlen eingestreut. (Es dient dies nicht nur zur Wiederholung, sondern auch zur Vermeidung von Einseitigkeit und Mechanismus.) Für das 1. und 2. Vierteljahr sind andere planmäßige Wiederholungsstoffe nicht aufzustellen.

3. Vierteljahr.

Oktober: Zu- und Abzählen; Erweiterung des Zahlenkreises bis 20. (Gruppe 19 und 20.) November: Zusammenzählen und Abziehen der 2, 3, 4 und 5. (Gruppe 21 und 22.) Dezember: Zu- und Abzählen der 6, 7, 8 und 9. (Gruppe 23 und 24.)	Fortgesetzte Wiederholung des Zahlenkreises von 1—10.

4. Vierteljahr.

Januar: Wiederholung des Zu- und Abzählens; Vereinigen von mehr als 2 Zahlen; Reihen. (Gruppe 25 bis 27.) Februar: Vervielfachen und Teilen. (Gruppe 28 und 29 bis Aufg. 7.) März: Vervielfachen und Teilen. (Gruppe 29, Aufg. 8 bis Gruppe 31.)	Fortgesetzte Wiederholung des Zahlenkreises bis 10 und des Zu- und Abzählens im Zahlenkreise bis 20.

2. Schuljahr.

(Aufgaben zum Tafelrechnen von Schroeter, Ausgabe A, 1. Heft.)

1. Vierteljahr.

Stoffverteilungsplan.	**Wiederholungsplan.**
April und Mai: Einführung des Zahlenkreises bis 100; Zahlenschreiben; Zuzählen von Einerzahlen. (Gruppe 32 bis 37.)	1. Woche: Zuzählen und Abziehen der 2 und 3 im Zahlenkreise bis 20.

Juni: Abziehen von Einerzahlen. (Gruppe 38 bis 42.)

Woche	Stoff
2. Woche:	Zuzählen und Abziehen der 4 und 5.
3. „	Zuzählen und Abziehen der 6 und 7.
4. „	Zuzählen und Abziehen der 8 und 9.
5. „	Zuzählen und Abziehen.
6. „	Vervielfachen und Teilen mit 2.
7. „	Vervielfachen und Teilen mit 3.
8. „	Vervielfachen und Teilen mit 4 und 5.
9. „	Vervielfachen und Teilen mit 6, 7, 8 und 9.
10. „	Allgemeine Wiederholung.

2. Vierteljahr.

Juli und August: Zusammenzählen zweistelliger Zahlen. (Gruppe 43 bis 46.)
September: Zusammenzählen zweistelliger Zahlen. (Gruppe 47 bis 49.)

Woche	Stoff
1. Woche:	Zuzählen und Abziehen der 2 im Zahlenkreise bis 100.
2. „	Dasselbe mit der 3.
3. „	„ „ „ 4.
4. „	„ „ „ 5.
5. „	„ „ „ 6.
6. „	„ „ „ 7.
7. „	„ „ „ 8.
8. „	„ „ „ 9.
9. „	Vervielfachen und Teilen im Zahlenkreise bis 20 mit den Zahlen 2 und 3.
10. „	Dasselbe mit den Zahlen 4, 5, 6, 7, 8 und 9.

3. Vierteljahr.

Oktober: Abziehen zweistelliger Zahlen. (Gruppe 50 bis 53.)
November: Abziehen zweistelliger Zahlen; Beginn des Vervielfachens. (Gruppe 54 und 55.)
Dezember: Vervielfachen. (Gruppe 56 und 57.)

Woche	Stoff
1. Woche:	Zuzählen und Abziehen der 2 und 3 im Zahlenkreise bis 100.
2. „	Dasselbe mit den Zahlen 4 und 5.
3. „	Dasselbe mit den Zahlen 6 und 7.
4. „	Dasselbe mit den Zahlen 8 und 9.
5. „ 6. „	Zuzählen zweistelliger Zahlen.
7. „ 8. „ 9. „	Vervielfachen und Teilen im Zahlenkreise bis 20.
10. „	Abziehen zweistelliger Zahlen.

4. Vierteljahr.

	Woche	
Januar: Teilen. (Gruppe 58 und 59.)	1. Woche:	Einmaleins der 2 und 3.
	2. „	„ „ 4 „ 5.
Februar: Teilen. (Gruppe 60 bis 62.)	3. „	„ „ 6 „ 7.
	4. „	„ „ 8 „ 9.
März: Teilen. (Gruppe 63 bis 66.)	5. „	Zuzählen und Abziehen einstelliger Zahlen.
	6. „	(wie 5.)
	7. „	Dasselbe mit zweistelligen Zahlen.
	8. „	(wie 7.)
	9. „	Die Einmaleinsreihen.
	10. „	(wie 9.)

3. Schuljahr.

(Aufgaben zum Tafelrechnen von Schroeter, Ausgabe A, Heft 2, 1. Abschnitt.)

Stoffverteilungsplan. — Wiederholungsplan.

1. Vierteljahr.

Stoffverteilungsplan	Woche	Wiederholungsplan
April: Einführung des Zahlenkreises bis 1000; Auflösen und Zusammenfassen; Zu- und Abzählen von einstelligen Zahlen. (1. Abschnitt: Vorübungen. Gruppe 1.)	1. Woche:	Zahlenzerlegen und Zahlenschreiben. Einmaleins der 2, Vervielfachen und Teilen mit 2.
	2. „	Zahlenzerlegen und Zahlenschreiben. Dasselbe mit 3.
	3. „	Zahlenzerlegen und Zahlenschreiben. „ „ 4.
	4. „	Zahlenzerlegen und Zahlenschreiben. „ „ 5.
Mai: Zusammenzählen zwei- und dreistelliger Zahlen. (Gruppe 2 und 3.)	5. „	Zahlenzerlegen und Zahlenschreiben. „ „ 6.
	6. „	Zahlenzerlegen und Zahlenschreiben. „ „ 7.
	7. „	Zahlenzerlegen und Zahlenschreiben. „ „ 8.
Juni: Zusammenzählen und Reihenbilden; Vorbereitung der Bruchrechnung. (Gruppe 4 bis 6.)	8. „	Zahlenzerlegen und Zahlenschreiben. „ „ 9.
	9. „	Zahlenzerlegen und Zahlenschreiben. „ „ 10.
	10. „	Zahlenzerlegen und Zahlenschreiben. Die Einmaleinsreihen.

2. Vierteljahr.

Stoffverteilungsplan	Woche	Wiederholungsplan
Juli und August: Abziehen. (Gruppe 7 bis 9.)	1. Woche:	Zusammenzählen im Zahlenkreise bis 1000. Einmaleins der 2, Vervielf. u. Teilen mit 2.
September: Abziehen und Reihenbilden. (Gruppe 10 bis 12.)	2. „	Zusammenzählen im Zahlenkreise bis 1000. Dasselbe mit 3.
	3. „	Zusammenzählen im Zahlenkreise bis 1000. „ „ 4.
	4. „	Zusammenzählen im Zahlenkreise bis 1000. „ „ 5.
	5. „	Zahlenzerlegen u. Zahlenschr. „ „ 6.
	6. „	Zusammenzählen im Zahlenkreise bis 1000. „ „ 7.
	7. „	Zusammenzählen im Zahlenkreise bis 1000. „ „ 8.
	8. „	Zusammenzählen im Zahlenkreise bis 1000. „ „ 9.
	9. „	Zahlenzerlegen u. Zahlenschr. „ „ 10.
	10. „	Die Einmaleinsreihen.

3. Vierteljahr.

Stoffverteilung	Woche	Wiederholung
Oktober: Vorbereitung d. Bruchrechnung; Vervielfachen. (Gruppe 13, 14 u. 15 bis Aufg. 24.)	1. Woche:	Zusammenzähl. im Zahlenkr. bis 1000 u. zw. in 3 Stdn. Kopfr. u. in 1 Std. Tafelr.
	2. „	(wie 1. Woche)
November: Vervielfachen. (Gr. 15 von Aufg. 25 bis Gruppe 16.)	3. „	Abziehen im Zahlenkreise bis 1000.
	4. „	(wie 3. Woche)
Dezember: Vervielfachen und Reihenbilden. (Gruppe 17 u. 18.)	5. „	Einmaleinsreihen der 2, 3, 4 und 5.
	6. „	Einmaleinsreihen der 6, 7, 8 und 9.
	7. „	Zusammenzählen im Zahlenkreise bis 1000.
	8. „	Abzieh. im Zahlenkr. bis 1000.
	9. „	Reihen für Zu- und Abzählen.
	10. „	Einmaleinsreihen.

4. Vierteljahr.

Stoffverteilung	Woche	Wiederholung
Januar: Teilen. (Gruppe 19 und 20.)	1. Woche:	Zusammenzählen im Zahlenkreise bis 1000.
	2. „	(wie 1. Woche)
Februar: Teilen. (Gruppe 21 und 22.)	3. „	Abziehen im Zahlenkreise bis 1000.
	4. „	(wie 3. Woche)
März: Teilen. Wiederholung. (Gruppe 23 und 24.)	5. „	Vervielfachen mit 2 und 3.
	6. „	„ „ 4 „ 5.
	7. „	„ „ 6.
	8. „	„ „ 7.
	9. „	„ „ 8.
	10. „	„ „ 9.

4. Schuljahr.

(Aufgaben zum Tafelrechnen von Schroeter, Ausgabe A, Heft 2, 2. Abschnitt.)

Stoffverteilungsplan. — **Wiederholungsplan.**

1. Vierteljahr.

Stoffverteilung	Woche	Wiederholung
April: Einführung in den höheren Zahlenkreis; Auflösen u. Zusammenfassen; Zahlenschreiben. (2. Absch., Vorübungen, Gr. 25.)	1. Woche:	Einmaleins (auch in Zehnern) der 2; Vervielfachen und Teilen mit 2.
Mai: Zusammenzählen. (Gruppe 26 und 27.)	2. „	Dasselbe mit 3.
	3. „	„ „ 4.
Juni: Zusammenzählen und Reihenbilden. Abziehen. (Gruppe 28 bis 30.)	4. „	„ „ 5.
	5. „	„ „ 6.
	6. „	„ „ 7.
	7. „	„ „ 8.
	8. „	„ „ 9.
	9. „	„ „ 10.
	10. „	Die Einmaleinsreih.

(Zu allen Wochen 1–10:) Zahlenzerlegen und Zahlenschreiben. (In jeder Woche je 1 Stunde.)

2. Vierteljahr.

Juli und August: Abziehen. (Gruppe 31 bis 33.)	1. Woche:	Zusammenzählen im höheren Zahlenkreise. (Kopfrechnen.)
September: Reihenbilden und Vervielfachen. (Gruppe 34 bis 36.)	2. „	Zusammenzählen im höheren Zahlenkreise. (Tafelrechnen.)
	3. „	Einmaleins (auch in Zehnern) der 2 und 3; Vervielfachen und Teilen mit 2 und 3.
	4. „	Dasselbe mit 4 und 5.
	5. „	„ „ 6 „ 7.
	6. „	„ „ 8 „ 9.
	7. „	Zahlenzerlegen und Zahlenschreiben; Vervielfachen und Teilen mit 10.
	8. „	Zusammenzählen im höheren Zahlenkreise. (Kopfrechnen.)
	9. „	Zusammenzählen im höheren Zahlenkreise. (Tafelrechnen.)
	10. „	Einmaleinsreihen.

3. Vierteljahr.

Oktober: Vervielfachen. (Gruppe 37 bis 39.)	1. Woche:	Zusammenzähl. (Kopfrechn.)
	2. „	„ (Tafelrechn.)
	3. „	Abziehen. (Kopfrechnen.)
	4. „	„ (Tafelrechnen.)
November: Vervielfachen. (Gruppe 40 und 41.)	5. „	Einmaleinsreihen der 2, 3, 4 u. 5 in Einer-, Zehner- und Hunderterzahlen.
Dezember: Teilen. (Gruppe 42 bis 44.)	6. „	Einmaleinsreihen der 6, 7, 8 u. 9 in Einer-, Zehner- und Hunderterzahlen.
	7. „	Reihen für Zu- u. Abzählen.
	8. „	„ „ „ „ „
	9. „	„ „ „ „ „
	10. „	Einmaleinsreihen.

4. Vierteljahr.

Januar: Teilen. (Gruppe 45 und 46.)	1. Woche:	Zusammenzähl. (Kopfrechn.)
Februar: Teilen. (Gruppe 47 und 48.)	2. „	„ (Tafelrechn.)
März: Grundfaktoren; das größte gemeinschaftliche Maß und das kleinste gemeinschaftliche Vielfache. (Gruppe 49 und 50.)	3. „	Abziehen. (Kopfrechnen.)
	4. „	„ (Tafelrechnen.)
	5. „	Vervielfachen mit 2 und 3.
	6. „	„ „ 4 „ 5.
	7. „	„ „ 6.
	8. „	„ „ 7.
	9. „	„ „ 8.
	10. „	„ „ 9.

5. Schuljahr.

(Aufgaben zum Tafelrechnen von Schroeter, Ausgabe A, 3. Heft.)

1. Vierteljahr.

Stoffverteilungsplan.

April: Einführung der Münzen und der Längen- und Flächenmaße; Auflösen und Zusammenfassen. (Gruppe 1 bis 4.)

Mai: Einführung der Körpermaße (Hohlmaße), der Gewichte, der Zeit- und Zählmaße; Auflösen und Zusammenfassen; Verwertung der Bruchteile. (Gruppe 5 bis 9.)

Juni: Dezimale Schreibweise; Zusammenzählen. (Gruppe 10 bis 13.)

Wiederholungsplan.

1. Woche: Zahlenschreiben; Zehnerordnung; Zerlegen der Zahlen.
2. Woche: Einmaleinsreihe der 2 u. 3 in Einern, Zehnern u. Hundertern; Teilen durch 2 u. 3.
3. Woche: Einmaleinsreihe der 4 u. 5 in Einern, Zehnern u. Hundertern; Teilen durch 4 u. 5.
4. Woche: Einmaleinsreihe der 6. u. 7 in Einern, Zehnern u. Hundertern; Teilen durch 6 u. 7.
5. Woche: Einmaleinsreihe der 8 u. 9 in Einern, Zehnern u. Hundertern; Teilen durch 8 u. 9.
6. Woche: Vervielf. mit reinen Zehnerzahlen; Teilen durch diese Zahlen.
7. Woche: Vervielfachen mit mehrstelligen Zahlen,
8. Woche: Vervielfachen mit mehrstelligen Zahlen,
9. Woche: Teilen durch mehrstellige Zahlen,
10. Woche: Teilen durch mehrstellige Zahlen.

(7.–10. Woche: vorwiegend schriftlich und auch als häusliche Aufgabe zu je einer Wochenstunde.)

2. Vierteljahr.

Stoffverteilungsplan.

Juli und August: Zusammenzählen u. Beginn des Abziehens. (Gruppe 14 bis 17.)

September: Abziehen. (Gruppe 18 bis 20.)

Wiederholungsplan.

1. Woche: Zahlenschreiben (auch in dezimaler Form); Zehnerordnung; Zahlenzerlegung.
2. Woche: Grundzahlen; größtes gemeinschaftl. Maß uud kleinstes gemeinschaftl. Vielfache.
3. Woche: Schulgemäße Lösungen aus allen 4 Grundrechnungsarten mit unbenannten Zahlen.
4. Woche: Reihen für Zu- u. Abzählen.
5. Woche: Einmaleinsreihen der 2, 3, 4 u. 5. Teilen durch 2, 3, 4 u. 5.
6. Woche: Einmaleinsreihen der 6, 7, 8 u. 9. Teilen durch 6, 7, 8. u. 9.

7. Woche: Vervielfachen mit mehrstelligen Zahlen.
8. Woche: Teilen durch mehrstellige Zahlen.
9. Woche: Teilen durch mehrstellige Zahlen.
10. Woche: Teilen durch mehrstellige Zahlen.

(vorwiegend schriftlich.)

3. Vierteljahr.

Oktober: Abziehen und Beginn des Vervielfachens. (Gr. 21 bis 25.)
November: Beendigung des Vervielfachens. (Gruppe 26 bis 30.)
Dezember: Teilen. (Gruppe 31 bis 34.)

1. Woche: Währungszahlen; Auflösen und Zusammenfassen.
2. Woche: Zusammenzählen von unbenannten und von mehrfach benannten Zahlen.
3. Woche: Zusammenzählen von unbenannten und von mehrfach benannten Zahlen.
4. Woche: Abziehen von unbenannten und von mehrf. benannten Zahlen.
5. Woche: Abziehen von unbenannten und von mehrf. benannten Zahlen.
6. Woche: Zehnerordnung; Zerlegen und Schreiben der Zahlen.
7. Woche: Größtes gemeinschaftl. Maß und kleinstes gemeinschaftl. Vielfache.
8. Woche: Algebraische Aufgaben.
9. „ „ „
10. „ „ „

4. Vierteljahr.

Januar: Beendigung des Teilens. (Gruppe 35 bis 37.)
Februar: Durchschnittsrechnung und Regeldetri. (Gr. 38 bis 41.)
März: Vermischte Aufgaben (Gruppe 42) und Wiederholung des Klassenstoffes.

1. Woche: Währungszahlen; Auflösen und Zusammenfassen.
2. Woche: Zusammenzählen unben. u. mehrfach benannter Zahlen.
3. Woche: Zusammenzählen unbenamnt. und mehrfach benannter Zahlen.
4. Woche: Abziehen unbenannter und mehrfach benannter Zahlen.
5. Woche: Abziehen unbenannter und mehrfach benannter Zahlen.
6. Woche: Einmaleinsreihen der 2, 3, 4 u. 5; Teilen durch 2, 3, 4 u. 5.
7. Woche: Einmaleinsreihen der 6, 7, 8 u. 9; Teilen durch 6, 7, 8 u. 9.
8. Woche: Schriftliches Vervielf. unbenannter und benannter Zahlen.

9. Woche: Schriftliches Teilen unbenannter und benannter Zahlen.
10. Woche: Schriftliches Teilen unbenannter und benannter Zahlen.

6. Schuljahr.

(Aufgaben zum Tafelrechnen von Schroeter, Ausg. A, Heft 4.)

1. Vierteljahr.

Stoffverteilungsplan.

April: Einführung des Bruches; Auflösen und Zusammenfassen; Von den Wertveränderungen des Bruches die Veränderungen des Zählers und das Vervielfachen des Nenners. (Gruppe 1 bis 4, Aufg. 18.)

Mai: Wertveränderungen des Bruches (Teilen des Nenners); Von den Formveränderungen das Erweitern und Kürzen der Brüche. (Gruppe 4, Aufg. 19 bis Gruppe 7, Aufg. 6.)

Juni: Das Kürzen der Brüche; Gleichnamigmachen. (Gruppe 7, von Aufg. 7 bis Gr. 8.)

Wiederholungsplan.

1. Woche: Dezimale Währungszahlen; Auflösen und Zusammenfassen.
2. Woche: Dezimale Schreibweise der mehrfach benannten Zahlen.
3. Woche: Nicht dezimale Währungszahl.; Auflösen und Zusammenfassen.
4. Woche: Zusammenzählen von mehrfach benannten Zahlen.
5. Woche: Abziehen von mehrfach benannten Zahlen.
6. Woche: Vervielfachen von mehrfach benannten Zahlen mit Einheiten der Zehnerordnung.
7. Woche: Vervielf. von mehrf. ben. Zahlen mit anderen Zahlen.
8. Woche: Teilen mehrfach benannter Zahlen durch Einheiten der Zehnerordnung.
9. Woche: Teilen mehrfach benannter Zahlen durch andere Zahlen.
10. Woche: Regeldetriaufgaben.

2. Vierteljahr.

Stoffverteilungsplan.

Juli und August: Zusammenzählen und Beginn des Abziehens. (Gruppe 9 bis 14.)

September: Abziehen und Beginn des Vervielfachens. (Gruppe 15 bis 17.)

Wiederholungsplan.

1. Woche: Zahlenschreiben (dezimale Form); Zehnerordnung; Zerlegen der Zahlen.
2. Woche: Schulgemäße Lösung von Zusammenzählungsaufgaben.
3. Woche: Schulgemäße Lösung von Aufgaben zur Übung des Abziehens.
4. Woche: Vervielfachen und Teilen unbenannter und mehrf. ben. Zahlen mit Einheiten der Zehnerordnung.
5. Woche: Vervielfachen und Teilen unbenannter und mehrfach benannter Zahlen mit anderen Zahlen.

6. Woche: Reihen für Zu- und Abzählen.
7. Woche: Regelbetriaufg.
8. „ „
9. „ „

(7.–9.: Auch als häusl. Aufgabe zu je einer Wochenstd.)

10. „ Algebraische Aufgaben.

3. Vierteljahr.

Oktober: Vervielfachen und Beginn des Teilens. (Gruppe 18 bis 21.)

November: Zusammengesetzte Aufg. und Einführung der Dezimalbrüche; Wert- und Formveränderungen mit Dezimalbrüchen. (Gruppe 22 bis 25.)

Dezember: Zusammenzählen und Abziehen der Dezimalbrüche. (Gruppe 26 bis 29.)

1. Woche: Währungszahlen; Auflösen und Zusammenfassen; Dezimale Schreibung.
2. Woche: Zusammenzählen mehrfach benannter Zahlen.
3. Woche: Abziehen mehrfach benannter Zahlen.
4. Woche: Vervielfachen und Teilen mehrfach benannter Zahlen mit Einheiten der Zehnerordnung.
5. Woche: Vervielfachen und Teilen mehrfach benannter Zahlen mit anderen Zahlen.
6. Woche: Regelbetriaufgaben.
7. „ „
8. „ Arten der Brüche; Wertveränderungen der Brüche.
9. Woche: Formveränderung der Brüche; Regeln über Teilbarkeit der Zahlen.
10. Woche: Zusammenzählen und Abziehen mit Brüchen.

4. Vierteljahr.

Januar: Vervielfachen mit Dezimalbrüchen. (Gruppe 30 bis 32.)

Februar: Teilen mit Dezimalbrüchen. (Gruppe 33 bis 36.)

März: Enthaltensein und Umwandlungen der Brüche. (Gruppe 37 und 38) und Wiederholung.

1. Woche: Zehnerordnung; Zahlenschreiben; Grundzahlen.
2. Woche: Schulgemäße Lösung von Aufgaben für Zusammenzählen.
3. Woche: Schulgemäße Lösung von Aufgaben für Abziehen.
4. Woche: Schulgemäße Lösung von Vervielfachungsaufgaben.
5. Woche: Schulgemäße Lösung von Teilungsaufgaben.
6. Woche: Regelbetriaufgaben.
7. Woche: Arten der Brüche; Wertveränderungen der Brüche.

8. Woche: Formveränderungen der Brüche; Regeln über Teilbarkeit der Zahlen.
9. Woche: Zusammenzählen und Abziehen von gemeinen Brüchen.
10. Woche: Vervielfachen und Teilen gemeiner Brüche.

7. Schuljahr.

(Aufgaben zum Tafelrechnen von Schroeter, Ausgabe A, Heft 5.)

1. Vierteljahr.

Stoffverteilungsplan.

April: Regeldetri. (Gruppe 1 und 2.)

Mai: Regeldetri und deren Anwendung. (Gruppe 3 bis 5.)

Juni: Durchschnittsrechnung und erweiterte Regeldetri. (Gruppe 6 bis 8.)

Wiederholungsplan.

1. Woche: Zusammenzählen von unbenannten und mehrfach ben. Zahlen.
2. Woche: Abziehen mit unben. und mehrfach ben. Zahlen.
3. Woche: Vervielfachen mit unben. und mehrfach ben. Zahlen.
4. Woche: Teilen mit unben. und mehrfach ben. Zahlen.
5. Woche Regeldetriaufgaben.
6. Woche: Wert- und Formveränderungen der gemeinen Brüche.
7. Woche: Zusammenzählen, Abziehen und Vervielfachen mit gemeinen Brüchen.
8. Woche: Teilen durch Brüche, Enthaltensein mit Brüchen und gemischten Zahlen.
9. Woche: Wert- und Formveränderungen von Dezimalbrüchen; Zusammenzählen u. Abziehen derselben.
10. Woche: Vervielfachen und Teilen mit Dezimalbrüchen.

2. Vierteljahr.

Stoffverteilungsplan.

Juli und August: Unser Verkehrswesen; Zeitrechnung. (Gr. 9 bis 11.)

September: Kranken-, Unfall- und Invaliden-Versicherung. (Gruppe 12 bis 14.)

Wiederholungsplan.

1. Woche: Zusammenzählen und Abziehen von Zahlen; Reihenbilden.
2. Woche: Vervielfachen und Teilen von Zahlen; Reihenbilden.
3. Woche: Wert- und Formveränderungen von gemeinen und Dezimalbrüchen.

4. Woche: Die 4 Grundrechnungsarten mit gemeinen Brüchen.
5. Woche: Zusammenzählen und Abziehen dezimal geteilter Zahlen.
6. Woche: Vervielfachen und Teilen dezimal geteilter Zahlen.
7. Woche: Das größte gem. Maß; Regeln über Teilbarkeit der Zahlen.
8. Woche: Regeldetri mit Brüchen.
9. Woche: Algebraische Aufgaben.
10. „ „ „

3. Vierteljahr.

Oktober: Verhältnisbestimmungen und Anwendung derselben. (Gruppe 15 und 17.)

November: Bestimmung der Gleichung und Anwendung derselben. (Gruppe 18 und 19.)

Dezember: Prozentbestimmungen. (Gruppe 20 und 21.)

1. Woche: Zusammenzählen und Abziehen von Zahlen; Reihenbilden.
2. Woche: Einmaleinsreihen.
3. Woche: Vervielfachen und Teilen von Zahlen; Reihenbilden.
4. Woche: } Übungen im Schnellrechnen aus allen 4 Grundrechnungsarten mit ganzen und Bruchzahlen.
5. „ }
6. „ }
7. Woche: Zeitrechnung.
8. „ Verhältnisbestimmungen.
9. „ Regeldetri mit Brüchen.
10. „ Algebraische Aufgaben.

4. Vierteljahr.

Januar: Anwendung der Prozentbestimmungen auf Steuern, Zölle und Haushaltungsaufgaben. (Gruppe 22 bis 24.)

Februar: Dasselbe auf Gewinn- und Verlustrechnung, auf Ein- und Verkauf und auf Rabatt. (Gruppe 25 bis 28.)

März: Dasselbe auf Durchschnittsrechnung u. Verhältnisbestimmungen auf 1000; Wiederholung. (Gruppe 29 und 30.)

1. Woche: Währungszahlen.
2. „ } Übungen im Schnellrechnen aus den 4 Grundrechnungsarten mit ganzen Zahlen und mit Brüchen.
3. „ }
4. „ }
5. „ Schriftliches Vervielfachen unben. Zahlen.
6. „ Schriftliches Teilen unben. Zahlen.
7. „ Einfache Regeldetri.
8. „ Erweiterte Regeldetri.
9. „ „ „
10. „ Einmaleinsreihen.

8. Schuljahr.

(Aufgaben zum Tafelrechnen von Schroeter, Ausg. A, Heft 6.)

1. Vierteljahr.

Stoffverteilungsplan.

April: Einfache Zinsrechnung; Zinsen gesucht. (Gruppe 1 und 2.)

Mai: Zinsen und Kapital gesucht (Gruppe 3 bis 5.)

Juni: Zeit und Prozent gesucht; Kapital und Zins zusammengezogen. (Gruppe 6 bis 9.)

Wiederholungsplan.

1. Woche: Zusammenzählen von ganzen und Bruchzahlen.
2. Woche: Abziehen von ganzen und Bruchzahlen.
3. Woche: Vervielfachen von ganzen und Bruchzahlen.
4. Woche: Teilen von ganzen und Bruchzahlen.
5. Woche: Verhältnisbestimmungen u. Umrechnungen.
6. Woche: Gleichungsbestimmungen u. Umrechnungen.
7. Woche: } Prozentbestimmungen u.
8. „ } Umrechnungen.
9. „ Einmaleinsreihen.
10. „ Währungszahlen.

2. Vierteljahr.

Stoffverteilungsplan.

Juli und August: Kapital und Zins zusammengezogen; Zinseszins; Vermischte Aufgaben aus der Zinsrechnung. (Gruppe 10 bis 13.)

September: Staatspapiere und Aktien; Beginn der Rabattrechnung. (Gruppe 14 bis 16.)

Wiederholungsplan.

1. Woche: Zahlenschreiben; Zahlenzerlegen; Reihenbilden.
2. Woche: Schulgemäße Lösungen aus den 4 Grundrechnungsarten.
3. Woche: Wert- und Formveränderungen von gemeinen und Dezimalbrüchen.
4. Woche: Die vier Grundrechnungsarten mit gemeinen Brüchen.
5. Woche: Verhältnisbestimmungen und Gleichungen.
6. Woche: Prozentbestimmungen.
7. Woche: Das größte gemeinschaftliche Maß und das kleinste gemeinschaftliche Vielfache; Regeln über die Teilbarkeit der Zahlen.
8. Woche: Zinsen gesucht.
9. Woche: Kapital, Prozent und Zeit gesucht.
10. Woche: Algebraische Aufgaben.

3. Vierteljahr.

Stoffverteilungsplan.

Oktober: Rabattrechnung und Wechsel. (Gruppe 17 bis 20.)

Wiederholungsplan.

1. Woche: Einfache Regeldetri.
2. Woche: Erweiterte Regeldetri.

November: Rabatt auf 100 und Gesellschaftsrechnung. (Gruppe 21 bis 24.)

Dezember: Vermischte Aufgaben zur Gesellschaftsrechnung; Mischungsrechnung; Zusammensetzung der Kräfte. (Gruppe 25 bis 30.)

3. Woche: Zeitrechnung.
4. Woche: Die vier Grundrechnungsarten mit Brüchen.
5. Woche: Umwandlungen der Brüche.
6. Woche: Verhältnisbestimmungen und Gleichungen.
7. Woche: Prozentbestimmungen.
8. Woche: Zinsen gesucht.
9. Woche: Kapital, Zeit und Prozent gesucht.
10. Woche: Zinseszinsrechnung.

4. Vierteljahr.

Januar: Zusammengesetzte Warenberechnung; Versicherungsaufgaben. (Gruppe 36 bis 40.)

Februar: Aus dem Haushalt der Gemeinde usw. Der Nahrungswert einiger Nahrungsmittel. (Gruppe 41 bis 44.)

März: Landwirtschaftliche Aufgaben. (Gruppe 45 bis 47.) Wiederholung.

1. Woche: } Kranken- und Unfallver-
2. „ } sicherung.
3. „ Zins gesucht.
4. „ Rabattrechnung.
5. „ } Invaliditäts- und Alters-
6. „ } versicherung.
7. „ Zinseszinsrechnung.
8. „ Gesellschaftsrechnung.
9. „ } Übungen im Schnellrechnen
10. „ } (Kopf- und Tafelrechnen).

9. Allgemeine Bemerkungen über den Rechenunterricht in der einklassigen Schule.

Daß von allem Unterricht der Unterricht in der einklassigen Schule durch die gleichzeitige Beschäftigung der verschiedenen Abteilungen, in die sämtliche Jahrgänge der Schüler gegliedert sind, der schwierigste ist, daß er die höchsten Anforderungen an die Kraft und an die methodische Geschicklichkeit des Lehrers stellt, zeigt sich bei keinem Unterrichtsfache deutlicher als beim Rechnen. Hier sind es nicht nur die drei Stufen, Ober-, Mittel- und Unterstufe, welche gesonderten Unterricht erhalten müssen, sondern durch den Umfang des eigenartigen Stoffes, der ein stetiges aufbauendes Fortschreiten, nicht ein konzentrisches Erweitern fordert, wird eine mehrfache Teilung der Schule notwendig. Mit jeder neuen Teilung aber wächst die Arbeit des Lehrers in methodischer und auch in physischer Hinsicht. Es ist deshalb notwendig, daß die Anzahl der Abteilungen auf eine möglichst geringe gebracht wird. Von vielen Aufsichtsbehörden ist die Zahl der Abteilungen auf vier festgesetzt worden, einige dulden auch fünf. Da es nun möglich ist, den Rechenstoff auf vier Abteilungen zu verteilen und bei dieser Verteilung jede Abteilung in angemessener Weise zu beschäftigen, so muß man die Vierteilung der Fünfteilung vorziehen. Das 1. Schuljahr bildet dann die 4. Abt., das 2. und 3. Schuljahr die 3., das 4., 5. und 6. Schuljahr die 2. und das 7. und 8. Schuljahr die 1. Abteilung.

Der Rechenstoff der beiden unteren Abteilungen ist der Zahlenkreis bis 100 (Heft I), und zwar wurde der 4. Abteilung der Zahlenkreis bis 10 und das Zuzählen und Abziehen im Zahlenkreise bis 20 und der 3. Abteilung das übrige Heft zugewiesen. Die 2. Abteilung rechnet mit größeren und mit mehrfach benannten Zahlen (Heft II), und für die 1. Abteilung bleibt nun noch übrig die Bruchrechnung und ihre Anwendung in den sogenannten bürgerlichen Rechnungsarten (Heft III).

Es bedarf keiner Begründung, daß das 1. Schuljahr eine Abteilung für sich bilden muß. Die Heranziehung des 3. Schuljahres zur 3. Abteilung und ihrem Rechenstoff, dem Zahlenkreise bis 100, erscheint zunächst als Zurückhaltung dieser Kinder. Man möge aber bedenken, daß jegliches Rechnen ohne unbedingte Sicherheit im Zahlenkreise bis 100 unmöglich ist, und daß diese Sicherheit in der einklassigen Schule schwerer oder wenigstens erst nach längerer Zeit erreicht werden kann als in der mehrklassigen Schule. Der 3. Jahrgang wird also mit vielem Nutzen an die Wiederholung des im 2. Jahrgange behandelten Stoffes gehen und dadurch nicht zurückgehalten, sondern gefördert werden. Die Stoffe, welche der 2. und 1. Abteilung zugewiesen werden, sind so umfangreich, daß ihre Durcharbeitung in einem Jahr nur ein erfolgloses Hetzen sein würde. Man scheide deshalb diese Stoffe in feste Stoffe, d. h. in solche, welche in jedem Jahre zur ausführlichen Behandlung zu bringen sind, und in bewegliche Stoffe, die nur in jedem 2. Jahre ausführlich behandelt, in den dazwischen liegenden Jahren nur wiederholend erwähnt werden. Jedes Kind wird dann den gesamten Rechenstoff wenigstens zweimal durchnehmen und so sich die für das Leben notwendige Sicherheit und Fertigkeit aneignen. — Das Nähere lies nach in den Stoffverteilungsplänen und in den Bemerkungen für die einzelnen Abteilungen.

Wie beschäftigt nun der Lehrer die einzelnen Abteilungen in der Rechenstunde?

Der größte Teil der direkten Arbeit des Lehrers gebührt der Unterstufe und ihrem Rechenstoffe, Mittel- und Oberstufe können schon öfter mit schriftlichen Übungen (Reihenbilden) und mit Tafelrechnen beschäftigt werden. Überall geht auch hier das Kopfrechnen dem Tafelrechnen voran.

Wenn der Lehrer neue Rechenstoffe einführt, beschäftigt er stets nur eine Abteilung direkt im Kopfe; bei der Übung aber kann er mitunter auch mehrere Abteilungen zu gleicher Zeit mit demselben Stoffe beschäftigen, dieser ist dann für die untere Abteilung Übung, für die obere aber zweckmäßige Wiederholung. Für einige Kopfrechenübungen werden auch Helfer herangezogen. Diese müssen die Aufgaben, die sie aufgeben sollen, stets sorgfältig ausgewählt und auch aufgeschrieben erhalten. Die Fertigkeit im Kopfrechnen wird ferner erhöht durch das selbständige Reihenbilden, das durch alle Abteilungen geübt wird, so daß ein Teil der Zeit, der sonst dem Tafelrechnen zugewiesen war, dem Kopfrechnen dienstbar gemacht wird. Endlich soll hier noch darauf hingewiesen werden, daß das Kopfrechnen besonders gepflegt werden kann, wenn beim Tafelrechnen die Zwischenresultate, soweit es angeht, durch Kopfrechnen gefunden werden.

Zur Erzielung der notwendigen Sicherheit ist neben vielfacher Übung

die Einführung und Einprägung einer schulgemäßen Lösungsform geboten, nach der alle Kinder wenigstens die leichteren Aufgaben jeder Art selbständig müssen lösen können.

Aus dem Vorstehenden folgt, daß die Kinder der einklassigen Schule einen großen Teil der Rechenstunde mit Tafelrechnen beschäftigt werden müssen, dessen Formen in jedem Falle vorher zu erläutern sind.

Für das Tafelrechnen bieten die Hefte reichlichen Übungsstoff für normale Verhältnisse. Es kann aber trotz der sorgfältigsten Überlegung doch der Fall eintreten, daß der gegebene Stoff nicht durchgearbeitet werden kann. Der Lehrer lasse dann die schwierigeren Aufgaben weg, halte aber auf Fertigkeit und Sicherheit in den gerechneten Aufgaben. Auf allen Stufen, mit Ausnahme der 4. Abteilung (des ersten Schuljahres), wird der Stoff mindestens zweimal in zwei aufeinanderfolgenden Jahren durchgearbeitet. Der Lehrer wird hier ungesucht Gelegenheit finden, eine Auswahl in den durchzurechnenden Aufgaben zu treffen und diese oder jene Gruppe von Aufgaben genau oder nur übersichtlich zu berücksichtigen. Es kann vielleicht auch kommen, daß der Übungsstoff an einer Stelle nicht ausreicht. Der Lehrer wird dann entweder selbst Aufgaben geben (Reihen) oder schon gerechnete Abschnitte von neuem rechnen lassen.

Besonderes Gewicht ist noch darauf gelegt worden, daß die Hefte auch genügenden Stoff für das Kopfrechnen auf der Tafel bieten, deshalb sind in fast allen größeren Abschnitten Reihenaufgaben gegeben.

In einer einklassigen Schule mit vier Rechenabteilungen dürfte die wöchentliche Rechenarbeit sich in folgender Weise verteilen:

(Angenommen wird hierbei, daß jede Stunde in $\frac{3}{3}$ Stunden zerfällt; das [H.] bedeutet Helfer.)

<table>
<tr><th></th><th></th><th>4. Abteilung.</th><th>3. Abteilung.</th><th>2. Abteilung.</th><th>1. Abteilung.</th></tr>
<tr><td rowspan="3">1. Stunde</td><td>$\frac{1}{3}$</td><td>Kopfrechnen</td><td>Schriftl. R.</td><td rowspan="2">Tafelrechnen</td><td rowspan="2">Tafelrechnen</td></tr>
<tr><td>$\frac{1}{3}$</td><td rowspan="2">Schriftl. R.</td><td>Kopfrechnen</td></tr>
<tr><td>$\frac{1}{3}$</td><td>Kopfrechnen (H.)</td><td>Kopfrechnen</td><td>Reihenbilden</td></tr>
<tr><td rowspan="3">2. Stunde</td><td>$\frac{1}{3}$</td><td>Kopfrechnen (H.)</td><td rowspan="2">Schriftl. R.</td><td rowspan="2">Tafelrechnen</td><td>Kopfrechnen</td></tr>
<tr><td>$\frac{1}{3}$</td><td>Kopfrechnen</td><td rowspan="2">Tafelrechnen</td></tr>
<tr><td>$\frac{1}{3}$</td><td>Schriftl. R.</td><td>Kopfrechnen</td><td>Kopfrechnen (H.)</td></tr>
<tr><td rowspan="3">3. Stunde</td><td>$\frac{1}{3}$</td><td>Kopfrechnen</td><td>Schriftl. R.</td><td rowspan="2">Tafelrechnen</td><td>Kopfrechnen (H.)</td></tr>
<tr><td>$\frac{1}{3}$</td><td>Schriftl. R.</td><td>Kopfrechnen</td><td rowspan="2">Tafelrechnen</td></tr>
<tr><td>$\frac{1}{3}$</td><td>Kopfrechnen</td><td>Schriftl. R.</td><td>Kopfrechnen (H.)</td></tr>
<tr><td rowspan="3">4. Stunde</td><td>$\frac{1}{3}$</td><td>Schriftl. R.</td><td rowspan="2">Schriftl. R.</td><td>Reihenbilden</td><td>Kopfrechnen</td></tr>
<tr><td>$\frac{1}{3}$</td><td>Kopfrechnen</td><td>Tafelrechnen</td><td rowspan="2">Tafelrechnen</td></tr>
<tr><td>$\frac{1}{3}$</td><td>Schriftl. R.</td><td>Kopfrechnen (H.)</td><td>Kopfrechnen</td></tr>
</table>

Hiernach wird die 4. Abteilung $\frac{6}{3}$ Std. Kopfrechnen, davon $\frac{1}{3}$ Std. bei dem Helfer, und $\frac{6}{3}$ Std. schriftliches Rechnen haben; die 3. Abteilung wird $\frac{5}{3}$ Std. mit Kopfrechnen, davon $\frac{2}{3}$ Std. bei dem Helfer, und $\frac{7}{3}$ Std. mit schriftlichem Rechnen beschäftigt werden; die 2. Abteilung wird $\frac{4}{3}$ Std. direktes Kopfrechnen, davon $\frac{2}{3}$ Std. bei dem Helfer, außerdem $\frac{1}{3}$ Std. indirektes Kopfrechnen durch Reihenbilden und $\frac{7}{3}$ Std. Tafelrechnen haben, und in der 1. Abteilung finden wir $\frac{3}{3}$ Std. direktes Kopfrechnen, davon $\frac{1}{3}$ Std. bei dem Helfer, außerdem $\frac{1}{3}$ Std. indirektes Kopfrechnen und $\frac{8}{3}$ Std. Tafelrechnen.

Eine mehr mechanische Verteilung der Zeit, nämlich eine Zerlegung der Stunde in $\frac{1}{4}$ Stunden, dürfte nicht anzuraten sein, da die auf jede Abteilung entfallende Zeit ($\frac{1}{4}$ von 50 Minuten) gar zu gering ist und die fruchtbringende direkte Arbeit hierdurch gefährdet wird. Für Freunde der Vierteilung der Rechenstunde gebe ich noch die untenstehende Zeitverteilung. Daß jede solche Aufstellung nicht als unbedingt festzuhaltende Norm gelten kann, ist verständlich. Häufig wird z. B. in einer Abteilung mehrere Wochen hindurch das Tafelrechnen ganz besonders gepflegt werden müssen, hierdurch aber wird Zeit frei, die den anderen Abteilungen für das Kopfrechnen zuzurechnen ist.

<table>
<tr><th colspan="2">Zeit</th><th>4. Abteilung</th><th>3. Abteilung</th><th>2. Abteilung</th><th>1. Abteilung</th></tr>
<tr><td rowspan="4">1. Stunde</td><td>1/4</td><td>Kopfrechnen</td><td>Schriftl. R.</td><td>Kopfrechnen (H.)</td><td>Tafelrechnen</td></tr>
<tr><td>1/4</td><td rowspan="2">Schriftl. R.</td><td>Kopfrechnen</td><td>Tafelrechnen</td><td rowspan="2">Kopfrechnen (H.)</td></tr>
<tr><td>1/4</td><td rowspan="2">Schriftl. R.</td><td>Kopfrechnen</td></tr>
<tr><td>1/4</td><td>Kopfrechnen</td><td>Tafelrechnen</td><td>Tafelrechnen</td></tr>
<tr><td rowspan="4">2. Stunde</td><td>1/4</td><td rowspan="2">Schriftl. R.</td><td>Kopfrechnen (H.)</td><td>Tafelrechnen</td><td>Kopfrechnen</td></tr>
<tr><td>1/4</td><td rowspan="2">Schriftl. R.</td><td>Kopfrechnen</td><td rowspan="3">Tafelrechnen</td></tr>
<tr><td>1/4</td><td>Kopfrechnen</td><td>Kopfrechnen (H.)</td></tr>
<tr><td>1/4</td><td>Schriftl. R.</td><td>Kopfrechnen</td><td>Tafelrechnen</td></tr>
<tr><td rowspan="4">3. Stunde</td><td>1/4</td><td>Kopfrechnen</td><td>Kopfrechnen (H.)</td><td rowspan="2">Tafelrechnen</td><td>Tafelrechnen</td></tr>
<tr><td>1/4</td><td>Kopfrechnen (H.)</td><td rowspan="2">Schriftl. S.</td><td>Kopfrechnen</td></tr>
<tr><td>1/4</td><td rowspan="2">Schriftl. S.</td><td>Kopfrechnen</td><td>Kopfrechnen (H.)</td></tr>
<tr><td>1/4</td><td>Kopfrechnen</td><td>Kopfrechnen (H.)</td><td>Tafelrechnen</td></tr>
<tr><td rowspan="4">4. Stunde</td><td>1/4</td><td>Kopfrechnen</td><td>Schriftl. R.</td><td rowspan="2">Tafelrechnen</td><td rowspan="3">Tafelrechnen</td></tr>
<tr><td>1/4</td><td>Kopfrechnen (H.)</td><td>Kopfrechnen</td></tr>
<tr><td>1/4</td><td rowspan="2">Schriftl. R.</td><td rowspan="2">Schriftl. R.</td><td>Kopfrechnen</td></tr>
<tr><td>1/4</td><td>Kopfrechnen (H.)</td><td>Kopfrechnen</td></tr>
</table>

Die vorstehenden Erläuterungen gelten in gewissem Sinne auch für die Halbtagsschule. Da in dieser die Mittelstufe meistens die längste Unterrichtszeit hat, so wird auch das Hauptgewicht im Rechnen in der Mittelstufe liegen. Die Sicherheit und Selbständigkeit, die dort durch

anhaltende Übung erzielt werden kann, wird die Erreichung der Rechenziele auch in der Oberstufe trotz der beschränkten Unterrichtszeit ermöglichen.

Besonders aber wird in allen diesen Schulen mit beschränkter Unterrichtszeit noch mehr als in den mehrfach gegliederten Schulen darauf zu achten sein, daß das Rechnen nicht zum toten Formalismus noch zum unverstandenen Materialismus führt. Durch Heranziehung und Verwertung geeigneter einfacher Sachgebiete wird das Interesse der Kinder wach erhalten, so daß sie nicht nur rechnen lernen, sondern daß auch ihre anderen Geisteskräfte beteiligt und gefördert werden.

a) Stoffverteilungsplan nach Schroeter,

4. Abteilung. (1. Schuljahr.) (1. Heft.)	3. Abteilung. (2. und 3. Schuljahr.) (1. Heft.)
April: Einführen und Befestigen der Zahlen 1 und 2. (Gr. 1.)	Vervielfachen und Teilen mit 2 und 3. (Gr. 29.)
Mai: Einführen und Befestigen der Zahlen 3 bis 5. Zu- und Abzählen der 1. (Gr. 1 u. 2.)	Vervielfachen und Teilen mit 4 bis 9. (Gr. 30 bis 32).
Juni: Einführen u. Befestigen der Zahlen 6 bis 10. Zu- u. Abzählen der 1. (Gr. 3 u. 4.)	Erweitern des Zahlenkreises bis 100. Zuzählen von Einerzahlen. (Gr. 33 bis 36.)
Juli und August: Zu- und Abzählen der 2 und 3. (Gr. 5 bis 8.)	Zusammenzählen und Abziehen von Einerzahlen. (Gr. 37 bis 40.)
September: Zu- und Abzählen der 4 und 5. (Gr. 9 bis 12.)	Abziehen von Einerzahlen und Zusammenzählen zweistelliger Zahlen. (Gr. 41 bis 46.)

10. Stoffverteilungs- und Wiederholungsplan für den Rechenunterricht in der einklassigen Schule.

Die planmäßige Wiederholung ist für die einklassige Schule ebenso notwendig wie für die mehrklassige Schule. (Vergl. B, Abschn. 8.)

Auch in der einklassigen Schule können zwei Abteilungen, und zwar entweder die beiden oberen oder die beiden unteren, häufig gemeinsam wiederholen. Eine Verbindung der Oberstufe oder selbst der Mittelstufe mit der Unterstufe wird seltener vorkommen, vielleicht nur bei den Einmaleinsreihen. Da in der einklassigen Schule in den drei oberen Abteilungen zwei oder auch drei Jahrgänge vereinigt sind, so bietet der Unterricht selbst so viel Wiederholung, daß sich die Wiederholungspläne überraschend einfach gestalten. Die Stoffverteilungspläne berücksichtigen bei den beiden oberen Abteilungen zwei Jahreskurse mit festen und beweglichen Stoffen.

Aufgaben zum Tafelrechnen, Ausgabe B.

2. Abteilung. (4., 5. und 6. Schuljahr.) (2. Heft.)	1. Abteilung. (7. und 8. Schuljahr.) (3. Heft.)
Erweitern des Zahlenkreises bis 1000. Auflösen und Zusammenfassen. Zu- und Abzählen von Grundzahlen. Zuzählen reiner Hunderterzahlen. (Vorübungen; Gr. 1 und Aufgaben aus Gr. 2.)	Einführen der Brüche. Die Wertveränderungen der Brüche. (Gr. 1 bis 5.)
Zusammenzählen und Reihenbilden. (Gr. 2 bis 6.)	Die Formveränderungen der Brüche. (Erweitern, Kürzen und Gleichnamigmachen.) Regeln über Teilbarkeit der Zahlen. (Gr. 6 bis 8.) Beginn des Zusammenzählens. (Gr. 9.)
Abziehen und Reihenbilden. (Gr. 7 bis 12.)	Zusammenzählen und Abziehen der Brüche. (Gr. 10 bis 16.)
Vervielfachen u. Reihenbilden. (Gr. 13 bis 17.)	Vervielfachen und Teilen mit Brüchen. (Gr. 17 bis 22.)
Teilen. (Gr. 18 bis 22.)	Einführen der Dezimalbrüche.. Wert- und Formveränderungen derselben. Zusammenzählen und Abziehen. (Gr. 23 bis 29.)
1. Kursus. Einführen des höheren Zahlenkreises. Auflösen und Zusammenfassen. Zahlenschreiben. Beginn des Zusammenzählens. (Vorübungen und Gr. 23 bis 25.) **2. Kursus.** Einführen des höheren Zahlenkreises. Auflösen und Zusammenfassen. Zahlenschreiben. Zusammenzählen und Abziehen. (Vorübungen u. Aufgabe naus Gr. 23 bis 32.)	Vervielfachen und Teilen mit Dezimalzahlen. Umwandlung der Brüche. (Gr. 30 bis 37.)

	4. Abteilung. (1. Schuljahr.) (1. Heft.)	3. Abteilung (2. und 3. Schuljahr.) (1. Heft)
Oktober:	Zu- und Abzählen der 6. (Gr. 13 und 14.)	Zusammenzählen zweistelliger Zahlen. (Gr. 47 bis 50.)
November:	Zu- und Abzählen der 7 und 8. (Gr. 15 bis 18.)	Abziehen zweistelliger Zahlen. (Gr. 51 bis 55.)
Dezember:	Zu- und Abzählen der 9 und 10. Zusammenzählen von mehr als 2 Zahlen. (Gr. 19 und 20.)	Vervielfachen mit 2 bis 6. (Gr. 56 bis 57, Nr. 13.)
Januar:	Erweitern des Zahlenkreises bis 20. Zu- und Abzählen der 2. (Gr. 21 u. 22.)	Vervielfachen mit 7 bis 10. Teilen durch 2 bis 4. (Gr. 57 bis 59, Nr. 5.)
Februar:	Zu- und Abzählen der 3 bis 5. (Gr. 22 u. 23.)	Teilen. (Gr. 59 bis 62.)
März:	Zu- und Abzählen der 6 bis 10. (Gr. 24 bis 28.)	Teilen und Wiederholung. (Gr. 63 bis 67.)

2. Abteilung (4., 5. und 6. Schuljahr.) (2. Heft.)		1. Abteilung (7. und 8. Schuljahr.) (3. Heft.)	
1. Kursus.	2. Kursus.	1. Kursus.	2. Kursus.
Reihenbilden. Abziehen. (Gr. 26 bis 32.)	Vervielfachen und Teilen. (Aufgaben aus Gr. 33 bis 46.)	Anwendung der Bruchrechnung auf Regeldetri (Gr. 38 bis 41) und Durchschnittsrechnung. (Aufg. aus Gr. 42.)	Anwendung der Bruchrechnung auf Regeldetri (Aufg. aus Gr. 38 u. 39) und Durchschnittsrechnung. (Gr. 42.) Erweiterte Regeldetri. (Gr. 44.)
Vervielfachen. (Gr. 33 bis 39.)	Einführ. der Münzen, Maße und Gewichte. Aufl. u. Zusammenfassen. Dezim. Schreibweise. Zusammenzählen beginnen. (Gr. 49 bis 60.)	Erweiterte Regeldetri. (Gr. 44.) Kranken-, Unfall- und Invalidenversicherung. (Gr. 47 bis 49.)	Verkehrswesen. (Gr. 45.) Invalidenversicherung. (Gr. 49.) Bestimmung der Verhältnisse. (Gr. 50 u. 51.)
Teilen. (Gr. 40 bis 43.)	Zusammenzählen u. Abziehen. (Gr. 61 bis 73.)	Bestimmen u. Anwenden der Verhältnisse (Gr. 50 bis 52) und Prozentbestimmungen und Anwendung derselben. (Gr. 54 bis 56.)	Bestimmen u. Anwenden d. Gleichung. (Gr. 53.) Prozentbestimmungen und Anwendung derselben. (Gr. 54, 57, 58 und 59.)
Teilen. (Gr. 44 bis bis 46.)	Vervielfachen. (Gr. 74 bis 80.)	Zinsrechnung. (Gr. 62 bis 66.)	Anwendung d. Prozentbestimmung. (Gr. 60 u. 61.) Die Zinsrechnung. (Gr. 62 bis 64, 67.)
Das größte gem. Maß und das kleinste gem. Vielfache. (Gr. 47 u. 48.) Einführen d. Münzen, Maße und Gewichte. Auflösen und Zusammenfassen. (Gr. 49 bis 56.)	Teilen. (Gr. 81 bis 84.)	Zinseszinsrechnung (Gr. 68). Rabatt ohne Berücksichtigung der Zeit. (Gr. 70 u. 71.)	Staatspapiere u. Aktien. (Gr. 69.) Rabatt mit Berücksichtigung d. Zeit. (Gr. 72 und 73.)
Leichte Aufgaben aus den 4 Grundrechnungsarten mit mehrf. ben. Zahlen. (Aus den Gr. 57 bis 88.)	Durchschn.rechnung und Regeldetri. (Gr. 85 bis 88.)	Gesellschaftsrechng. (Gr. 74 u. 75.) Vermischte Aufgaben aus verschieden. Gebieten. (Gr. 77 u. 81.) Wiederholung.	Mischungsrechnung. (Gr. 76.) Vermischte Aufgaben aus versch. Gebieten. Versicherungen. (Gr. 79 bis 80.) Wiederholung.

Stoffverteilungsplan.

... der Unterstufe wird stündlich wiederholt; ... der Lehrer vielleicht folgenden ... zugrunde legen:

1. Abteilung.

Vierteljahr.

(In je 1 Wochenstunde mit der 2. Abteilung.)

Zehnerordnung; Zahlenzerlegen und Zahlenschreiben.
Zusammenzählen unbenannter Zahlen.
Abziehen unbenannter Zahlen.
Vervielfachen " "
Teilen " "
Währungszahlen; Auflösen und Zusammenfassen.
Zusammenzählen mehrfach benannter Zahlen.
Abziehen mehrfach benannter Zahlen.
Vervielfachen mehrfach benannter Zahlen.
Teilen mehrfach benannter Zahlen.

Vierteljahr.

Zusammenzählen. (In jeder Stunde 2.)
Zehnerordnung; Zahlenzerl. u. Zahlenschreiben.
Zusammenzählen u. Abziehen unbenannter Zahlen.
Vervielfachen unben. Zahlen.
Teilen " "
Währungszahlen; Auflösen u. Zusammenfassen; dezimale Schreibweise.
Zusammenzählen und Abziehen mit mehrfach benannt. Zahlen.
Vervielfachen von mehrfach benannten Zahlen.
Teilen von mehrfach benannten Zahlen.
Regeldetriaufgaben.

3. Vierteljahr.

1. Woche.	Zusammenzählen im Zahlenkreise bis 1000.	Währungszahlen; Zehnerordnung; Zahlenschreiben; dezimale Schreibweise.
2. „	Abziehen im Zahlenkreise bis 1000.	Zusammenzählen unbenannter und mehrfach benannter Zahlen.
3. „	Vervielfachen und Teilen im Zahlenkreise bis 1000 mit 2 bis 4.	Abziehen unbenannter und mehrfach benannter Zahlen.
4. „	Vervielfachen und Teilen im Zahlenkreise bis 1000 mit 5 und 6.	Einmaleinsreihen.
5. „	Vervielfachen und Teilen im Zahlenkreise bis 1000 mit 7.	Vervielfachen unbenannter und mehrfach benannter Zahlen.
6. „	Vervielfachen und Teilen im Zahlenkreise bis 1000 mit 8.	Teilen unbenannter und mehrfach benannter Zahlen.
7. „	Vervielfachen und Teilen im Zahlenkreise bis 1000 mit 9 und 10.	Regelbetriaufgaben.
8. „	Zahlenschreiben; Zahlenzerlegen; Zehnerordnung.	Arten und Brüche. Wert- und Formveränderungen derselb.
9. „	Zusammenzählen im höheren Zahlenkreise.	Zusammenzählen und Abziehen der gemeinen Brüche.
10. „	Abziehen im höheren Zahlenkreise.	Vervielfachen und Teilen gemeiner Brüche.

4. Vierteljahr.

1. Woche.	Zahlenschreiben; Zehnerordnung.	Einmaleinsreihen und Vervielfachen unbenannter und mehrfach benannter Zahlen.
2. „	Zusammenzählen; Reihenbilden.	Einmaleinsreihen und Teilen unbenannter und mehrfach benannter Zahlen.
3. „	Abziehen; Reihenbilden.	Reihen für Zu- und Abzählen.
4. „	Einmaleinsreihen und Vervielfachen.	Wert- und Formveränderungen der Brüche. Regeln über Teilbarkeit der Zahlen.
5. „	Einmaleinsreihen und Vervielfachen.	Zusammenzählen und Abzählen gem. und dez. Brüche.
6. „	Einmaleinsreihen und Teilen.	Vervielfachen gem. u. dez. Brüche.
7. „	„ „ „	Teilen „ „ „ „
8. „	Währungszahlen.	Verhältnis- und Prozentbestimmungen.
9. „	Zu- und Abzählen mehrfach benannter Zahlen.	Zinsrechnung.
10. „	Vervielfachen und Teilen mehrfach benannter Zahlen.	„

C. Besondere Methodik.

A. Das Rechnen auf der Unterstufe.

Der Rechenstoff der Unterstufe unserer preußischen Volksschule ist der Zahlenkreis bis 100, der in zwei Schuljahren durchgenommen werden soll. Die Stoffverteilung finden wir unter B, Nr. 8 und die Angabe der Sachgebiete unter B, Nr. 5. Der Rechenunterricht in den beiden ersten Schuljahren erfordert eine sehr fleißige und eindringliche Arbeit, da hier der Grund gelegt werden soll nicht nur zur Rechenfertigkeit, sondern auch zur Recheneinsicht; er erfordert aber auch einen sehr geschickten und freudigen Lehrer, der das Kind versteht, der mit dem Kinde arbeitet und schafft und mit demselben sich auch freut. Nicht jeder ist ein solcher „Lehrer der Kleinen", und wenn er's nicht ist und nicht werden kann oder will, so sollte er versuchen, bei größeren Kindern genügende Leistungen zu erzielen, die Kleinen aber sollte er berufeneren Leuten übergeben. Der wahre Lehrer der Kleinen aber findet volles Genüge bei seinen Kleinen; es ist auch tatsächlich nirgends mehr Liebe und Anhänglichkeit zu finden, und es sind auch nirgends mehr Resultate zu verzeichnen, als bei den Kleinen.

1. Wie gewinnen die Kinder Zahlvorstellungen?

„Anschauung ist das absolute Fundament aller Erkenntnis", sagt Pestalozzi, und „Der Rechenunterricht vermag nicht anders zu gedeihen, als wenn er in seinem rechten Grund und Boden, d. i. in der Anschauung, feste Wurzeln schlägt", urteilt der Vater unseres Schul- und Volksrechnens, der Altmeister Hentschel. — Auch die Zahlvorstellungen können selbstverständlich nur durch Anschauung gewonnen werden. Die Fertigkeit des Zählens, wie sie den meisten unserer sechsjährigen neu eintretenden Schülern eigen ist, ist eine mechanische; dieses Zählen zu einem verständigen, auf klaren Anschauungen beruhenden Zählen zu machen, ist die erste Aufgabe des Rechenunterrichts.

Bei der Gewinnung der Zahlvorstellungen soll das Kind nur die Anzahl der dargebotenen Anschauungsmittel ins Auge fassen, von der Größe, der Form, der Farbe und dem Stoff der Gegenstände soll es absehen. Diese geistige Arbeit muß dem Kinde dadurch erleichtert werden, daß die zur Anschauung ausgewählten Gegenstände gleich sind in Größe und Form, in Stoff und Farbe. Falsch wird es demnach sein, die Zahl 2 durch eine weiße und eine rote Kugel oder durch einen weißen und einen

schwarzen Würfel zu veranschaulichen. Hierbei tritt wohl das „Eins und Eins“, nie aber die „Zwei“, klar hervor. Falsch ist es auch, wenn in den Zahlbildern von Sonnenschein z. B. die Zahl 7 veranschaulicht werden soll durch eine Katze, die auf einem dreibeinigen Schemel sitzt (3 Schemel- und 4 Katzenbeine). Wird wohl diese einfachste und notwendigste Forderung, die an die Anschauungsmittel für den Rechenunterricht gestellt werden kann, von den neu erfundenen und warm empfohlenen oft recht künstlichen Rechenmaschinen immer erfüllt?

Die Auffassung der Zahl wird dem Kinde auf dieser ersten Rechenstufe auch noch dadurch erleichtert, daß die Anschauungsmittel einfache, aus seinem Anschauungskreise stammende Gegenstände sind; denn künstliche und fremde Gegenstände reizen wohl die Neugierde, lenken aber dabei die Aufmerksamkeit von dem Wesentlichen auf das hier Nebensächliche.

Aller Unterricht, also auch der Rechenunterricht, soll die Selbsttätigkeit der Kinder wecken, dieselbe aber auch für Unterrichtszwecke benutzen! Deshalb werden Anschauungsmittel, mit denen das Kind hantieren kann, geeigneter sein als feststehende, und Körper werden den Flächen vorzuziehen sein. — Nun bieten die Umgebung und der Anschauungskreis des Kindes geeignetes Anschauungsmaterial in reicher Fülle, z. B. Finger, Fenster, Bohnen, Stäbchen, Mützen, Tafeln, Knaben, Mädchen usw. Auch Striche, Nullen, Kreuze, Punkte sind dadurch, daß die Kinder sie selbst zeichnen können, in ihrem Werte als Anschauungsmittel den Körpern gleich zu achten. Man hüte sich vor zu reichlichem mechanischen Gebrauche aller dieser Anschauungsmittel.

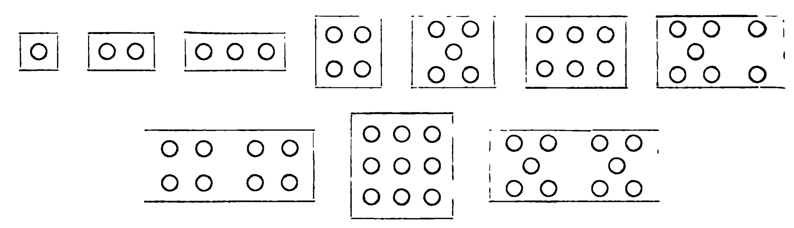
Bei der Einführung jeder neuen Zahl wird die betreffende Anzahl von Fingern, Fenstern, Bohnen usw. nacheinander dem Kinde vorgeführt. Das Kind zählt unter Leitung des Lehrers von der vorher behandelten Zahl weiter und spricht dann: das sind . . . Bohnen, das sind . . . Stäbchen, das sind . . . Tafeln usw. Das Zahlwort wird immer mehr hervorgehoben, die Bezeichnung tritt immer mehr zurück, so daß nachher übrig bleibt: das sind . . . Der Auffassung der Zahl folgt also die Benennung derselben. (Haase will in seinem Büchlein „Zur Methodik des ersten Rechenunterrichts“ die Auffassung der „Zählreihe“ durch die „Raumreihe“ erleichtern, so daß die Auffassung der Stellung der Zahlen durch das Ordnungszahlwort deutlicher wird.) Die gewonnene Erkenntnis wird nun geprüft und vertieft in der schriftlichen Darstellung der Zahlen; diese geschieht durch Nebeneinanderschreiben von Strichen, Nullen usw. oder in Zahlenbildern.

Vielfach ist die schriftliche Darstellung nur ein Übertragen der an geeignetem Anschauungsmaterial geübten Tätigkeiten auf die Schiefertafel. Von hoher Bedeutung ist das Neben- oder Untereinanderschreiben der Zeichen. Bei den größeren Zahlen 6—9 geht freilich die Übersicht leicht verloren, doch wird das Kind genötigt, die Anzahl der Einheiten immer wieder zu zählen, so daß es sich das Wesen der Zahl, d. i. die Anzahl der Einheiten, immer genauer einprägt. Diese bewußte Darstellung der Zahl nach ihren Einheiten ist auch später bei den einfachsten Operationen mit den Zahlen zu verwenden. Die Zerlegung der 8 in 7 und 1 wird

an 7 unter- oder nebeneinanderstehenden Strichen und einem Striche geübt, desgl. die Zerlegung in 6 und 2 usw., auch in 2×4 usw.

So wesentlich aber diese Darstellung der Zahlen als Vorbereitung für die vier Grundrechnungsarten ist, so verwerflich ist das Operieren mit den den Inhalt der Zahlen angebenden Strichen. Daß 4 davon $1 = 3$ ist, kann nicht veranschaulicht und geübt werden: |||f = ||| oder |||| — | = |||; dies ist keine Veranschaulichung, da der Strich nicht hinweggenommen ist. Der Begriff des Abziehens wird hierdurch nicht erklärt und verdeutlicht, sondern die Gewinnung desselben wird erschwert.

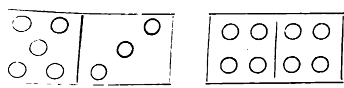
Die Darstellung der Zahlen geschieht zweitens in *Zahlbildern* (Hartmann sagt für Zahlbilder wohl richtiger „Punktbilder"). Unter einem Zahlbilde verstehen wir eine die Übersicht erleichternde Gruppierung einer Anzahl von Nullen, Kreuzen oder ähnlichen Gebilden. Es wird von fast allen Methodikern verlangt, daß die Zahlbilder nur in einer Form auftreten, damit die sichere Auffassung der Zahl erleichtert wird. Die Zusammengehörigkeit der Zeichen eines Zahlbildes wird auch durch das Einfassen derselben mit 4 Strichen gekennzeichnet. Eine gebräuchliche Form der Zahlbilder ist folgende:



Vergleiche hierzu die Rechentypen von Beetz (S. 55).

Aus dem Vorstehenden geht hervor, daß die Zahlbilder das Erkennen des Inhaltes der Zahl durch ihre Form unterstützen sollen, daher der Name „*Formzahlbilder*". Das Kind soll dahin kommen, daß es an der Form der Fünf ohne weiteres die Zahl 5, an der Form der 9 desgleichen sofort die Zahl 9 erkennen kann. Die Folge hiervon wird aber sein, daß das Kind aufhört, sich an die Anzahl der Einheiten, die zur Zahl gehören, zu erinnern, besonders wenn diese Anzahl zu groß ist, um einen direkten Überblick zu ermöglichen. Dann ist aber das Zahlbild nicht mehr eine Veranschaulichung des Zahlinhaltes, sondern es ist eine Form geworden, ein Zeichen, in dem man die Einheiten der Zahl erforderlichenfalls noch erkennen kann. Der Übergang zur Ziffer, oder dem Zahlzeichen, an dem man die Einheiten, aus denen die Zahl besteht, nicht mehr erkennen kann, ist nun nicht mehr schwer. — Nur in dieser Bedeutung einer *Überleitungsform* dürfen wir die Zahlbilder in einer bestimmten Form, wie sie z. B. oben gezeichnet worden sind und wie sie vielfach nur gebraucht werden, anerkennen und benutzen. Viel wichtiger sind die Zahlbilder, die die Klarheit über die verschiedene Zerlegung der Zahlen erzielen sollen. Diese Zahlbilder, die also nicht eine Zahl an und für sich, sondern die jedesmalige Zusammensetzung derselben angeben,

...ende Felder geschrieben, wie bei den Dominosteinen; ...ltszahlbilder". Die 8 würde dann z. B.



... auch bei dieser Zerlegung die Formzahlbilder ...mit Zahlbildern ist unzulässig, zu diesem Zwecke ...en gekannt werden. Diese werden im Anschluß an die ...eingeführt. Die Ziffern können deshalb hier nicht, wie ...wird, nach der Schreibleichtigkeit behandelt werden; dies ...Aufgabe des Schreibunterrichts. Die Formen der Ziffern sind ...verständlich möglichst einfach, und ihre Bedeutung wird dadurch ...icht, daß neben das Zahlbild die Ziffer gesetzt wird, z. B.

5

Nach der Neueinführung jeder Zahl wird zum Zweck der Wieder-...lung eine Pause gemacht. Fragen, wie: Welche Zahl steht vor 6; welche Zahl folgt auf 4; zwischen welchen Zahlen steht die 3, be-...stigen die Zahlenerkenntnis und die Sicherheit des Wissens über die Stellung der Zahlen. Auch die fleißige Anwendung auf die umgebende Natur wird zur Befestigung der Zahlvorstellungen, vor allem aber zur Belebung des Unterrichts beitragen; so werden z. B. herangezogen die Ohren des Kindes oder die Füße des Huhnes bei der Zahl 2, die Blättchen des Kleeblatts bei der 3, die des Fingerkrautes bei der 5, die der Roß-kastanie bei der 7, die Füße des Pferdes bei der 4, usw. — Nur wenn sichere, auf klarer Anschauung beruhende Zahlvorstellungen gewonnen sind, vermag der Rechenunterricht zu gedeihen. Jeder Fehler, besonders aber jede Überhastung, rächt sich durch Jahre hindurch.

Daß Knilling und Tanck das Pestalozzische Anschauungsprinzip verworfen und zum Zählprinzip gegriffen haben, ist oben an anderer Stelle erwähnt. Auch andere neuere Rechenmethodiker suchen an die Stelle des bewährten Alten das noch nicht erprobte Neue zu setzen.

2. Welche Wege kann man bei der Behandlung des Zahlenkreises bis 100 einschlagen?

Die Notwendigkeit des Ausscheidens begrenzter Zahlenkreise hat si... seit langer Zeit herausgestellt. Es wurde gebräuchlich, die Zahlenkrei... nach der Zehnerordnung abzugrenzen. Danach unterschied man die Zahle... kreise von 1—10, 1—100, 1—1000 und den größeren oder höheren Zahle... kreis. Während nun bei der Behandlung der Zahlkreise über 100 hinau... in den wesentlichen Stücken Übereinstimmung herrscht, fehlt diese bei de...

Behandlung der ersten beiden Zahlenkreise. Die heutige Methode des Rechnens kennt zwei Hauptwege der Behandlung des Zahlenkreises bis 100, und es ist schwer, einen derselben für den allein richtigen zu erklären oder einen derselben ganz und gar zu verwerfen. Diesen Hauptwegen gehen eine Reihe von Nebenwegen parallel.

Betrachten wir zuerst den Weg, den Hentschel in seinem Lehrbuche einschlägt. Hentschel führt in der im ersten Abschnitt vorgeführten Art die Zahlen bis 10 ein und befestigt diese. Hieran schließen sich die vier Grundrechnungsarten im Zahlenkreise bis 10. Von diesen vier Grundrechnungsarten faßt nun Hentschel Zusammenzählen und Abziehen, desgleichen auch Vervielfachen und Teilen zusammen. Diese Gruppierung ist naturgemäß; denn Zusammenzählen und Abziehen beruhen auf der Zerlegung der Zahlen in 2 Teile und Vervielfachen und Teilen auf der Zerlegung der Zahlen in gleiche Teile. 4 ist $3 + 1$; daraus folgen die Aufgaben: $3 + 1 = 4$; $1 + 3 = 4$; $4 - 3 = 1$; $4 - 1 = 3$; 4 ist aber $2 + 2$, also 2×2; daraus folgt später $2 \times 2 = 4$; 2 ist in 4 2mal enthalten, und $\frac{1}{2}$ von 4 ist 2. Der Zahlenkreis wird nun bis 20 in bekannter Weise erweitert, und hierbei werden die Begriffe Zehner und Einer eingeführt. Auch in diesem Zahlenkreise wird das Zusammenzählen mit dem Abziehen, und das Vervielfachen mit den Divisionsarten verbunden. Nachdem nun der Zahlkreis bis 100 erweitert ist, treten die vier Grundrechnungsarten gesondert auf.

Anders gruppiert Grube den Rechenstoff dieses Zahlenkreises. Nicht die Grundrechnungsarten, sondern die Zahlen selbst sind ihm bei der Einteilung des Stoffes maßgebend. Jede Zahl bildet eine methodische Einheit, die individuell oder monographisch, d. h., die durch alle vier Grundrechnungsarten als organische Einheit behandelt wird. Selbstverständlich werden auch hier innerhalb jeder Zahl Zusammenzählen und Abziehen, und Vervielfachen und Teilen verbunden. Grube führt also die „Eins“ ein; da sich hieran nur die Aufgabe $1 - 1 = 0$ und die für Kinder dieser Anfangsstufe sehr schwer verständliche Aufgabe $1 \times 1 = 1$ anschließen läßt, so führt er die 2 in bekannter Weise ein und rechnet im Zahlenkreise der 2 alle Aufgaben, welche möglich sind. Hierauf wird die 3 eingeführt und mit ihr in diesem Zahlkreise gerechnet, als $2 + 1 = 3$; $1 + 2 = 3$; $3 - 2 = 1$; $3 - 1 = 2$; $3 - 3 = 0$; $3 \times 1 = 3$; $\frac{1}{3}$ von $3 = 1$; 1 in $3 = 3$mal; $1 \times 3 = 3$; 3 in $3 = 1$ mal. So fährt Grube fort bis 100; er gliedert also den Rechenstoff bis 100 in 100, bzw. in 99 Stufen. — Im Anschluß an die Behandlung jeder einzelnen Zahl werden zahlreiche angewandte Aufgaben gegeben, die sich nur dadurch von den auch sonst gegebenen Aufgaben unterscheiden, daß sie im Anschluß an die Methode immer auf dieselbe Zahl zurückkommen müssen, und daß sie die Heranziehung einer Reihe von Sachgebieten notwendig machen.

Diese weite Ausdehnung der Einzelbetrachtungen wurde von den Anhängern Grubes zuerst angegriffen. Gebräuchlich blieb es, bis 10 oder auch bis 20 Grubes monographische Methode anzuwenden, dann aber den vorhin angeführten Weg einzuschlagen.

Die anerkannte Wichtigkeit der Reihen und die Erfahrung, daß bei allem Rechnen der längere Gebrauch derselben operativen Zahl wesentlich zur Klarheit und Befestigung des Stoffes dient, führte wohl dazu, daß die Grubesche Methode dahin abgeändert wurde, daß nicht mehr in dem Zahlenkreise, sondern mit der Zahl gerechnet wurde. Dieser von Kaselitz und Brenner zuerst empfohlene Weg wurde von mir viele Jahre lang in der Schule erprobt. Die Resultate waren in jeder Hinsicht äußerst günstig. Die Zahlen bis 10 werden nacheinander in der angeführten Weise eingeführt und befestigt (Zu- und Abzählen der 1). Hierauf wird der Zahlenkreis bis 20 erweitert und in diesem Zahlenraume wird nun mit der 2 gerechnet. Die 2 wird zu jeder Zahl von 1 bis 18 gezählt, sie wird von jeder Zahl von 2 bis 20 abgezogen, jede Zahl wird mit 2 vervielfacht, so weit das Vielfache die 20 nicht überschreitet (Einmaleins mit der 2) und alle Zahlen, nicht nur die Vielfachen der 2, werden durch 2 geteilt. Daß auch hierbei das Zusammenzählen mit dem Abziehen und das Vervielfachen mit dem Teilen verbunden wird, ist einleuchtend. Der Zahlenkreis wird nun bis 30 erweitert. In dem erweiterten Zahlenkreise wird zuerst die 2 zugezählt und abgezogen, dann erst tritt das Rechnen mit der Zahl 3 auf. Der Gang ist derselbe, wie er bei der 2 angegeben worden ist.

Die Erweiterung des Zahlenkreises im Anschluß an jede neu zu behandelnde Zahl, die Gleichartigkeit der Operationen, die Mannigfaltigkeit der Reihen, die Verteilung des kleinen Einmaleins auf 1½ Schuljahr und die dadurch erreichte vollständige Sicherheit innerhalb jeder Zahl und dadurch im Zahlenkreise bis 100 sind die wesentlichsten Vorteile dieses Lehrganges. Nach Beendigung der 10 kleineren Kreise, in die der Zahlenkreis bis 100 zerfällt, müssen Ergänzungsaufgaben angeschlossen werden. Bisher wurden nur Einer zugezählt und abgezogen, bei den Ergänzungsaufgaben werden im bekannten Zahlenraume auch zweistellige Zahlen verwendet, ebenso werden nun auch zweistellige Zahlen vervielfacht (die Wiederholungszahl ist aber auch hier stets eine Einerzahl, und das Vielfache darf nie über 100 hinausgehen), endlich werden jetzt auch Zahlen, die über das 10fache des Teilers hinausgehen, geteilt. (Siehe C, Abschnitt 4.)

Somit ist der Zahlenkreis bis 100 vollständig durchgearbeitet worden, und die erzielte Einsicht und die gewonnene Rechenfertigkeit zeugen von der Vortrefflichkeit dieses einfachen Weges.

Mit Rücksicht auf die geltenden Bestimmungen, nach denen im ersten Schuljahr der Zahlenkreis bis 20 durcharbeitet werden soll, habe ich mich unter Anlehnung an das Kaselitzsche Prinzip der operativen Zahlen zu einem vermittelnden Weg entschlossen und denselben nach längerer Erprobung auch in der Neubearbeitung meiner bei H. Herrosé-Wittenberg erschienenen Rechenhefte angewendet. Dieser vermittelnde Weg ist sehr einfach; man wird dies aus folgenden Ausführungen erkennen.

Der Zahlenkreis bis 100 zerfällt in 3 Zahlenkreise, in den Zahlenkreis von 1 bis 10, den von 1 bis 20 und den von 1 bis 100. Die beiden ersten Zahlenkreise bilden den Rechenstoff des 1. Schuljahres, während der 3. Zahlenkreis dem 2. Schuljahre zufällt.

Im Zahlenkreise bis 10 werden zuerst nach und nach die Zahlen von 1 bis 5 eingeführt und durch Darstellung in Zahlbildern, Ziffern und durch Zu- und Abzählen der Eins befestigt. Die Zahlbilder sind bei der Auffassung der Zahlen Formzahlbilder, bei der Zerlegung der Zahlen aber Inhaltszahlbilder.

Erst nach vollständiger Sicherstellung dieser Zahlbegriffe wird die Einführung der Zahlen bis 10 in derselben Weise fortgesetzt.

Im Anschluß an die behandelten Sachgebiete und an die Inhaltszahlbilder wird nun die „Zwei" zu- und abgezählt, in derselben Weise die „Drei", dann die „Vier" usw. bis zum Zu- und Abzählen der „Neun". Zum Schluß mögen auch mehr als zwei Zahlen zusammengezählt werden. — (Wir gebrauchen hierbei gern die Wörter „dazu" und „davon", ohne diesen Gebrauch als ausschlaggebend hinstellen zu wollen.) — Vervielfachungs- und Teilungsaufgaben werden hier noch nicht genommen.

Sobald der Zahlenkreis über 10 erweitert wird, muß der Begriff „Zehner" eingeführt werden (Veranschaulichungsmittel sind neben dem Bündchen von 10 Stäbchen der allen Kindern wohlbekannte Zehnpfenniger und später die volle Reihe der Rechenmaschine). Im unmittelbaren Anschluß an die Einführung müssen viele Aufgaben für Zusammenfassen und Auflösen gegeben werden. Auch in diesem Zahlenkreise werden die Einerzahlen zum Zusammenzählen und Abziehen nacheinander herangezogen, bis zum Schluß bei der Wiederholung die Zahlen im bunten Wechsel auftreten. Diese Betonung der einzelnen Einerzahlen bei dem Zuzählen und Abziehen wird auch später bei dem Rechnen im Zahlenkreise bis 100 mit gleicher Strenge durchgeführt und gibt die besten Ergebnisse. Besonders bei den Übergängen aus einem Zehner in den andern erreichen wir nach gewissenhafter Einführung und tüchtiger Übung die geforderte Sicherheit. Diese grundsätzliche Heraushebung der einzelnen Zahl beim Zusammenzählen und Abziehen ist neu, beim Vervielfachen und Teilen hat man beeinflußt von dem Stoff schon längst diese Reihen gebildet. Näheres suche unter C. Nr. 5.

Jeder der beschriebenen Wege ist methodisch wohl durchdacht und führt den fleißigen und stetigen Arbeiter zum erwünschten Ziele.

3. Die Behandlung der Zahl 6 im Zahlenkreise bis 60 nach Kaselitz.

Der Kaselitzsche Weg ist so interessant und lehrhaft, daß ich es für notwendig halte, die Behandlung einer operativen Zahl hier vorzuführen.

Die Grundrechnungsarten mit der 5 im Zahlenkreise bis 50 sind beendet. Zu fünf vollen Reihen (Zehnerreihen) der Rechenmaschine wird auf der 6. Reihe zunächst eine Kugel geschoben. „Das sind 51 Kugeln", werden die Schüler ohne große Schwierigkeit aussprechen, da sie dasselbe schon bei der Erweiterung des Zahlenkreises über 20, 30 und 40 hinaus bei 21, 31 und 41 geübt haben. Diese 51 Kugeln werden in Zehner und Einer zusammengefaßt. Noch eine Kugel auf der 6. Reihe ergibt 52 Kugeln, dies wird fortgesetzt bis 59 Kugeln, doch ist es nicht notwendig, daß das Aufsteigen nur durch Hinzuzählen der Eins geschieht. Überall wird der

Zahlinhalt klar- und festgestellt durch Auflösungs- und Zusammenfassungsaufgaben, sowie durch die Fragen nach der Stellung einer Zahl zu einer andern. Zu 59 Kugeln wird noch eine Kugel geschoben. Auf der 6. Reihe stehen nun ebenfalls 10 Kugeln. Zehn Kugeln bildeten eine volle Reihe (eine Zehnerreihe oder einen Zehner). An der Rechenmaschine stehen 6 solche Zehner. 6 Zehner sind 60 Einer.

Zur Befestigung und Vertiefung werden nun die Zahlen von 2 bis 5 zu den Zahlen von 49 beziehungsweise 46 gezählt und von den Resultaten abgezogen. Reihen wie 49 + 2, 50 + 2 bis 58 + 2 und umgekehrt, 60 — 2, 59 — 2 bis 51 — 2, oder 49 + 2, 51 + 2 bis 57 + 2 und umkehrt werden mit diesen vier Zahlen geübt.

An einer einem bekannten Sachgebiete entnommenen einfachen Aufgabe, dann am benannten Größen, als Mützen, Bohnen usw., endlich an den Kugeln der Rechenmaschine oder an den Klötzchen des Rechenkastens wird nun gezeigt, daß 1 + 6 = 7 ist. Es ist also auch hier, wie überall, zunächst ein Rechnen mit benannten, dann mit unbenannten Zahlen. 7 davon 6 = 1, ergibt sich in unmittelbarem Anschlusse. Wir schieben unter die eine Kugel eine Zehnerreihe. Das sind 11 Kugeln. Hierzu werden dieselben 6 Kugeln gezählt, dies ergibt 17 Kugeln. 11 + 6 = 17 und 17 — 6 ist 11. Dies wird fortgesetzt durch fortwährendes Unterschieben einer neuen Zehnerreihe bis 51 + 6 = 57 und 57 — 6 = 51. Wesentlich hierbei ist, daß dieselben 6 Kugeln stets zu derselben Kugel gezählt werden. Ebenso wird vorgeführt und befestigt 2 + 6 bis 52 + 6, und umgekehrt 8 — 6 bis 58 — 6, 3 + 6 bis 53 + 6, 4 + 6 bis 54 + 6 und überall auch die entsprechenden Abzugsreihen. Jetzt stehen nun 5 Kugeln auf einer Reihe. Ich soll 6 Kugeln dazu schieben. Zunächst wird die Reihe der 5 zu einer vollen Reihe ergänzt und dann bleibt für die nächste Reihe noch 1. 5 + 6 = 11. Um 6 von 11 abzuziehen, könnte ich auf die Zusammensetzung aus 5 + 6 eingehen, doch wird es für die Folge wesentlich sein, wenn wir auch hier auf den vollen Zehner zurückgehen, d. h. von 11 erst 1 und dann noch 5 abziehen. — Durch Unterschieben eines Zehners erhalte ich 15, dazu dieselben 6, ergibt zwei Zehnerreihen und 1, also 21, dies fortgesetzt bis 45 + 6 und 51 davon 6. Bei der Einführung derartiger Aufgaben ist also stets beim Zusammenzählen der angefangene Zehner voll zu machen oder beim Abziehen ist bis auf den zu überschreitenden Zehner zurückzugehen, die Operationszahl ist also in entsprechende Posten zu zerlegen. Durch die häufige Wiederholung merkt dann der Schüler sehr bald, daß 5 + 6 = 11 ist, d. h., daß 6 zu 5 gezählt den nächsten Zehner um eins überschreitet. Die Zerlegung der Grundzahlen muß dann aufhören. Ebenso ist es bei den Abziehungsaufgaben. In derselben Weise wird eingeführt 6 + 6, 7 + 6, 8 + 6, 9 + 6, 10 + 6 bis zum Zahlenkreise bis 60 und zurück. Zwischen diesen Einführungen und nach denselben gehen Wiederholungsaufgaben, zunächst mit früher behandelten Zahlen, dann auch in freier Anordnung der Aufgaben.

Die Art der Einführung des Vervielfachens hängt davon ab, ob man im Zahlenkreise bis 100 beide Divisionsformen, oder nur eine, als

Umkehrung des Vervielfachens einführen will. Da schon an einer Form die Eigentümlichkeiten des Dividierens genügend hervorgehoben werden, und da das Teilen stets die unmittelbare, das Enthaltensein oder Messen aber die mittelbare Aufgabeform ist, Teilen also dem Kinde näher liegt als Enthaltensein, so verzichte ich im Zahlenkreise bis 100 und auch noch im Zahlenkreise bis 1000 auf das Enthaltensein und benutze die dadurch freiwerdende Zeit zur Erzielung größerer Sicherheit in den übrig bleibenden Rechnungsarten.

Das Teilen als Umkehrung des Vervielfachens erfordert das Einmaleins mit stetiger Wiederholungszahl. Als direkte Vorbereitung befestigen wir die Reihe 6 + 6 = 12, 12 + 6 = 18, 18 + 6 = 24, 24 + 6 = 30, 30 + 6 = 36, 36 + 6 = 42, 42 + 6 = 48, 48 + 6 = 54, 54 + 6 = 60. — Auf 6 Stäben der Rechenmaschine wird je eine Kugel vorgeschoben. 6mal 1 Kugel sind 6 Kugeln; 6mal 1 Bank sind 6 Bänke; 6mal 1 Tafel sind 6 Tafeln, bis 6mal 1 = 6. Angeschrieben wird: 6 × 1 = 6! Die 6 Kugeln auf den 6 Stäben sind möglichst zusammengedrückt worden, um die Vereinigung von 6mal 6 darzustellen. Jetzt lasse ich die Stäbe los; die 6 Kugeln stehen auf 6 verschiedenen Stäben gleich verteilt, sind also in 6 gleiche Teile zerlegt, jeder Teil = 1. Der sechste Teil (ein Sechstel) von 6 Kugeln = 1 Kugel; der 6. Teil von 6 Äpfeln ist 1 Apfel usw.; bis $\frac{1}{6}$ von 6 = 1. Auf jedem Stabe wird noch je 1 Kugel vorgeschoben, doch werden diese noch nicht mit den 6 ersten Kugeln vereinigt, sondern stehen rechts und links von einem dazwischen gehaltenen Buch, Lineal oder dgl. Es sind 6 Kugeln, welche vorgeschoben werden. Die Kinder zählen zusammen: 6 Kugeln dazu 6 Kugeln sind 12 Kugeln. Auf jedem Stabe stehen aber nun (Zusammenschieben der noch getrennt stehenden Kugeln) 2 Kugeln. Es sind 6mal 2 Kugeln. 6mal 2 Kugeln sind 12 Kugeln. Dasselbe an andern benannten Größen bis 6mal 2 = 12. Auch dies wird angeschrieben. In gleicher Weise wie bei den 6 Kugeln sucht man nun auch hier die Zerteilung der 12 in 6 Teile darzustellen. Das Ergebnis ist: der 6. Teil von 12 ist 2. Zu den vorhandenen 12 Kugeln kommt auf jedem Stabe 1 Kugel. Es sind 6 Kugeln, die vorgeschoben werden. Vorn stehen 12 Kugeln und 6 Kugeln. 12 Kugeln und 6 Kugeln sind 18 Kugeln. Die getrennt stehenden Kugeln werden zusammengeschoben. Auf 6 Stäben je 3 Kugeln sind 6mal 3 Kugeln. 6mal 3 Kugeln sind 18 Kugeln. In derselben Weise wird nun das Einmaleins der 6 bis 6 mal 10 eingeführt und befestigt. Überall also zuerst Zuzählen der 6 zu der vorhandenen Summe, hierauf Zusammenschieben der Kugeln, dann Feststellen der Anzahl der Kugeln auf jedem Stabe, endlich Vergleichen dieses Ergebnisses mit der zuerst erhaltenen Summe. Nach jedem neuen Ergebnisse des Vervielfachens sowohl wie auch des Teilens wird eine Pause gemacht, um die früheren Resultate zu wiederholen. Unbedingte Sicherheit ist notwendig.

Auch das Teilen der zwischen den Vielfachen von 6 liegenden Zahlen ...arf hier nicht versäumt werden. Durch dieses Teilen der zwischen den ...elfachen einer Zahl liegenden Zahlen wird die Bruchrechnung von Anfang vorbereitet. Die Kinder teilen schon vor der Schulzeit den Apfel, das

Brot usw., somit brauchen wir bei Einführung des Begriffes „ein Halb" nur die vorhandenen Vorstellungen durch gleichartige Anschauungen zu klären. Wochenlang wird nur durch die 2 geteilt, und hierdurch wird in diesem kleinen Kreise unbedingte Sicherheit erzielt. Man hüte sich aber vor ungeschickter Anwendung der Veranschaulichungsmittel. Das Kind kommt unsern Bemühungen auf halbem Wege entgegen, wenn wir von $\frac{1}{2}$ Apfel, $\frac{1}{2}$ Brot, $\frac{1}{2}$ Stück Butter usw. reden; $\frac{1}{2}$ Bank oder $\frac{1}{2}$ Fensterscheibe aber dürfte sich wenig zur Veranschaulichung empfehlen. — Der bei dem Teilen durch 2 beobachtete Vorgang des Zerlegens in 2 gleiche Teile unterstützt später die Einführung des „dritten Teils" oder des „Drittels". Leicht faßbare Veranschaulichungen können in reichem Maße geboten werden, und zur Befestigung ist reichlich Zeit vorhanden.

Auch bei dem Teilen der zwischen den Vielfachen von 6 liegenden Zahlen durch 6 läßt sich noch die unmittelbare körperliche Veranschaulichung verwerten. Ein Apfel z. B. läßt sich leicht in 6 gleiche Teile teilen, und der Name „Sechstel" wird von den Kindern unter Berücksichtigung von „Drittel", „Viertel" und „Fünftel" sicher selbst gefunden werden. Wenn auch bei 6 und den anderen größeren Teilern die unmittelbare Veranschaulichung schwieriger werden sollte, so werden doch die Kinder unter Heranziehung der bei den kleinen Teilern gewonnenen Klarheit die neuen Begriffe verstehen und benutzen lernen. Daß $\frac{2}{6}$ dadurch entstehen, daß 2 Äpfel, Birnen oder dgl. in je 6 gleiche Teile geteilt werden, verstehen die Kinder, da in gleicher Weise $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$ gebildet wurden. Ebenso werden auch $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{6}$ und $\frac{5}{6}$ eingeführt.

Nun teilt das Kind zuerst das Vielfache von 6 und dann den Rest. Z. B. bei 52 zuerst 48 und dann 4. Auch hier sind es Aufgaben mit benannten Zahlen und angewandte Aufgaben, welche am leichtesten behandelt und verstanden werden. Zu schwere Aufgaben vermeide man.

Es wäre ja auch denkbar, dieses Teilen der Reste bei der Behandlung der Einerzahlen wegzulassen und es erst zum Schluß des 2. Schuljahres bei den Ergänzungsaufgaben (vgl. den folgenden Abschnitt) zu geben; doch habe ich bisher stets gefunden, daß die Kinder nicht nur das notwendige Verständnis zeigen, sondern daß sie stets mit besonderer Freude auf dieses Teilen der Reste eingehen. Auch sind die Kinder bei der Behandlung der größeren Einerzahlen schon über $1\frac{1}{2}$ Jahr in der Schule und somit bildungsfähig, während die Schüler des ersten Schuljahres nur durch die leichten Zahlen 2 bis 4 zu teilen haben.

Vergleiche hierzu auch den Abschnitt über Vorbereitung der Bruchrechnung (C, Abschnitt 19).

4. Wie werden die Ergänzungsaufgaben im Zahlenkreise bis 100 gruppiert?

Die methodische Einheit „Ergänzungsaufgaben im Zahlenkreise bis 100" kann nur im Anschluß an die Kaselitzsche Behandlung des Zahlenkreises bis 100 auftreten und behandelt werden.

Im 2. Abschnitt ist schon erwähnt worden, daß zur allseitigen Durchdringung des Zahlenkreises bis 100 nach der Behandlung der Einerzahlen Ergänzungsaufgaben gegeben werden müssen. Bisher waren nur einstellige Zahlen und die 10 zugezählt, abgezogen und vervielfacht worden, und das Teilen wurde nur im Bereiche des 10fachen Teilers ausgeführt. Der gesamte Rechenstoff war in 10 Zahlenkreise im engsten Anschluß an die 10 behandelten Zahlen geteilt worden (vergleiche den vorigen Abschnitt), und von diesen waren die Zahlen 1 bis 4 in den Zahlenkreisen bis 40 im ersten Schuljahr und die Zahlen von 5 bis 10 in den Zahlenkreisen bis 100 in den drei ersten Vierteljahren des 2. Schuljahres zur Durchnahme gekommen. Das letzte Vierteljahr des 2. Schuljahres gehört den Ergänzungsaufgaben.

Da bei diesem Rechenstoff der enge Zusammenhang zwischen Zusammenzählen und Abziehen und zwischen Vervielfachen und Teilen nicht mehr so unmittelbar zu erkennen und in der Schule zu verwerten ist, so wird er hier nach den vier Grundrechnungsarten gegliedert. Bei dem Zusammenzählen werden zunächst reine Zehnerzahlen zugezählt und zwar: 1. zu reinen Zehnerzahlen und 2. zu gemischten Zahlen. Hierauf werden gemischte Zahlen zugezählt und zwar zunächst zu reinen Zehnerzahlen und dann zu gemischten Zahlen. Bei der letzten Art sind die Aufgaben so auszuwählen, daß die Summe der Einer zuerst den neuen Zehner nicht überschreitet und dann über diesen hinausgeht.

Aufgabenbeispiele: a) $40 + 20 =$
b) $18 + 30 =$
c) $60 + 18 =$
d) $74 + 12 =$
e) $38 + 12 =$

Bei dem Abziehen werden 1. reine Zehnerzahlen a) von reinen Zehnerzahlen und b) von gemischten Zahlen abgezogen; 2. werden a) gemischte Zahlen von gemischten Zahlen ohne Überschreiten eines Zehners in der Vollzahl, b) gemischte Zahlen von reinen Zehnerzahlen und c) gemischte Zahlen von gemischten Zahlen mit Überschreiten des Zehners in der Vollzahl abgezogen.

Aufgabenbeispiele: a) $60 - 30 =$
b) $64 - 30 =$
c) $33 - 21 =$
d) $80 - 15 =$
e) $75 - 27 =$

Bei dem Vervielfachen bietet sich Gelegenheit, die früher behandelten Einerzahlen weiterhin anzuwenden, also die Zahlenfamilien über die engsten Grenzen hinaus zu erweitern. Wir vervielfachen reine Zehner und gemischte Zahlen zunächst mit 2, dann mit 3 bis 9. Der Kreis der zu vervielfachenden Zahlen wird immer enger, da die Vielfachen die Zahl 100 nicht überschreiten dürfen. — Zum Schluß folgt dann als Übung das Vervielfachen mit den verschiedensten einstelligen Zahlen.

Aufgabenbeispiele:	a) $2 \times 40 =$	dann
	b) $2 \times 36 =$	c) 5×15
	dasselbe	7×12
	mit 3 bis 9,	3×23.

In ähnlicher Weise wie beim Vervielfachen verfahren wir beim Teilen. Wir teilen nacheinander durch die Zahlen 2 bis 9, um dann später mit verschiedenem Teiler zunächst dieselbe und dann verschiedene Zahlen zu teilen. Über die Lösungsformen vergleiche C, Abschnitt 7.

Aufgabenbeispiele:	a) 40 : 2	dann
	b) 52 : 2	d) 85 : 2, 3, 4 bis 9.
	c) 57 : 2	
	dasselbe	
	durch 3 bis 9.	

Bemerkt dürfte hier noch werden, daß auch bei den Ergänzungsaufgaben das schriftliche Rechnen ein Kopfrechnen ist, daß also von den Ansätzen und Formen des Tafelrechnens hier noch vollständig abgesehen werden muß. Die Kinder werden streng angehalten, die Aufgaben im Kopfe zu lösen und nur die Ergebnisse niederzuschreiben. Daß die Zahlen der Aufgabe nicht untereinander, sondern nebeneinander geschrieben werden sollen, ist auch schon in den Aufgabenheften zu ersehen.

5. Die Gruppierung des Rechenstoffs bei der Behandlung des Zahlenkreises bis 100 nach der vermittelnden Methode. (Im Anschluß an Schroeter, Tafelrechnen, Ausgabe A, Heft 1.)

Der Zahlenkreis bis 100 ist nach den Allg. Best. vom 15. Okt. 1872 der Rechenstoff der Unterstufe, zu der in der mehrklassigen Schule die beiden ersten, in der einklassigen Schule aber die drei ersten Jahrgänge gehören. Er ist für beide Schulgattungen auf 2 Abteilungen zu verteilen, da in der einklassigen Schule der zweite und der dritte Jahrgang zu einer Abteilung vereinigt werden. Über die verschiedene Verteilung des Rechenstoffs in diesen Schulen ist in den Stoffverteilungsplänen das Nähere nachzusehen. — Das erste Schuljahr der mehrklassigen Schule hat die Zahlenkreise von 1 bis 10 und von 1 bis 20 durchzuarbeiten, dem zweiten Schuljahr fällt der Zahlenkreis von 1 bis 100 zu. Hiernach ist der Rechenstoff des 1. Heftes in drei Abschnitte gegliedert:

1. Abschnitt:	Der Zahlenkreis	von	1	bis	10;
2. „	„ „	„	1	„	20;
3. „	„ „	„	1	„	100.

Aus dem Inhalt der einzelnen Gruppen wird man den methodischen Gang des Rechenunterrichtes genau erkennen.

Die Aufgaben in den ersten Gruppen des ersten Abschnitts sind nicht direkt für die Schüler gegeben; sie sind nur aufgenommen worden, damit die methodische Vollständigkeit erkannt werden soll.

1. Abschnitt: Der Zahlenkreis von 1 bis 10.

1. Gruppe: Einführung der Zahlen von 1 bis 5.
 a) Anschauliche Einführung der Zahlbegriffe; b) Zahlbilder; c) Zahlbilder und Ziffern; d) Ziffern.
2. „ Befestigung der Zahlen von 1 bis 5 durch Zu- und Abzählen der „Eins“.
3. „ Einführung der Zahlen von 6 bis 10. (Wie in Gruppe 1.)
4. „ Befestigung der Zahlen von 6 bis 10 durch Zu- und Abzählen der „Eins“.
5. „ Zu- und Abzählen der „Zwei“.
6. „ Übung und Wiederholung.
7. „ Zu- und Abzählung der „Drei“.
8. „ Übung und Wiederholung.
9. u. 10. Gruppe: Dasselbe mit der „Vier“.
11. u. 12. „ Dasselbe mit der „Fünf“.
13. u. 14. „ Dasselbe mit der „Sechs“.
15. u. 16. „ Dasselbe mit der „Sieben“.
17. u. 18. „ Dasselbe mit der „Acht“.
19. Gruppe: Dasselbe mit der „Neun“.
20. „ Zusammenzählen von mehr als zwei Zahlen.

2. Abschnitt: Der Zahlenkreis von 1 bis 20.

21. Gruppe: Die Zahlen von 1 bis 20. a) Anschauliche Einführung der Zahlbegriffe; b) die Ziffern.

I. Zusammenzählen und Abziehen.

22. Gruppe: Die Zahlen 2 und 3.
23. „ „ „ 4 „ 5.
24. „ „ „ 6 „ 7.
25. „ „ „ 8 „ 9.
26. „ Wiederholung.
27. „ Vereinigen von mehr als 2 Zahlen.
28. „ Reihen.

II. Vervielfachen und Teilen.

29. Gruppe: Vervielfachen und Teilen mit 2 und 3.
30. „ „ „ „ „ 4 bis 9.
31. „ Übung des Vervielfachens und Teilens.
32. „ Wiederholung.

3. Abschnitt: Der Zahlenkreis von 1 bis 100.

33. Gruppe: **I. Einführung der Zahlen von 20 bis 100.**

II. Zuzählen und Abziehen von Einerzahlen.

a) Zuzählen.

34. Gruppe: Ohne Überschreitung des Zehners.
35. u. 36. Gruppe: Mit Überschreitung des Zehners.

37. Gruppe: Vereinigen von mehr als 2 Zahlen.
38. „ Unser Garten.

b) Abziehen.

39. Gruppe: Ohne Übergang.
40. u. 41. Gruppe: Mit Übergang.
42. Gruppe: Verbindung des Zusammenzählens und Abziehens.
43. „ Unsere Haustiere.

III. Zusammenzählen und Abziehen zweistelliger Zahlen.

a) Zusammenzählen.

44. Gruppe: Zuzählen reiner Zehnerzahlen zu reinen Zehnerzahlen. (40 + 30 =)
45. „ Zuzählen reiner Zehnerzahlen zu zweistelligen Zahlen (18 + 40 =).
46. „ Zuzählen zweistelliger Zahlen zu reinen Zehnerzahlen (20 + 12 =).
47. „ Zuzählen zweistelliger Zahlen zu zweistelligen Zahlen ohne Übergang (36 + 13 =).
48. „ Dasselbe mit Übergang (28 + 35 =).
49. „ Zusammenzählen von mehr als 2 Posten (48 + 27 + 15 =).
50. „ Kleine Ausgaben.

b) Abziehen.

51. Gruppe: Abziehen reiner Zehnerzahlen (60 — 40 = und 64 — 40 =).
52. „ Abziehen zweistelliger Zahlen von zweistelligen Zahlen ohne Übergang (75 — 23 =).
53. „ Abziehen zweistelliger Zahlen von reinen Zehnerzahlen (40 — 28 =).
54. „ Abziehen zweistelliger Zahlen von zweistelligen Zahlen mit Übergang (42 — 18 =).
55. „ Unser Blumen-, Obst- und Gemüsegarten.

IV. Vervielfachen und Teilen.

a) Vervielfachen.

56. Gruppe: Vervielfachen mit den Zahlen 2 bis 4.
a) Einmaleinsreihen; b) Zweistellige Zahlen.
57. „ Dasselbe mit den Zahlen 5 bis 10.
58. „ Wiederholung.

b) Teilen.

59. Gruppe: Teilen der Zahlen der jedesmaligen Einmaleinsreihe.
60. „ Vorbereitung der Bruchrechnung. (Entstehung der Teile.)
61. „ Teilen; gegliedert in Gruppen nach den Zahlen von 2 bis 9. (40 : 2 =; 56 : 2 =; 37 : 2 = ; dasselbe durch 3 usw.)
62. u. 63. Gruppe: Teilen durch die Zahlen von 2 bis 9 ohne Gliederung nach den Teilern.

64. Gruppe: Weitere Vorbereitung der Bruchrechnung. (Verwertung der Teile). ($\frac{3}{8} + \frac{1}{8} =$.)
65. „ Wiederholungsaufgaben aus allen vier Grundrechnungsarten.
66. „ Zusammengesetzte Aufgaben ($2 + 36 - 15 =$).
67. „ Angewandte Aufgaben.

Nicht mit Unrecht wird vielfach angeführt, daß das 1. Schuljahr kein Rechenheft braucht, da die Lesefertigkeit des Kindes zu gering ist, und das Rechenbuch auch leicht die so notwendige unmittelbare Beziehung zwischen Lehrer und Schüler trüben könne. — Wenn man sich aber trotzdem zur Benutzung eines Rechenheftes im 1. Schuljahre entschließt, damit der Lehrer seine Zeit nicht durch das Anschreiben der Aufgaben zersplittert, so darf das Rechenheft nur solche Aufgaben enthalten, die das Kind selbst ablesen und rechnen kann. Alle angewandten Aufgaben für Kopf- und Tafelrechnen, auch die erwähnten Einführungsaufgaben, sind deshalb im Rechenheft für das 1. Schuljahr, also in den Gruppen 1 bis 32, weggelassen. Erst im 2. Schuljahr finden die Kinder am Anfang der einzelnen Gruppen leichte Einführungsaufgaben, am Ende derselben leichte Anwendungsaufgaben und zum Schluß einer Rechnungsart kleine Sachgebiete.

6. Die Sachgebiete der Unterstufe.

Über das Pestalozzische Anschauungsprinzip und seine Verwendung im Rechnen ist schon an verschiedenen Stellen dieses Buches ausführlich berichtet worden, und wir konnten feststellen, daß mit wenigen Ausnahmen nicht nur sämtliche Rechenmethodiker, sondern auch sämtliche Rechenlehrer fest auf diesem Pestalozzischen Grundsatz stehen. Dies ist die Theorie; wie stand und steht es aber in der Praxis? Lege die Hand aufs Herz und täusche dich nicht selbst, lieber Leser. Jawohl, wir haben an Bohnen, Erbsen, Äpfeln, Kugeln, Strichen usw. den Zahlbegriff eingeführt und glauben recht anschaulich verfahren zu sein. Fünf- und mehrmal haben wir die gleiche Anzahl von gleichen Gegenständen zur Anschauung gebracht und haben jedesmal im vollständigen Satze sprechen lassen: Das sind x Bohnen, das sind x Äpfel usw. Nun beobachte, lieber Leser! Hattest du das Interesse deiner Kinder erregt? Glänzten die kleinen Augen? — Höre den mechanischen Tonfall und siehe, wie jenes Kind, dessen sonstige Unaufmerksamkeit offenkundig ist, doch nachspricht: „Das sind x Striche!" Und welches Resultat hast du erzielt? Haben deine Kinder Zahlbegriffe gewonnen?

Du rechnest: 5 Äpfel und 2 Äpfel, 5 Bohnen und 2 Bohnen, 5 Striche und 2 Striche usw. Die Aufmerksamkeit, die du bei dem ersten Beispiel erregt hast, verschwindet bald, und monoton folgen die Antworten: 7 Bohnen, 7 Striche usw. Und welches Resultat hast du erzielt? Können die Kinder $5 + 2$ zusammenzählen?

Dein Unterricht war zwar gut gemeint, aber er war kein Anschauungsunterricht; denn nicht das bloße Sehen der Bohnen, Stäbe, Striche usw. ist Anschauung. Du hast fast ebenso mechanisch unterrichtet, wie Adam

Ries und seine Zeitgenossen; der Geist Pestalozzis ist nicht auf dich gekommen.

Jetzt erzähle deinen Kindern ein Geschichtchen, vielleicht ein Märchen, und hebe das rechnerische Moment heraus; lenke die Aufmerksamkeit der Kinder auf Gegenstände in der Schulstube, dem Schulhof, der Straße usw.; laß die Zahlbilder vor ihnen entstehen und laß sie von den Kindern nachzeichnen u. a.! Weg ist alle Schläfrigkeit; in den Augen spiegelt sich das Interesse; wie schnell und sicher ist die Auffassung! Also benutze diese Erfahrungen und unterrichte anschaulich; ziehe zuerst die den Kindern wohlbekannte nächste Umgebung heran, und übe später die Beobachtungsgabe deiner Schüler dadurch, daß du ihnen bestimmte Anschauungsaufgaben gibst. Letzteres ist nicht entbehrlich; denn die Kinder kennen wohl die Häuser der Straße und die Bäume im Garten usw., doch haben sie die Anzahl nicht aufgefaßt. Eng begrenzt ist der Anschauungskreis der Kinder, und eng begrenzt ist auch die Zahl der für die Unterstufe geeigneten Sachgebiete. Wenn wir auch die Schulstube, das Schulhaus, den Schulgarten, den Schulhof und später die Haustiere, den Obstgarten, das Wohnhaus, die Ergebnisse der Jagd, die Münzen u. a. anführen, und wenn auch für jede Schule durch besondere Verhältnisse noch verschiedene gut geeignete Sachgebiete dazukommen, so wird doch eine Wiederholung der Gebiete nicht vermieden werden können. Schadet diese wiederholte Heranziehung der Sachgebiete? Beobachte deine Schüler und die Kinder im vorschulpflichtigen Alter! Sind sie zufrieden, wenn du ihnen das Märchen von den sieben Geißlein einmal erzählt hast, wollen sie es nicht immer und immer wieder hören, und ist ihr Interesse an der Erzählung bei der zehnten Wiederholung geschwunden?

Eins dürfen wir aber bei allem Unterricht und besonders bei dem Rechenunterricht auf der Unterstufe nicht vergessen, das ist die Übung und die dadurch ermöglichte Befestigung. Übe im Anschluß an die Sachgebiete, übe dann aber auch an abstrakten Zahlen. Und sollte das Kind unsicher oder zweifelhaft sein beim Rechnen mit unbenannten Zahlen, so werden die Zweifel schwinden, sobald du benannte Zahlen im Anschluß an ein bekanntes Sachgebiet bringst.

So lernen unsere Kinder nicht nur rechnen, sondern auch denken. Die Zerlegung der Zahlen bei den verschiedenen Rechnungsarten ist gewiß eine ausgezeichnete Übung, aber nicht das Ziel des Rechenunterrichts. Was bezweckt denn die immer wiederkehrende Frage der Kinder: Wie mache ich das? Will sie erfragen, wie ich zusammenzähle, abziehe, vervielfache oder teile? Nein, sondern sie will ergründen, was für eine Rechnungsart anzuwenden ist. Das ist ja der Unterschied zwischen der reinen Zahlenaufgabe und der angewandten Aufgabe, daß die erste dem Kinde die Aufgabenart bezeichnet, die zweite aber nicht. Bei der angewandten Aufgabe muß das Kind selbst ergründen, welche Rechnungsart notwendig ist, und das ist die Denkarbeit der Kinder, die auf das spätere Leben vorbereitet. Mit dieser Erziehung zum Denken müssen wir aber auf der Unterstufe anfangen durch fortwährende Heranziehung von angewandten Aufgaben aus passenden Sachgebieten.

7. Die schulgemäßen Lösuugen und die besonderen Auflösungsweisen.

Schon bei den einfachen Aufgaben im Zahlenkreise bis 100 tritt die Notwendigkeit einer feststehenden Lösungsform deutlich hervor. Gerade bei kleinen Kindern ist es nicht unbedenklich, bei ähnlichem oder gar gleichem Stoffe willkürlich mit der Form zu ändern. „Eadem per eadem“ (Dasselbe durch dasselbe), sagt Trotzendorf, und vor ihm mahnt Luther in seiner Vorrede zum kleinen Katechismus: „.... sondern nehme einerlei Form vor sich, darauf er bleibe und dieselbige immer treibe, ein Jahr wie das andere; denn das junge und alberne Volk muß man mit einerlei Text und Formen lehren, sonst werden sie gar leicht irre“ usw.

Auch für das Rechnen ist schon längst die Forderung ausgesprochen: „Man gebe immer erst ein bestimmtes, festes Normalverfahren für die Berechnung einer bestimmten Aufgabenart und übe dies tüchtig ein; erst dann mag man gelegentlich auch auf diese oder jene Abkürzung eingehen“ (Sobolewski). Wir fordern, daß die vorgeschriebene Form um so strenger sei, je weniger vorgeschritten der Schüler ist. Nach und nach mag sich diese enge Begrenzung lockern, der Schüler mag mit der herangebildeten Kraft versuchen, eigene Wege einzuschlagen, immer aber wird er gerne auf den festen Boden des Normalverfahrens, zur schulgemäßen Lösungsform, zurückkehren. Diese schulgemäße Lösungsform soll nicht allein Rechenfertigkeit erzielen, mehr noch soll sie das Kind an sicheres, logisches Denken gewöhnen und den Lehrer bei der Kontrolle der schwachen oder auch faulen Kinder unterstützen. Denn nicht immer kann der Lehrer warten, bis alle Schüler der Klasse die Aufgabe gelöst haben, und mancher Schüler möchte dann, da er so wie so immer nachhinkt, sich gar nicht mehr anstrengen und im süßen Nichtstun die Rechenstunde verträumen. Aber die Fragen des Lehrers nach den Zwischenresultaten, die sich bei der genauen Befolgung der schulgemäßen Lösungsform ergeben, zwingen jeden Schüler zum Rechnen; das bekannte Wort, ich bin nicht fertig, hört auf, der Deckmantel der Faulheit zu sein. Vorgeschritten genug zur Lockerung des festen Bandes ist das Kind aber nicht nur in den letzten Schuljahren, sondern stets dann, wenn es eine Rechnungsart verstanden und geübt hat, daher strenge Übung, aber freie Anwendung.

Auf der Unterstufe, also im Zahlenkreise bis 100, muß der Lehrer die schulgemäße Lösungsform durch stetiges, gleichmäßiges Betonen der betreffenden Form anbahnen, zur selbständigen Anwendung sind die Kinder noch zu ungeschickt, und die Forderung ist zu hoch, daß alle Kinder des 2. Schuljahres Aufgaben, wie 25 + 67, ohne Hilfe vorrechnen sollen. (Auch in anderen Unterrichtsfächern sind die Anforderungen bezüglich der selbständigen Leistungen der Kleinen mit Rücksicht auf die mangelnde sprachliche Bildung verhältnismäßig gering.) — Auf der Mittelstufe aber muß jedes Kind jede berechtigte Aufgabe selbständig und sicher lösen können.

Daß die schwachen [illegible] bei später zum Ziele gelangen, läßt

sich nicht vermeiden; man verlange deshalb auch hier, wie in jedem andern Unterrichtsfache, zuerst von den besten Kindern die selbständige Leistung und gehe nach und nach erst zu den schwächern Kindern über.

Welches sind nun die schulgemäßen Lösungsformen? Zunächst haben wir für jede Grundrechnungsart eine solche Lösungsform, die vom 2. Schuljahr an der Lösung sämtlicher Aufgaben der betreffenden Grundrechnungsart zugrunde liegen muß. Bei der Darbietung richtet der Lehrer seine Fragen so ein, daß die Antworten der Kinder die einzelnen Teile der schulgemäßen Lösungsform bilden; diese brauchen dann nur noch zusammengestellt und an vielen Beispielen eingeprägt zu werden.

a) Zusammenzählen:

Die Aufgabe, die der Lehrer lösen lassen will, soll lauten: Wieviel ist 16 + 25? Der Lehrer nennt von vornherein die Aufgabe nicht, sondern fragt: Wieviel ist 16 dazu 20? (Dies ist geübt, siehe Heft 1, Gruppe 45.) Der Schüler antwortet: 16 + 20 ist 36. Das Zuzählen der 5 ist früher geübt (Heft 1, Gruppe 34 bis 36), deshalb zweite Frage: Wieviel ist 36 + 5? Antwort: 41. Nun stellen die Schüler unter Leitung des Lehrers fest, daß sie zu 16 zuerst 20 und dann 5, also 25 gezählt haben. Wenn die Kinder mehrere derartige Aufgaben in derselben Weise gelöst haben, so finden sie bald, daß, wenn sie nun 37 zuzählen sollen, sie zunächst 30 zum ersten unveränderten Posten und dann zur erhaltenen Summe 7 zählen müssen, daß also 37 in 30 und 7 zerlegt werden muß. Nun kann der Lehrer bei der Aufgabe 18 + 45 fragen: Welche Zahl zerlegst du? In welche Posten zerlegst du 45? Wieviel ist 18 + 40; wieviel 58 + 5; wieviel also 18 + 45? Wir sehen, daß die Antworten, wie es verlangt worden ist, der Reihe nach Teile der schulgemäßen Lösungsform sind, und manchem begabten Kinde gelingt auch hier schon die selbständige Vorführung. — Im Zahlenkreise über 100 wird die schulgemäße Lösungsform ebenso eingeführt. Soll 425 zu 380 gezählt werden, so lautet die erste Aufgabe 425 + 300, die zweite Aufgabe 725 + 80. Auch hier wird festgestellt, welche Summe von Zahlen überhaupt zu 425 gezählt ist; darauf folgt die Übung und dann die Regel. Die Erweiterung auf jede dreistellige Zahl ist jetzt leicht selbst zu finden.

Das Wesen der schulgemäßen Lösungsform beim Zusammenzählen besteht also darin, daß der erste Posten unverändert bleibt, während der zweite Posten in die Einheiten der Zehnerordnung zerlegt wird. Von diesen werden zuerst die großen, dann die kleinen Einheiten zugezählt. Jede leibliche Klasse muß dahin gelangen, daß die Schüler zum Schluß diese schulgemäße Lösung im Chore sprechen, also die Aufgabe 356 + 287 folgendermaßen lösen können: Die Aufgabe heißt: Wieviel ist 356 dazu 287? 287 ist 200, 80 und 7; 356 dazu 200 ist 556, (556) dazu 80 ist 636, (636) dazu 7 ist 643, also ist 356 dazu 287 643. (Zuerst mag jeder Teilposten wiederholt, die eingeklammerten Zahlen also mitgesprochen werden, später fällt dies weg.)

b) Abziehen:

Die schulgemäße Lösungsform beim Abziehen ist der beim Zusammenzählen gleich, und auch ihre Einführung entspricht der Einführung der schulgemäßen Lösung des Zusammenzählens. Die Vollzahl bleibt unzerlegt, die Abzugszahl wird in die Einheiten der Zehnerordnung zerlegt, wie beim Zusammenzählen, und auch hier werden zuerst die großen, dann die kleineren Einheiten abgezogen. Es ist hier natürlich dieselbe Fertigkeit wie bei dem Zusammenzählen zu fordern. Eine ausgeführte Lösungsform auf der Mittelstufe würde hier folgende sein: Die Aufgabe heißt: Wieviel ist 835 davon 276? 276 ist 200, 70 und 6; 835 davon 200 = 635, (635) davon 70 = 565, (565) davon 6 = 559; also ist 835 davon 276 = 559.

c) Vervielfachen:

Die Lösung der Aufgabe 4 × 23 wird folgendermaßen dargeboten werden. (Das Vervielfachen von reinen Zehnerzahlen ist ebenso geübt, wie das von den Einerzahlen.) — Wieviel ist 4 × 20? Wieviel ist 4 × 3? (Schon früher geübt.) Wieviel ist 80 und 12? Welche Zahl ist zuerst, welche dann mit 4 vervielfacht worden? Welche Summe ist mit 4 vervielfacht worden? Wieviel ist also 4 × 23? Nachdem noch einige Aufgaben in gleicher Weise gerechnet worden sind, werden die Schüler bald merken, daß sie 23 in 20 und 3 zerlegen und zuerst die Zehner und dann die Einer vervielfachen, das Vielfache der Einer aber mit dem vorhergehenden Vielfachen der Zehner vereinigen müssen.

Die Übertragung dieser Lösungsform auf Aufgaben, in denen Hunderter und Zehner oder Hunderter, Zehner und Einer vervielfacht werden sollen, kann nicht schwer sein, wenn die Kinder an dem Vervielfachen von Zehnern und Einern das Wesen der Lösungsform schon erkannt haben. Die festgestellte Lösungsform würde hiernach sein: Die Aufgabe heißt: Wieviel ist 7 × 138? 138 ist 100, 30 und 8; 7 × 100 = 700; 7 × 30 = 210, zu 700 = 910; 7 × 8 = 56, zu 910 = 966; also ist 7 × 138 = 966.

d) Teilen:

Anders gestaltet sich die schulgemäße Lösungsform bei dem Teilen, wenn auch nur nach der äußeren Seite des Zerlegens der Zahlen. Es soll durch 2 geteilt werden. Geübt ist das Teilen der Zehner- und Einerzahlen durch 2. Zugrunde liegt das Einmaleins der 2 und zwar im Zahlenkreise bis 100 auch mit Zehnerzahlen. Die Resultate sind gesichert, und die Posten können wie folgt aufgesagt werden: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 40, 60, 80, 100. Als Überleitung zum Teilen werden Teilungsaufgaben gegeben, die aber die Vervielfachungsform beibehalten haben. So frage ich z. B.: Welche Zahl muß ich mit 2 vervielfachen, um 16, 12, 20, 60 usw. zu erhalten? Die weiterführende Darbietung wird sich nun in folgender Weise ergeben: Wie groß ist die Hälfte von 40? (20). Wie groß ist die Hälfte von 12? (6). Wieviel ist 20 + 6? (26). Wieviel ist 40 + 12? (52). Wie groß ist die Hälfte von 52? (26). Wie

groß ist also die Hälfte von 52? (26). Ähnliche Aufgaben werden gerechnet, dann folgt die Regel: **Die Teilungszahl wird zerlegt in Vielfache des Teilers.** Die endgültige Lösungsform einer Teilungsaufgabe auf der Mittelstufe wird hiernach sein: Die Aufgabe heißt: Wie groß ist der 4 Teil von 936? 936 ist 800, 120 und 16; der 4. Teil von 800 ist 200; der 4. Teil von 120 ist 30, zu 200 ist 230; der 4. Teil von 16 ist 4, zu 230 ist 234; also ist der 4. Teil von 936 = 234. — **Bemerkung:** Diese Zerlegung der Zahlen behufs Teilung derselben lehrt uns die Zahlen allseitiger kennen, als die mehr mechanische Zerlegung in die Einheiten der Zehnerordnung. Ich habe nichts gefunden, was das Zahlenverständnis und die Zahlenkraft der Schüler mehr fördert, als die Übungen im Teilen der Zahlen, selbst wenn man sich beim Teiler die Beschränkung auferlegt, nur einstellige Zahlen zu nehmen. In Wirklichkeit besteht die Hauptarbeit beim Teilen in der Zerlegung der Zahlen, nach richtiger Zerlegung ist die Angabe der Teile leicht. Man stelle deshalb häufig Übungen im Zerlegen der Zahlen an. Wie mannigfaltig ist z. B. die Auffassung von 856, wenn man die Zahl zur Teilung durch 2, durch 3 usw. bis durch 9 zerlegt, und durch keine Übung kann die Sicherheit im Einmaleins schneller erreicht werden, als durch diese Zerlegung.

4. Die Übertragung und Verwendung dieser Lösungsformen auf den höheren Zahlenkreis und auf andere Rechengebiete ist so unmittelbar, daß dies hier nicht weiter ausgeführt zu werden braucht.

Strenge Übung, aber freie Anwendung! — „Der Meister kann die Form zerbrechen!“ Also: Welche besonderen Auflösungsweisen sind einzuführen? Am liebsten möchte ich antworten: Keine! Die möglichst allseitige Auffassung einer Aufgabe, wie sie hier und da noch gefordert wird, hat ja auch ihre bildenden Momente, vor allen Dingen bei hochbegabten Schülern und im Einzelunterricht; in der Volksschule wollen wir aber zufrieden sein, wenn die schulgemäßen Lösungen gesichert sind und wenn die **einfachsten und nächstliegenden** der besonderen Auflösungsformen kurz berücksichtigt werden. Die **Vergrößerung** einer Zahl zu einer bequemen Zehner- oder Hunderterzahl oder zu Teilen von diesen, vielleicht auch zu einer dann leicht zu teilenden Zahl ist wohl die wichtigste Form, und diese fassen die Kinder leicht und gern; die Bedeutung der anderen Formen ist mindestens zweifelhaft. Entweder verlangen diese Aufgaben Zahlen, mit denen wir nicht mehr im Kopfe rechnen (siehe C. Abschnitt 8), z. B. Teilen durch 56, wenn wir 56 in 8×7 zerlegen, oder sie verlangen eigens zu diesem Zwecke zurechtgemachte Aufgaben, wie bei der Aufgabe $\frac{1}{59}$ von 7200, oder sie führen zu allerlei mechanischen Künsteleien, die keinen bildenden Wert haben, wozu ich für die Volksschule selbst die Lösung der Aufgaben nach algebraischen Formeln rechne, z. B.

$$11\tfrac{1}{2} \times 12\tfrac{1}{2} = (12 - \tfrac{1}{2}) \times (12 + \tfrac{1}{2}) = 144 - \tfrac{1}{4} = 143\tfrac{3}{4}.$$

Wenige hinweisende Bemerkungen werden genügen, die Kinder auf den Gebrauch dieser einfachen und praktischen Lösungsformen aufmerksam zu machen. Man beachte aber, daß, sobald die Einführung dieser Formen geschehen ist, daraus die unabweisbare Pflicht der Übung und Anwendung erwächst.

Lehrer und Seminaristen, aber nicht Volksschüler werden leicht den in den nachfolgenden Sätzen gegebenen einheitlichen Unterschied zwischen den schulgemäßen Lösungsformen und den für die Volksschule berechtigten besonderen Auflösungsweisen erkennen. Jede schulgemäße Lösungsform ist ein Rechnen mit formellen Summen, jede in der Volksschule berechtigte besondere Auflösungsweise ist ein Rechnen mit formellen Differenzen. Das Zuzählen, Abziehen und Vervielfachen der einzelnen Einheiten der Zehnerordnung, in welche die zur Zerlegung kommende Zahl geteilt wurde, und das Teilen der Vielfachen des Teilers ist genau dasselbe, was wir bei dem Buchstabenrechnen bei den einzelnen Grundrechnungsarten an den formellen Summen üben. Man vergleiche z. B. 7×85 und $a(x + y)$ oder $560 : 4$ und $(a + b) : c$. Die einfachsten und nächstliegenden und daher in der Volksschule berechtigten besonderen Auflösungsweisen dagegen lassen sich stets auf das Rechnen mit formellen Differenzen zurückführen. So rechnen wir z. B. bei der Aufgabe: $635 + 299$: 299 ist $300 - 1$; $635 + 300 = 935$, wir erhielten, da wir 1 zu viel zu 635 gezählt haben, eine um 1 zu große Summe, deshalb müssen wir 1 von 935 abziehen; $935 - 1 = 934$, also ist $635 + 299$ 934. In der Buchstabenrechnung üben wir dasselbe, wenn wir sagen: Eine formelle Differenz $(a - b)$ wird addiert, wenn der Minuendus (a) addiert, der Subtrahendus (b) aber subtrahiert wird. — Oder lösen wir die Aufgabe: Wieviel ist $5337 - 898$? 898 ist $900 - 2$. $5337 - 900$ ist 4437, da wir aber 2 zu viel abgezogen haben, ist der Rest um 2 zu klein geworden, wir müssen also diese 2 zu 4137 zählen; $4437 + 2 = 4439$. Man vergleiche hiermit die Lösung der Aufgabe $a - (b - c) = a - b + c$ oder die Regel: Eine formelle Differenz wird subtrahiert, wenn der Minuendus subtrahiert, der Subtrahendus aber addiert wird. Endlich vergleiche man noch die besondere Auflösungsweise der Aufgabe: $7 \times 198 = 7 \times (200 - 2) = 7 \times 200 - 7 \times 2$ mit $a(b - c) = ab - ac$ und die Auflösung der Aufgabe $\frac{1}{7}$ von $558 = \frac{1}{7}$ von $(560 - 2) = 80 - \frac{2}{7}$ mit $(x - y) : a = \frac{x}{a} - \frac{y}{a}$.

Die hier aufgestellten Grundsätze gelten für alle Stufen des Rechenunterrichts. Überall wird zuerst eine strenge Lösungsform eingeführt, dann aber wird freie Selbständigkeit walten müssen; überall aber wird sich zeigen, daß unsere besten Schüler auch bei freien Lösungsformen sich immer mehr oder minder an die schulgemäßen Lösungsformen anschließen. Die verlangte Zerlegung der Zahlen wird ja von Anfang an angebahnt und den Kindern so vertraut, daß sie nicht anders handeln können. — Daß auch mehrfach benannte Zahlen und auch Bruchzahlen in ähnlicher Weise zerlegt werden müssen, geht aus dem Vorhergehenden hervor.

Dieses Normalverfahren ist kein Mechanisieren. Es zwingt die Schüler, in bestimmt vorgezeichneten Grenzen zu denken, und darin liegt seine Bedeutung, wie die ganze formale Bedeutung des Rechenunterrichts. Schüler, die beim Vorrechnen schwatzen, denken nicht logisch, und eine vollständig fehlerfreie Lösung einer Kopfrechenaufgabe ist eine sehr anerkennenswerte Leistung. — Hentschel ließ selbst uns Seminaristen der

1. Klasse solche Lösungen (natürlich von zusammengesetzten Aufgaben) versuchen, und nur wenige von uns genügten der peinlichen Akkuratesse des verehrten Lehrers, dem natürlich selbst das geringste Versprechen Veranlassung gab, den einzelnen Versuch abzubrechen.

Die schulgemäßen Lösungsformen finden sich ausführlich für das Kopfrechnen im Kopfrechenheft des Verfassers an der Spitze der Rechnungsarten und für das Tafelrechnen in den Tafelrechenheften des Verfassers am Anfang von fast jeder Gruppe.

8. Kopf- und Tafelrechnen.

Die „Allg. Best." vom 15. Oktober 1872 setzen fest: „Auf der Unterstufe wird in der Schule mit einem oder zwei Lehrern, soweit es sein kann, in der mehrklassigen Schule regelmäßig nur im Kopfe gerechnet. Bei Einführung einer neuen Rechnungsart geht auf allen Stufen das Kopfrechnen dem Tafelrechnen voran." — Diese Bestimmungen weisen beiden Rechenformen die jeder gebührende Stellung an. Zuerst Kopfrechnen, dann Tafelrechnen. Alles Rechnen ist von Anfang an ein Kopfrechnen gewesen, so gut wie aller Verkehr zunächst ein mündlicher war. Wie sich dann später die Notwendigkeit von Schriftzeichen ergab, so forderten die erweiterten Verhältnisse im Rechnen die Darstellung der Zahlgrößen durch Zeichen (Ziffern) und das Rechnen mit diesen. Das Tafelrechnen ist also ein Notbehelf, freilich ein notwendiger Notbehelf. Ohne Tafelrechnen würde kein Verkehr, kein Handel und dergl. zu denken sein; aber trotzdem steht das Tafelrechnen erst in zweiter Linie. Die Auffassung der Zahl und jeder neuen Rechnungsart, das logische und sittliche Denken im Rechnen, wird zum Teil allein, zum Teil in höherem Maße durch Kopfrechnen als durch Tafelrechnen erreicht.

Das Rechnen im Kopfe wird so lange getrieben, als es geht. Wäre der menschliche Geist in seinen Fähigkeiten nicht beschränkt, so würden wir jede Aufgabe im Kopfe rechnen, und das Tafelrechnen wäre dann vollständig zu entbehren. So aber werden die Zahlen oft zu groß, die Verhältnisse, in denen sie uns entgegentreten, werden zu zusammengesetzt, wir vergessen Aufgabe und Teilresultate — und nun ist das Tafelrechnen an seinem Platze. Dieses aber soll dann nicht nur eine schriftliche Unterstützung des Gedächtnisses sein, indem es einzelne Zahlen und Resultate durch Niederschreiben leichter behalten läßt, sondern es soll sich der Aufgabe ganz bemächtigen und dieselbe durch bestimmte Ansätze leichter, sicherer und schneller lösen lehren, als dies sonst möglich wäre. Die Forderung, für Kopf- und Tafelrechnen die gleiche Lösungsform anzuwenden, mag ja zunächst bestechen, aus dem Wesen des Rechnens und den beiden Formen desselben ergibt sich aber die Unmöglichkeit, sie zu erfüllen. Entweder würde das Kopfrechnen ein Mechanisieren, oder das Tafelrechnen erfüllte nicht seine Pflicht, schnell und sicher der Praxis zu dienen. Damit soll nun nicht gesagt sein, daß das Tafelrechnen mechanisch betrieben werden oder daß das Kopfrechnen nicht der Praxis dienen sollte. Die Formen des Tafelrechnens werden zur Klarheit gebracht, die Kinder

müssen auch hier verstehen, was sie rechnen und müssen stets darüber Rechenschaft ablegen können; aber wenn das Verständnis erzielt ist, muß die Form durch häufige Übung so geläufig werden, daß die Ausführung der Rechentätigkeit ohne weitere Begründung der einzelnen Operationen mechanisch geschieht. Wir scheuen uns nicht, diese Forderung zu stellen. Das schriftliche Rechnen wird durch die Notwendigkeit der Ansätze zu einer Fertigkeit, und jede Fertigkeit, auch wenn sie auf klarem Verständnis beruht, kann und soll durch häufige Übung mechanisch getrieben werden können, und das Kopfrechnen dient trotz seiner hervorragend formalen Bedeutung der Praxis. Im Kleinhandel und im gewöhnlichen Verkehr wird nur im Kopfe gerechnet, und hierzu die Schüler tüchtig zu machen, ist mit die Aufgabe des Rechenunterrichts der Schule.

Hat unsere Volksschule bis jetzt das Verhältnis zwischen Kopf- und Tafelrechnen immer richtig beachtet und somit ihre Aufgabe im Rechenunterricht genügend gelöst? Man wird diese Frage leider nicht immer mit „Ja" beantworten können! — Meistens ist das Tafelrechnen, und leider das nicht auf klarem Verständnis beruhende mechanische Tafelrechnen, zu sehr bevorzugt. Viele Schulen kennen gar kein Kopfrechnen, und damit fallen all die Ziele des Rechenunterrichts, Zahlanschauung, Zahlenkraft, Klarheit im Denken und Sprechen und Selbständigkeit in der Erfassung und Beurteilung der Aufgabe. Dann hat freilich jener brasilianische Lehrer recht, wenn er die lange Zeit, die bei uns auf das Rechnen verwendet wird, als die ärgste Zeitverschwendung hinstellt. In Brasilien wird das alles und mehr in nicht $\frac{1}{4}$ der Zeit geleistet, schrieb mir ein dortiger Lehrer. Freilich ging aus seinen Andeutungen hervor, daß eben nur mechanische Fertigkeit erstrebt wurde. Wenn aber dann eine Aufgabe nicht in die bekannte Form paßt?

Wie kommt es, daß solche Übelstände vorhanden sind? Die Erklärung dürfte wohl im folgenden zu suchen sein. Die Schulen sind oft überfüllt; die Verschiedenheit der Kinder in der einklassigen Schule stellt die höchsten Anforderungen an die Kraft und methodische Geschicklichkeit des Lehrers; die Resultate befriedigen nicht; die Kraft des Lehrers erlahmt; er mechanisiert endlich, wie andere auch, und — nun erzielt er gefüllte und saubere Hefte. Zudem folgen häufig Rechenstunden (und dies gilt auch von der mehrklassigen Schule) auf Religions- und Sprachstunden. Wie oft fühlt sich dann der Lehrer nicht mehr frisch genug, um mit gleichem Eifer und Erfolge auch in der Rechenstunde zu unterrichten; die Versuchung, vorwiegend schriftlich rechnen zu lassen, ist zu groß, aus dem einen Male werden mehrere Male, bald wird es dann zur Regel, er mechanisiert, wie andere auch. Doch verzagen wir nicht, sondern streben wir nach Besserung, ein jeder an seinem Teile.

Wann tritt nun das Tafelrechnen ein, und wie hat vor allem der Lehrer der einklassigen Schule Kopf- und Tafelrechnen zu verteilen? Im Zahlenkreise bis 100 ist alles Rechnen Kopfrechnen; denn die Zahlen können und sollen vom Verstande erfaßt und behandelt werden. Dasselbe könnte auch von dem Zahlkreise bis 1000 gelten, nicht aber von dem höhern Zahlenkreise. Das Kopfrechnen wird sich also der Regel nach höchstens

mit dreistelligen Zahlen zu befassen haben, mehrstellige Zahlen fallen dem Tafelrechnen zu. Letzteres wird aber nicht an den großen Zahlen eingeführt werden, sondern man nimmt dazu bequeme Zahlen, die eine Kontrolle durch Kopfrechnen ermöglichen. Dem Zahlenkreise bis 1000 fällt somit die Aufgabe zu, das Kopfrechnen im wesentlichen zu beendigen, das Tafelrechnen aber einzuführen.

Die Kinder der Unterstufe müssen aber in der ein- und auch in der mehrklassigen Schule schriftlich beschäftigt werden. Hierbei findet auch das Kopfrechnen Verwendung. (Vergleiche C, Abschnitt 4.) Die ohne besonderen Ansatz niedergeschriebenen Aufgaben werden von den Kindern im Kopfe gelöst, und das Ergebnis wird der Aufgabe beigefügt, z. B. $48 + 16 = 64$. Das Kind rechnet, wie im Kopfe, $48 + 10$ und $58 + 6$. Da das Kind die Aufgabe nicht zu merken braucht, liegt trotz der scheinbar gleichen Rechenarbeit für das Kind eine Erleichterung in dieser schriftlichen Beschäftigung; darum unterbreche man besonders auf der Unterstufe die schwerere reine Kopfrechenarbeit stündlich einigemal durch dieses schriftliche Rechnen. Wie für die Zahlen im Kopfrechnen eine gewisse Beschränkung sich notwendig erweist, so dürfen auch die Zahlen, die bei dem Tafelrechnen zur Verwendung kommen, nicht aufs weiteste ausgedehnt werden. Drei Aufgaben mit mittleren, dem Leben entstammenden Zahlen, sicher ausgerechnet, werden mehr nützen, als die unsichere oder falsche Lösung einer Aufgabe mit unförmlich großen Zahlen. Andrerseits wird bei den sogenannten bürgerlichen Rechnungsarten häufig der andere Fehler gemacht, daß dem Tafelrechnen längere Zeit Aufgaben zugewiesen werden, die das Kind früher im Kopfe gelöst hat, ehe es nur die Aufgabe hingeschrieben. Die Zeit, die nun Ansatz usw. erfordern, ist verloren. Bei der Einführung eines neuen Ansatzes mag ja wohl eine s o leichte Aufgabe vorkommen, die andern Aufgaben sollen zwar nicht mit Schwierigkeiten überhäuft sein, sie müssen aber doch gewisse Anforderungen an die Kraft des Kindes stellen. Nun gibt es Aufgabensammlungen, die den zuletzt erwähnten Gesichtspunkt fast gänzlich unberücksichtigt lassen. Die Aufgaben in diesen Heften sind fast nur Kopfrechenaufgaben, und der alte pädagogische Grundsatz für die Gruppierung des Stoffes „Vom Leichten zum Schweren" scheint unbekannt zu sein. Bedauerlich ist es, daß solche Hefte mit Vorliebe von einem großen Teil der Lehrer eingeführt werden. Zwar wird bei der Benutzung derartiger Hefte die Anzahl der Fehler, die die Rechenbücher der Schüler zeigen, geringer sein als sonst, und wer in diesem äußern Schematismus den Standpunkt einer Schule zu erkennen glaubt, wird ein günstiges Urteil über recht schwache Leistungen fällen. Wo aber bleiben die drei Unterrichtsziele, wo bleibt die Erreichung der formalen, materialen und sittlichen Bildung?

In der einklassigen Schule gebührt, wie an anderer Stelle schon gesagt ist, der größte Teil der direkten Arbeit des Lehrers der Unterstufe. In dieser wird am meisten unter unmittelbarer Leitung des Lehrers im Kopfe gerechnet, während die Mittel- und Oberstufe schon öfter mit Tafelrechnen beschäftigt werden kann. Vor allen Dingen hat der Lehrer bei den oberen Abteilungen darauf zu achten, Kopfrechenaufgaben, welche sich

Lehrer und Seminaristen, aber nicht Volksschüler werden leicht den in den nachfolgenden Sätzen gegebenen einheitlichen Unterschied zwischen den schulgemäßen Lösungsformen und den für die Volksschule berechtigten besonderen Auflösungsweisen erkennen. Jede schulgemäße Lösungsform ist ein Rechnen mit formellen Summen, jede in der Volksschule berechtigte besondere Auflösungsweise ist ein Rechnen mit formellen Differenzen. Das Zuzählen, Abziehen und Vervielfachen der einzelnen Einheiten der Zehnerordnung, in welche die zur Zerlegung kommende Zahl geteilt wurde, und das Teilen der Vielfachen des Teiler ist genau dasselbe, was wir bei dem Buchstabenrechnen bei den einzelne Grundrechnungsarten an den formellen Summen üben. Man vergleic z. B. 7×85 und $a(x + y)$ oder $560 : 4$ und $(a + b) : c$. Die ei fachsten und nächstliegenden und daher in der Volksschule berechtigt besonderen Auflösungsweisen dagegen lassen sich stets auf das Rech mit formellen Differenzen zurückführen. So rechnen wir z. B. bei Aufgabe: $635 + 299$: 299 ist $300 - 1$; $635 + 300 = 935$, wir erhiel da wir 1 zu viel zu 635 gezählt haben, eine um 1 zu große Sum deshalb müssen wir 1 von 935 abziehen; $935 - 1 = 934$, also $635 + 299$ 934. In der Buchstabenrechnung üben wir dasselbe, wir sagen: Eine formelle Differenz $(a - b)$ wird addiert, wenn der M endus (a) addiert, der Subtrahendus (b) aber subtrahiert wird. — lösen wir die Aufgabe: Wieviel ist $5337 - 898$? 898 ist 900 $5337 - 900$ ist 4437, da wir aber 2 zu viel abgezogen haben, ist de um 2 zu klein geworden, wir müssen also diese 2 zu 4137 z $4437 + 2 = 4439$. Man vergleiche hiermit die Lösung der A $a - (b - c) = a - b + c$ oder die Regel: Eine formelle Differe subtrahiert, wenn der Minuendus subtrahiert, der Subtrahendus aber wird. Endlich vergleiche man noch die besondere Auflösungsw Aufgabe: $7 \times 198 = 7 \times (200 - 2) = 7 \times 200 - 7 \times 2$ mit a $= ab - ac$ und die Auflösung der Aufgabe $\frac{1}{7}$ von $558 = \frac{1}{7}$ von (5 $= 80 - \frac{2}{7}$ mit $(x - y) : a = \frac{x}{a} - \frac{y}{a}$.

Die hier aufgestellten Grundsätze gelten für alle Stufen de unterrichts. Überall wird zuerst eine strenge Lösungsform e dann aber wird freie Selbständigkeit walten müssen; überall a sich zeigen, daß unsere besten Schüler auch bei freien Lösungsf immer mehr oder minder an die schulgemäßen Lösungsformen a Die verlangte Zerlegung der Zahlen wird ja von Anfang an und den Kindern so vertraut, daß sie nicht anders handeln k Daß auch mehrfach benannte Zahlen und auch Bruchzahlen i Weise zerlegt werden müssen, geht aus dem Vorhergehenden h

Dieses Normalverfahren ist kein Mechanisieren. Es Schüler, in bestimmt vorgezeichneten Grenzen zu denken, und seine Bedeutung, wie die ganze formale Bedeutung des Reche Schüler, die beim Vorrechnen schwatzen, denken nicht logis vollständig fehlerfreie Lösung einer Kopfrechenaufgabe ist ei erkennenswerte Leistung. — Hentschel ließ selbst uns Se

...fagt, auf die

...r
...el
...ne
...gen,
...aßt,
...Zahl=
...en;
...erden;
...dhaben
...das im
...n;
...Vielheit
...n auch die
...on Rechen=
...apparate
...n, sie bieten
...beneinander
...und ihre Be...
...che Rechen...
...ge Kreise, un...
9*

die „Berliner Knopfmaschine“ ordnet 100 Knöpfe in 10 Reihen zu je 10; beide huldigen also demselben Prinzip. Wesentlich ist es dabei, daß die Kinder die entstandenen Zehner immer in derselben Weise sehen können, wie sie zuerst zusammengesetzt worden sind. Eine „volle Reihe“ der Rechenmaschine ist eine Zehnerreihe. Auf der klaren und sichern Erkenntnis, daß 10 Einer zu dieser neuen Einheit zusammengezogen sind, beruht das Verständnis der Zehnerordnung. Auch zwei und mehrere Zehner stellt sich das Kind gern als volle Reihen vor, und 30 Einer können nur auf 3 Reihen stehen. Der Inhalt der Zahlen kann in dieser Weise bis 100 veranschaulicht werden. Nur mit Zuhilfenahme der Zehner ist diese Veranschaulichung möglich, da sonst 100 Kugeln oder 100 andere Einheiten nicht überblickt werden könnten. Der klare Begriff „Zehner“ ist die bedeutsamste Abstraktion für die gesamte Auffassung der Zahlen.

Groß ist die Anzahl der Nachbildungen der „Russischen Rechenmaschine“, doch keine derselben bietet so viel Besseres, daß sie die russische Rechenmaschine hätte verdrängen können.

Der älteste und bekannteste Würfelapparat ist der Tillichsche Rechenkasten, der in der Geschichte des Rechenunterrichts (Seite 40) schon beschrieben und beurteilt wurde. — Ich selbst schließe mich dem dort angeführten Ditteschen Urteil an und entscheide mich für die Kugelapparate und zwar für die einfache russische Rechenmaschine, doch will ich gern zugeben, daß auch der Tillichsche Rechenkasten in der Hand eines fleißigen und geschickten Lehrers recht Gutes leisten kann.

Bis 100 führen uns die meisten unserer Rechenmaschinen. 10 Zehner bilden einen Hunderter. Die Maschine voller Kugeln, also 10 Reihen zu je 10, ist die bequemste und beste Veranschaulichung des Hunderters. Deshalb halte ich es für gar keinen Vorteil der Willeschen Rechenmaschine, daß sie über die 100 Kugeln der alten russischen Rechenmaschine hinausgeht (bis 120 Kugeln). Eine volle Maschine ist ein Hunderter, das ist übersichtlich; will ich weiter gehen, so benutze ich im ersten Anfang noch andere freie Kugeln, bis dann endlich die körperliche Veranschaulichung ihr Ende erreicht hat und der klar gefaßte Begriff „Zahl“ an die Stelle tritt. Das ist ja die Aufgabe aller Veranschaulichung, daß sie sich selbst überflüssig macht. Ein guter Rechenunterricht kann über 100 hinaus der stetigen körperlichen Veranschaulichung entbehren; er muß es auch können, da eine Veranschaulichung der größeren Zahlen in einzelnen Einheiten unmöglich ist. Daß man hin und wieder es versuchen muß, mit Hilfe der vorhandenen Anschauungsmittel den Inhalt einer Zahl bestimmen zu lassen, ist dadurch nicht ausgeschlossen. Woraus besteht 425? Das Kind sagt: Aus 4 Hundertern. — Wieviel Rechenmaschinen voll Kugeln denkst du dir dabei? — aus 2 Zehnern — Wieviel volle Reihen? — und aus 5 Einern — Auf der wievielten Reihe stehen diese5 Einer? — Das Abstraktionsvermögen der Kinder wird jetzt auch so weit geschult sein, daß es sich, wenn es erfordert wird, unter einem beliebigen Gegenstande eine bestimmte Zahlgröße vorstellen kann. Denk dir, dieser Schlüssel betrüge 100, wieviel also auch der ebenso große 2. Schlüssel usw.? Die nächste Umgebung des Kindes bietet demnach Objekte genug, die wir her-

[illegible]nten, wenn wir eine körperliche Veranschaulichung einer größeren [illegible] wollten, doch ist dieser immerhin recht künstliche Versuch [illegible]en unnötig. Ebenso unnötig sind hier also auch die [illegible]chinen, unter deren verschieden gefärbten Knöpfen wir [illegible]enen Größen der Zehnerordnung vorstellen sollen; denn [illegible] Zahlvorstellungen, die die Kinder gewonnen haben, so sicher, daß [illegible] den Hunderter oder den Tausender als Knopf vorstellen können, [illegible] dieser Knopf nur ein mechanisches Hilfsmittel, wir können seiner [illegible]ständig entbehren. — Die Bedeutung dieser Maschinen liegt auch [illegible] in einer vollen Erfüllung der von Hartmann unter f) aufgestellten [illegible]derung „ausgiebig"; denn diese Maschinen vermögen nur die Ope[illegible]tionen im Zahlenschreiben und im schriftlichen Rechnen veranschaulichend [illegible] unterstützen, zum allgemeinen Verständnis der Operationen und zum Verständnis des Kopfrechnens tragen sie nicht bei. Sie sind nicht Veranschaulichungsmittel, sondern Operationsmaschinen und gehören nicht in die Volksschule. Für die Veranschaulichung der Zahlgrößen gibt es noch eine große Zahl von Anschauungsmitteln, die weder Kugel- noch Würfelapparate sind. Ich möchte hier außer den *Rechenmarken*, *Rechenbrettern*, *Rechenstäbchen* noch die *graphischen Anschauungsmittel* erwähnen. Zu diesen gehören die bekannten Tabellen Pestalozzis und besonders in dem letzten Drittel des vorigen Jahrhunderts die Zahlbilder und die Zahlbildertafeln. Auch hier ist die Anzahl der Formen und Zusammenstellungen fast nicht zu überblicken.

Zahlbilder benutzen die meisten Rechenmethodiker; Zahlbildertafeln haben Böhme, Kaselitz, Büttner u. a. herausgegeben. Der Wert dieser Tafeln ist sowohl für die Veranschaulichung der Zahlen als auch für die Operationen mit den Zahlen erfahrungsmäßig recht gering.

Wenn nun auch die körperliche Veranschaulichung der Zahlgrößen ihr Ende erreicht hat, so können wir doch auf Anschauungsmittel bzw. Rechenlehrmittel bei dem weiteren Rechenunterrichte nicht etwa verzichten. Die gesetzlichen Münzen, Maße und Gewichte können nur durch Anschauung eingeführt werden. Das Kind muß die Länge eines Meters an sich selbst und an dem, womit es täglich umgeht, gemessen haben, es muß ein Litermaß gesehen und mit demselben geschöpft haben, wenn vollständige Klarheit erzielt werden soll. Die Abbildungen, die zu diesem Zwecke sogleich nach der Einführung dieser sogenannten „neuen Maße und Gewichte" erschienen und von denen (wenn ich nicht irre) in jeder Schule ein Exemplar sein muß, sind aus dem angeführten Grunde nicht geeignete Anschauungsmittel. Dem Lehrer kann es nicht schwer werden, sich diese Anschauungsmittel, also nicht nur die Münzen, sondern auch die gebräuchlichsten Maße und Gewichte zu verschaffen und den Kindern — vorzuzeigen. Genügt hier das Vorzeigen? Entschieden nicht! Es wird denselben Nutzen haben, als wenn der Lehrer in der Mineralogie vom Katheder her ein Dutzend Steinarten oder bei der Botanik einige Dutzend Pflanzen nur vorzeigen wollte. Mit dem Meter z. B. muß zuerst gemessen werden, dann müssen Übungen im Abschätzen der Entfernungen angeschlossen werden, und hierauf muß wieder das Messen die Kontrolle üben. Wie ungeschickt

sind die Kinder im Schätzen von Entfernungen, wie wenig aufmerksam sind sie auf ihre Umgebung. Es könnte Verwunderung erregen, wie es möglich ist, daß die wißbegierige kleine Schar, die sich auf den Spielplätzen tummelt, nach wenigen in der Schule verbrachten Jahren fast abgestumpft erscheint gegen die Eindrücke von außen. Aber man versuche es, man doziere nicht, sondern lasse die Kinder selbst suchen und selbst beobachten, man gebe geeignete Aufgaben, damit sie selbst versuchen und selbst arbeiten, und der Beobachtungs- und Forschungstrieb der Kinder wird sich wieder regen wie zuvor. Dieses Anschauungsbedürfnis des Kindes soll auch der Rechenlehrer nicht unberücksichtigt lassen, er wird reichen Gewinn davon tragen.

Während nun hier die Veranschaulichung von äußeren Größen, die im Rechnen verwendet werden sollen, oftmals nicht genügend betrieben wird, sucht man andererseits da durch Rechenlehrmittel zu veranschaulichen, wo es überflüssig, sogar schädlich genannt werden muß. So wird z. B. bei dem Rechnen in den ersten 4 bis 5 Schuljahren die Bruchrechnung derart vorbereitet, daß das Kind mit dem Wesen des einfachen Bruches fast vertraut ist, auch wenn es die Definition vom Bruch und die Begriffe Zähler und Nenner nicht kennt. Das Kind weiß aber, daß der 3. Teil von einem Einer (Apfel 2c.) „Ein Drittel" ist, es weiß, daß diese Teile gleich sein müssen, es hat auch 5 Einer in Drittel und umgekehrt $\frac{24}{3}$ in Einer verwandelt usw. Jetzt kommt die eigentliche Bruchrechnung. Anstatt nun das vorhandene Verständnis zu vertiefen und hierbei den Begriff „Bruch" mit Leichtigkeit zu gewinnen, zeichnet man einen Strich und teilt diesen in zwei gleiche Teile usw. In vollständig systematischer Weise veranschaulicht man hier, was durch 5 Jahre hindurch schon verstanden sein muß und verstanden ist. Oder es soll das Verhältnis zwischen 4 und 6 gesucht werden. Auch hier meint man die veranschaulichenden Striche nicht missen zu können, während das Kind mit Leichtigkeit einsieht, daß $4 = 2 \times 2$ und $6 = 3 \times 2$ ist, daß 4 also 2 Teile hat wie 6 deren 3. — Natürlich soll hiermit nicht gesagt sein, daß diese Veranschaulichung nicht Klarheit erzielen könne. Aber sie ist unnötig und insofern schädlich, als sie verhindert, die gewonnene Einsicht des Kindes direkt zu weiterer Ausbildung zu benutzen. Ein alter Grundsatz im Rechnen warnt, man solle bei Erklärungen und Lösungen nie weiter auf die Elemente zurückgehen, als es nach der betreffenden Rechenstufe nötig und statthaft sei. Dies will doch auch sagen, daß gewonnene Begriffe benutzt werden müssen, um mit ihrer Hilfe neue zu bilden. Die körperliche Veranschaulichung tritt dann jederzeit wieder ein, wenn sich zeigt, daß die erwartete Klarheit der Vorstellungen verloren gegangen ist. — Alles zu seiner Zeit.

B. Das Rechnen auf der Mittelstufe.

Der Rechenstoff der Mittelstufe unserer preußischen Volksschulen ist der unbegrenzte Zahlenraum mit benannten und unbenannten Zahlen, angewandte Aufgaben aus der Durchschnittsrechnung, Resolutionen und Reduktionen und einfache Regeldetri. — Die Mittelstufe zählt drei Jahr-

gänge, und diese sollten in allen mehrklassigen Schulen ebensoviel Rechenabteilungen bilden. Die Bedeutung des Stoffes verlangt diese Gliederung mit Notwendigkeit, da jede Abweichung störend einwirkt auf die Erreichung des Rechenzieles.

10. Die Bedeutung des Rechenlehrstoffs der Mittelstufe.

Zwei Streitfragen sind es, die bei der Frage über die Gruppierung des Rechenstoffs der Mittelstufe berührt werden müssen und die nur unter Berücksichtigung der Bedeutung des Stoffs geschlichtet werden können.

Die erste dieser streitigen Fragen berührt die Verteilung des Zahlenkreises bis 1000 und des höheren Zahlenkreises. Früher behandelte man den Zahlenkreis bis 1000 mit dem höheren Zahlenkreise in einem Jahre. Dabei war es aber unmöglich, die notwendige Einsicht, Sicherheit und Fertigkeit zu erzielen, und an diesen Mängeln krankte das Rechnen durch die übrigen Schuljahre hindurch. Besonders fehlte es bis zum Schluß der Schulzeit an der nötigen Zahlenkraft und an der Sicherheit im schriftlichen Rechnen, vorwiegend im Teilen. Veranlassung zu dieser Zusammenziehung war die Absicht, möglichst bald (schon im 5. Schuljahr) zur Bruchrechnung zu kommen. — Später behandelte man diese Zahlenkreise in zwei Schuljahren, aber man bildete aus beiden Jahrgängen eine Klasse mit einer Rechenabteilung, so daß in jedem Jahre der gesamte Stoff durchgehetzt wurde und die Resultate in keinem Jahre befriedigen konnten. Es liegt nun gar keine Veranlassung vor, den Stoff in der angeführten Weise so unmethodisch zusammenzudrängen. An anderer Stelle ist schon darauf hingewiesen, daß es in jeder geteilten Schule, bestehe diese aus 3, 4, 5 oder 6 Klassen, möglich und vorteilhaft sein wird, so viele Rechenabteilungen zu bilden, als Schuljahre in der Klasse, beziehungsweise Schule vereinigt sind. Der Lehrer fürchte nicht die vermehrte Arbeit durch 2 oder selbst 3 Abteilungen. Wird diese Forderung erfüllt, so ist eine zweckmäßige Verteilung des Rechenstoffes leicht. (Vergleiche hierbei die Verteilung des Rechenstoffes auf die 8 Schuljahre in den Tafelrechenheften des Verfassers und die in B, Gruppe 8 gebotene Übersicht.)

Wir müssen mit aller Entschiedenheit für die Verteilung beider Zahlenkreise auf zwei Schuljahre mit zwei aufsteigenden Abteilungen eintreten; denn beide Zahlenkreise haben ihre grundlegende Bedeutung für den gesamten Rechenunterricht.

Im Zahlenkreise bis 1000 soll das Kopfrechnen, soweit es seine Ausdehnung auf die Stellenzahl der Zahlen betrifft, zum Abschluß kommen. Dreistellige Zahlen kann der Schüler noch miteinander in Beziehung setzen, und mit dreistelligen Zahlen muß der Schüler im Kopfe rechnen können, wenn er für das Leben ausreichend vorgebildet sein soll. Das Hauptgewicht muß also im dritten Schuljahr auf das Kopfrechnen im Zahlenkreise bis 1000 gelegt werden. Die Schüler lernen hierbei die schulgemäßen Lösungsformen selbständig anwenden und gewinnen eine Sicherheit in der Behandlung dreistelliger Zahlen.

Der höhere Zahlenkreis bringt vier- und mehrstellige Zahlen. Diese

bieten beim Kopfrechnen zu große Schwierigkeiten, und es ist weder zur Erreichung des formalen noch des materialen Zieles des Rechenunterrichts notwendig, die Fertigkeit im Kopfrechnen bis hierhin auszudehnen. Dafür tritt das Tafelrechnen mit seinen Ansätzen ein, das bis zur mechanischen Fertigkeit geübt werden muß. Hierzu wird ein volles Schuljahr gebraucht werden. Somit liegt die Bedeutung des höheren Zahlenkreises in der zu erreichenden Sicherheit und Fertigkeit im Tafelrechnen.

Es wird nun praktisch sein, die Formen des Tafelrechnens schon im Zahlenkreise bis 1000 vorzubereiten. Die schriftliche Beschäftigung besteht also in diesem Zahlenkreise nicht mehr im Aufzeichnen der durch Kopfrechnen gewonnenen Resultate. An die Stelle des Nebeneinanderschreibens treten die Ansatzformen des schriftlichen Rechnens. Zu empfehlen ist es, die Kinder in diesem Schuljahr, wie überhaupt bei Beginn einer neuen Rechnungsart, auf der Schiefertafel rechnen zu lassen. Erst wenn die Ansatzformen genügend geübt sind, die erste Ungeschicklichkeit also überwunden ist, mag Tinte, Feder und Buch hervorgeholt werden. Was ins Buch geschrieben werden soll, muß vorher in allen seinen Teilen erkannt und festgestellt worden sein. Sollen in dem schriftlichen Rechnen nicht nur richtige Ergebnisse, sondern auch Reinlichkeit, Ordnungssinn usw. erzielt werden, so achte man von Anfang an auch auf der Tafel auf deutliche Ziffern, auf sorgfältiges Untereinandersetzen, übersichtliches Schreiben und genaues Numerieren der Aufgabe und auf das Unterstreichen des Endresultates. Stets berücksichtigen wir hier den Wert der Zahlen; alles mechanische Tafelrechnen ist ausgeschlossen. Bei dem Vervielfachen und Teilen sind Multiplikator (Wiederholungszahl) und Divisor (Teiler) nur einstellige Zahlen. So lernt das Kind bei der notwendigen schriftlichen Beschäftigung schon im Zahlenkreise bis 1000 die Ansatzformen des späteren Tafelrechnens kennen und verwerten.

Andererseits wird auch im höheren Zahlenkreise das Kopfrechnen gepflegt. Entweder werden die Kopfrechenaufgaben dem früheren Rechenstoffe entnommen, oder man läßt bei den größeren Zahlen die niederen Einheiten weg. Aufgabenbeispiele hierfür sind demnach: a) $5000 + 3000$; $4200 + 1800$; $16000 + 14000$. b) $6000 - 4000$; $38000 - 2900$; $52000 - 40000$. c) 3×4000; 5×16000. d) $4000 : 2$; $6800 : 5$. Es müssen hier die Aufgaben, welche dreistellige Operationszahlen haben, deren Ergebnisse aber über 1000 hinausgehen und die deshalb im Zahlenkreise bis 1000 nicht behandelt werden konnten, ganz besonders geübt werden. Die Selbständigkeit und Sicherheit der Schüler in der Beurteilung und Lösung der Aufgaben wird vorwiegend durch Vermischung der Aufgaben aus den vier Grundrechnungsarten erzielt. Somit ergibt sich, daß das Kopfrechnen im höheren Zahlenkreise wesentlich nur die Vertiefung und Befestigung der früher gewonnenen Kenntnisse zum Ziel hat.

Die zweite der Streitfragen beschäftigt sich mit der Beziehung des Rechnens mit unbenannten bzw. gleichbenannten Zahlen zu dem Rechnen mit mehrfach benannten Zahlen. Einige Rechenmethodiker wollen schon im dritten und vierten Schuljahr das Rechnen mit den mehrfach benannten Zahlen bei jeder der vier Grundrechnungsarten heranziehen und erschöpfend

behandeln und so das Rechnen mit mehrfach benannten Zahlen mit dem Rechnen mit unbenannten bzw. gleichbenannten Zahlen vereinigen. Die schon angeführte Bedeutung der beiden Zahlenkreise aber läßt eine derartige Verbindung nicht zu. Der Schüler hat vollauf zu tun, Sicherheit im Kopfrechnen und Fertigkeit im Tafelrechnen an gleichbenannten Zahlen zu gewinnen, so daß eine nebenherlaufende eingehende Behandlung der mehrfach benannten Zahlen, wie das Leben diese fordert, unmöglich ist. Deshalb verteilen viele andere Methodiker den berührten Rechenstoff auf drei Schuljahre und haben im letzten dieser Schuljahre dann vollkommen Zeit, die so wichtigen mehrfach benannten Zahlen, bei deren Behandlung die gewonnenen Kenntnisse und Fertigkeiten in den Dienst des praktischen Lebens gestellt werden, eingehend heranzuziehen. Damit schließen sie sich bei dem Rechnen im dritten und vierten Schuljahre nicht vollständig von den mehrfach benannten Zahlen ab. Sie ziehen aber bei jeder Grundrechnungsart nur eine Gruppe dieser Zahlen heran und zwar im Zahlenkreise bis 1000 die auf der Währungszahl 100 beruhenden und im höhern Zahlenkreise die auf der Währungszahl 1000 beruhenden mehrfach benannten Zahlen. Jede solche Gruppe wird nun an erster Stelle bei den angewandten Aufgaben berücksichtigt, und so werden nach und nach fast alle mehrfach benannten Zahlen herangenommen. Es ist aber nicht möglich, daß bei dieser Einzelbehandlung die notwendige durch das praktische Leben geforderte Beziehung der mehrfach benannten Zahlen gebührend gewürdigt werden kann. Daraus folgt, daß eine eingehende zusammenhängende Behandlung derselben notwendig ist. Man vergleiche die bei diesem Rechnen mit mehrfach benannten Zahlen heranzuziehenden Sachgebiete, und man wird mir zustimmen müssen, daß ein besonderes Schuljahr zur Behandlung dieser wichtigen Stoffe angesetzt werden muß.

11. Die Gliederung des Rechenstoffs der Mittelstufe.

Aus den vorigen Abschnitten wissen wir, daß in der mehrklassigen Schule zur Mittelstufe drei Jahrgänge gehören, die drei Rechenabteilungen bilden. Der unterste Jahrgang (das 3. Schuljahr) behandelt den Zahlenkreis bis 1000, der zweite Jahrgang (das 4. Schuljahr) den höheren Zahlenkreis und der dritte Jahrgang (das 5. Schuljahr) das Rechnen mit mehrfach benannten Zahlen. In allen drei Abteilungen ist Kopf- und Tafelrechnen zu unterscheiden. Trotz des innigen Zusammenhanges zwischen beiden Rechenformen wird die Gliederung der Aufgaben beim Kopfrechnen sich von der Gliederung der Aufgaben beim Tafelrechnen unterscheiden, da das Kopfrechnen eine größere Verschiedenheit der Formen in sich faßt als das auf Ansatzformen zurückzuführende Tafelrechnen.

I. Der Zahlenkreis bis 1000.

a) Gliederung der Kopfrechenaufgaben.

Nach den vier Grundrechnungsarten erhalten wir vier Hauptgruppen, also Aufgaben zum Zusammenzählen, zum Abziehen, zum Vervielfachen und zum Teilen. Innerhalb jeder Gruppe sind die Aufgaben von ver-

schiedener Schwierigkeit, diese hängt beim Zusammenzählen und Abziehen weniger von der Zahl ab, die nach der schulgemäßen Lösung unzerlegt bleibt, als von der, die zerlegt werden soll; beim Vervielfachen und Teilen ergibt sich eine naturgemäße Anordnung der Aufgaben zuerst durch die steigende Größe der Operationszahlen, dann aber sind es auch Grundzahl und Teilungszahl, die aufsteigende Schwierigkeiten bieten. — Besondere Aufmerksamkeit verdienen beim Zusammenzählen und Vervielfachen die Aufgaben, die zweistellige Zahlen behandeln, deren Resultate aber über 100 hinausgehen, und beim Abziehen die Aufgaben, deren Vollzahl 1000 ist.

Wir geben hier nur die durch die aktive Zahl bedingten Hauptgruppen an. Innerhalb jeder Hauptgruppe gliedern sich die Aufgaben nach den passiven Zahlen. In den untenstehenden Aufgabenbeispielen finden wir diese genaueste Gliederung ausgeführt.

Es ergeben sich in den vier Grundrechnungsarten folgende Aufgabengruppen:

1. Zusammenzählen.

a) Zuzählen reiner Hunderter;
b) Zusammenzählen zweistelliger Zahlen, deren Summe 100 überschreitet;
c) Zuzählen von Hundertern und Zehnern;
d) Zuzählen von dreistelligen Zahlen.

Aufgabenbeispiele:

a) 300 + 500
420 + 400
335 + 200
b) 48 + 66

c) 350 + 420
350 + 480
356 + 240
476 + 270
d) 428 + 251
335 + 287

2. Abziehen.

a) Abziehen reiner Hunderter;
b) " " Zehner;
c) " von Hundertern und Zehnern;
d) " dreistelliger Zahlen.

Aufgabenbeispiele:

a) 400 — 300
370 — 200
986 — 700
b) 400 — 60
320 — 80

c) 380 — 160
400 — 220
960 — 380
d) 657 — 241
346 — 258

3. Vervielfachen.

a) Vervielfachen mit 2;
b) " " 3;
c) bis i) " " 4 bis 9;
k) Vervielfachen mit verschiedenen Wiederholungszahlen.

5 × 157 2 × 475
218 3 × 167
8 × 117.

924 : 6
924 : 4
792 : 8

aben.

einfacher. Beim
eiden sein zwischen
lösen von Einheiten
notwendig ist. Die
werden im Zahlenkreise
übt. Ein Verwandeln
ondere Schwierigkeit an=

usdruck „Borgen". Nach
heißt das, ich borge (mir)
erwandle ihn in Einer. Setzen
n Ausdruck sofort den, der die
n wir also, wenn wir bei dem
verwandeln einen Zehner in 10
underter in 10 Zehner" usw.
liederung der Aufgaben ist gegeben
lrechnen, Ausgabe A, 2. Heft B, 1.
olungsaufgaben aus den früher be=

des Zahlenkreises.

sammenzählen.

fgaben (Gruppe 1).
gang (Gr. 2).
gang (Gr. 3).
nd besondere Frageformen (Gr. 4).
ben zum Zusammenzählen (Gr. 5).
r Bruchrechnung (Gr. 6).

2. Abziehen.

a) Leichte Einführungsaufgaben (Gr. 7).
b) Aufgaben ohne und mit Übergang (Gr. 8 und 9).
c) Östreichisches Ergänzungsverfahren (Gr. 10).
d) Reihenaufgaben (Gr. 11).
e) Zusammenzählen und Abziehen (Gr. 12).
f) Vorbereitung der Bruchrechnung (Gr. 12).

3. Vervielfachen.

a) Leichte Einführungsaufgaben (Gr. 14).
b) Vervielfachen der Reihe nach mit den einstelligen Zahlen (Gr. 15).
c) Vervielfachen ohne Reihenfolge der Wiederholungszahl (Gr. 16).
d) Reihenaufgaben (Gr. 17).
e) Vorbereitung der Bruchrechnung (Gr. 18).

4. Teilen.

a) Leichte Einführungsaufgaben (Gr. 19).
b) Teilen der Reihe nach durch die einstelligen Zahlen (Gr. 20).
c) Teilen ohne Reihenfolge des Teilers (Gr. 21).
d) Verbindung von Vervielfachen und Teilen (Gr. 22).
e) Vorbereitung der Bruchrechnung (Gr. 23).
f) Wiederholungsaufgaben (Gr. 24).

II. Der höhere Zahlenkreis.

a) Gliederung der Kopfrechenaufgaben.

Über das Kopfrechnen in diesem Zahlenkreise ist schon in Abschnitt 10 gesagt worden, daß es hier hinter dem Tafelrechnen naturgemäß zurückstehen muß, da die Zahlen zu groß sind. Die Kopfrechenübungen bestehen also teils in Wiederholungen, teils (und zwar beim Zusammenzählen und Vervielfachen) in Verwendung von Zahlen aus dem vorigen Zahlkreise, nur daß die Resultate 1000 überschreiten, teils in Heranziehung von einfachen größeren Zahlen.

Aufgabenbeispiele werden demnach sein:

	1. Zusammenzählen.	2. Abziehen.	3. Vervielfachen.	4. Teilen.
a) Wiederholungen:	414 + 525;	914 — 276;	5 × 156;	856 : 8
b) Verwendung dreistelliger Zahlen:	725 + 816;	—	7 × 233;	—
c) Einfache größere Zahlen:	4000 + 5000;	6000 — 2800;	4 × 4200;	5000 : 2.

b) Gliederung der Tafelrechenaufgaben.

(Schroeter, Aufg. zum Tafelrechnen, Ausg. A, 2. Heft B, 2. Abschnitt.)

Vorübungen zur Einführung des höheren Zahlkreises.

1. Zusammenzählen.

a) Leichte Einführungsaufgaben (Gr. 25).
b) Übungsaufgaben (Gr. 26 und 27).
c) Reihen und besondere Frageformen (Gr. 28).
d) Vorbereitung der Bruchrechnung (Gr. 29).

2. Abziehen.

a) Leichte Einführungsaufgaben (Gr. 30).
b) Übungsaufgaben (Gr. 31 und 32).
c) Reihen und besondere Frageformen (Gr. 33).
d) Vorbereitung der Bruchrechnung (Gr. 34).

3. Vervielfachen.

a) Leichte Einführungsaufgaben (Gr. 35).
b) Übungsaufgaben:
   aa) Vervielfachen mit Einern und reinen Zehnerzahlen (Gr. 36).
   ab) „ „ zweistelligen Zahlen (Gr. 37 und 38).
   ac) „ „ drei- und mehrst. Zahlen (Gr. 39 u. 40).
c) Reihen und Vorbereitung der Bruchrechnung (Gr. 41).

4. Teilen.

a) Leichte Einführungsaufgaben (Gr. 42).
b) Übungsaufgaben:
   aa) Teilen durch einstellige Zahlen (Gr. 43).
   ab) „ „ reine Zehnerzahlen (Gr. 44).
   ac) „ „ zweistellige Zahlen (Gr. 45).
   ad) „ „ drei- und mehrstellige Zahlen (Gr. 46 u. 47).
   ae) Verbindung von Teilen und Vervielfachen (Gr. 48).

Am Schluß jeder Gruppe des Teilens stehen Aufgaben zur Vorbereitung der Bruchrechnung.

Als Anhang sind in den Gruppen 49 und 50 Aufgaben über Grundfaktoren usw. gegeben.

III. Das Rechnen mit mehrfach benannten Zahlen.

Nachdem nun die Formen des Kopfrechnens und auch die des Tafelrechnens zum sicheren Eigentum der Schüler geworden sind, wird sich die Anwendung derselben nach den zur Behandlung kommenden Rechenstoffen richten, so daß bei jedem Rechenstoff die Aufgaben mit bequemen Zahlen dem Kopfrechnen, die mit schwierigeren Zahlen dem Tafelrechnen zufallen. Die Aufgaben mit leichten Zahlen werden jedesmal bei der Einführung einer Rechnungsart gegeben, folglich wird auch jetzt noch die Bedingung erfüllt, daß das Kopfrechnen dem Tafelrechnen vorangeht.

Gliederung der Aufgaben.

(Schroeter, Aufgaben zum Tafelrechnen, Ausg. A, 3. Heft).

Das 3. Heft bringt vorn unter A auf 6 Seiten Wiederholungsstoff aus den bisher behandelten Zahlengebieten und unter

B. Das Rechnen mit mehrfach benannten Zahlen; Durchschnittsrechnung und Regeldetri.

1. Abschnitt. (Das Rechnen mit mehrfach benannten Zahlen.)

1. Übersichtliche Zusammenstellung der auf den unteren Stufen schon eingeführten mehrfach benannten Zahlen.

a) Unsere Münzen (Gruppe 1).
b) „ Längenmaße (Gr. 2).
c) „ Flächenmaße (Gr. 3).
d) „ Körpermaße (Gr. 4).
e) „ Gewichtsmaße (Gr. 5).
f) „ Papiermaße (Gr. 6).
g) „ Zeitmaße (Gr. 7).
h) „ Zählmaße (Gr. 8).
i) Verwertung der Bruchteile (Gr. 9).
k) Wiederholung und dezimale Schreibweise (Gr. 10).

2. Zusammenzählen.

a) Kleine Haushaltungsausgaben und Übungsaufgaben (Gr. 11).
b) Größere Haushaltungsausgaben und Übungsaufgaben (Gr. 12).
c) Übungsaufgaben mit nicht dezimal geteilten Größen (Gr. 13).
d) Vorbereitung der Bruchrechnung (Gr. 14).
e) Reihenaufgaben (Gr. 15).

3. Abziehen.

a) Haushaltungsausgaben und Übungsaufgaben (Gr. 16).
b) Aus der Tararechnung (Gr. 17).
c) „ „ Rabattrechnung (Gr. 18).
d) Anwendung des östreichischen Subtrahierens auf zusammengesetzte Aufgaben (Gr. 19).
e) Nicht dezimal geteilte Größen (Ankunft und Abfahrt der Eisenbahnzüge) (Gr. 20).
f) Einfache Zeitbestimmungen (Gr. 21).
g) Vorbereitung der Bruchrechnung (Gr. 22).
h) Reihenaufgaben und zusammengesetzte Aufgaben (Gr. 23).

4. Vervielfachen.

a) Vervielfachen mit Einheiten der Zehnerordnung (Gr. 24).
b) Übungsaufgaben (Gr. 25).
c) Aufgaben aus der Invalidenversicherung (Gr. 26).
d) „ aus der Zinsrechnung usw. (Gr. 27).
e) Nicht dezimalgeteilte Größen (Gr. 28).
f) Die Post (Gr. 29).
g) Reihenaufgaben (Gr. 30).

5. Teilen.

a) Teilen durch Einheiten der Zehnerordnung (Gr. 31).
b) Übungsaufgaben (Gr. 32 bis 34).
c) Verbindung von Vervielfachen und Teilen (Gr. 35).
d) Reihenaufgaben und zusammengesetzte Aufgaben (Gr. 36).
e) Enthaltensein (Gr. 37).

(Durchschnittsrechnung und Regeldetri).

...schnittsrechnung.

...gegebenen Größen (Gr. 38).

...Größen (Gr. 39).

...etri.

...achen und dem Teilen (Gr. 40).

...die Mehrheit (Gr. 41).

...12.

...ungen ersieht man die Reichhaltigkeit ...und die Notwendigkeit der drei Abteilungen. ...nach dem Schroeterschen Rechenbuche hätte ..., doch nehme ich an, daß sie den einsichtigen ...n ihm vielleicht willkommen sein wird. Ein Rechen... ...elegt werden, und da lag es nahe, daß der Ver... ...ch benutzte.

12. Die Sachgebiete der Mittelstufe.

...Erweiterung der Zahlenkreise über 100 und später über 1000 ...en wir uns an die bekannten Münzen und Maße an. Das ...m Markstück bis zum Zehnmarkstück oder die Aufeinanderfolge ...etersteine an der Straße sind die aus dieser Anschauung sich ...den Rechenübungen.

Die Notwendigkeit der einzelnen Grundrechnungsarten erkennt das ...d, wie schon an anderer Stelle gesagt worden ist, an angewandten ...ufgaben, die möglichst demselben Sachgebiet, das bei der Anwendung verwertet werden soll, entnommen sind; hierauf folgt eine ausgedehnte Übung mit unbenannten, mit einfach oder mehrfach benannten Zahlen, und endlich kommt die Anwendung, die die Rechenfertigkeit als bekannt voraussetzen soll. Die hier benutzten Sachgebiete entsprechen der Auffassungskraft des heranwachsenden Kindes. Das Kind hat nicht nur einen weiteren äußeren Blick gewonnen, sondern es hat schon manches erfahren und gelernt. Die Stadt, ihre Straßen, die Einwohnerzahl, die Entfernungen, das naheliegende Dorf, die Bestellung des Ackers, die Ernte, die Invalidenrente, die Haushaltungsausgaben u. a. m. sind passende Sachgebiete. Die auf der Unterstufe verwerteten Sachgebiete waren so einfacher Art, daß der Lehrer wenig zu erläutern hatte, so daß das Kind seine ganze Kraft dem Rechnen zuwenden konnte. Hier auf der Mittelstufe werden die zu benutzenden Sachgebiete häufig einer Erläuterung bedürfen. Sie sind zwar dem Schüler bekannt, doch ist die Bekanntschaft oft eine nur äußerliche, und die Schule hat die Aufgabe, diese Bekanntschaft zu vertiefen. Mancher neue Gesichtspunkt wird hierbei dem Kinde erschlossen, und so wird der Rechenunterricht manchem andern Unterrichtszweige dienstbar gemacht. Der Lehrer wird stets imstande sein, ohne weitere Anleitung die erforderlichen Belehrungen zu geben, nur muß er Auge und Ohr offen halten und durch kurze und genaue Notizen das Gedächtnis unterstützen.

1. Abschnitt. (Das Rechnen mit mehrfach benannten Zahlen.)

1. Übersichtliche Zusammenstellung der auf den unter Stufen schon eingeführten mehrfach benannten Zah.

a) Unsere Münzen (Gruppe 1).
b) „ Längenmaße (Gr. 2).
c) „ Flächenmaße (Gr. 3).
d) „ Körpermaße (Gr. 4).
e) „ Gewichtsmaße (Gr. 5).
f) „ Papiermaße (Gr. 6).
g) „ Zeitmaße (Gr. 7).
h) „ Zählmaße (Gr. 8).
i) Verwertung der Bruchteile (Gr. 9).
k) Wiederholung und dezimale Schreibweise (Gr. 10).

2. Zusammenzählen.

a) Kleine Haushaltungsausgaben und Übungsaufgaben (Gr.
b) Größere Haushaltungsausgaben und Übungsaufgaben
c) Übungsaufgaben mit nicht dezimal geteilten Größen (G
d) Vorbereitung der Bruchrechnung (Gr. 14).
e) Reihenaufgaben (Gr. 15).

3. Abziehen.

a) Haushaltungsausgaben und Übungsaufgaben (Gr. 16)
b) Aus der Tararechnung (Gr. 17).
c) „ „ Rabattrechnung (Gr. 18).
d) Anwendung des östreichischen Subtrahierens auf gesetzte Aufgaben (Gr. 19).
e) Nicht dezimal geteilte Größen (Ankunft und Abfahrt bahnzüge) (Gr. 20).
f) Einfache Zeitbestimmungen (Gr. 21).
g) Vorbereitung der Bruchrechnung (Gr. 22).
h) Reihenaufgaben und zusammengesetzte Aufgaben (G.

4. Vervielfachen.

a) Vervielfachen mit Einheiten der Zehnerordnung (G
b) Übungsaufgaben (Gr. 25).
c) Aufgaben aus der Invalidenversicherung (Gr. 26).
d) „ aus der Zinsrechnung usw. (Gr. 27).
e) Nicht dezimalgeteilte Größen (Gr. 28).
f) Die Post (Gr. 29).
g) Reihenaufgaben (Gr. 30).

5. Teilen.

a) Teilen durch Einheiten der Zehnerordnung (Gr.
b) Übungsaufgaben (Gr. 32 bis 34).
c) Verbindung von Vervielfachen und Teilen (Gr.
d) Reihenaufgaben und zusammengesetzte Aufgaben
e) Enthaltensein (Gr. 37).

Wir sehen, die Sachgebiete drängen sich uns auf, wir brauchen kaum zu suchen, sondern müssen eher sichten. Doch ist die Zahl dieser Sachgebiete nicht zu groß, man bedenke nur, es sind wenigstens 160 Rechenstunden, die uns jährlich zur Verfügung stehen.

13. Die Einführung der Zehner- und der Stellenordnung.

„Zehn Einheiten bilden eine Einheit einer höheren Ordnung" und: „Jede Ziffer besitzt neben ihrem Zifferwerte noch einen Stellenwert", das sind zwei grundlegende Regeln des Rechenunterrichts, ohne deren Verständnis eine vollständige Klarheit der Zahlvorstellungen und eine Sicherheit im Schreiben von Zahlen nicht zu erzielen ist.

Das Kind wendet diese Regeln unbewußt an, wenn es nur wenige Monate die Schule besucht hat; denn es lernt, daß 10 Einer einen Zehner bilden, und es schreibt die Ziffern von 10 bis 20.

Es kann zu dieser Zeit noch nicht daran gedacht werden, die angeführten Regeln zum Verständnis zu bringen. Die Regeln werden auch hier aus Beispielen abgeleitet werden müssen, ein Beispiel aber genügt nicht zur Einführung einer Regel. Somit werden die Kinder der Unterstufe ruhig als Tatsache aufnehmen, daß 10 Einer einen Zehner bilden. Dieses Tatsächliche wird ihnen in einer vollen Zehnerreihe an der Rechenmaschine oder in einem Bündchen von 10 Stäbchen usw. zur Anschauung geboten. Im nächsten Jahre lernen sie, daß 10 Zehner einen Hunderter bilden. Auch dieses ist zunächst eine zufällige Tatsache, die sich nur nach dem Reproduktionsgesetze der Ähnlichkeit dem Gedächtnisse besser einprägt. Nach wieder einem Jahre, wenn der Zahlenkreis bis 1000 erweitert wird, ergibt sich, daß auch 10 Hunderter einen Tausender bilden.

Ebenso ist es bei dem Schreiben der Zahlen. Die Kinder schrieben die Zahlen 1—9. Jetzt kommt 10. Zehn Einer bilden einen Zehner. Wieviel Zehner sind 10 Einer? Wieviel Einer bleiben außer dem Zehner übrig? Da kein Einer außer dem Zehner vorhanden ist, schreiben wir eine Null, das heißt: keinen Einer. Nun haben wir noch einen Zehner. Deshalb setzen wir vor die Null eine Eins. Was bedeutet die Eins; was die Null? Übung und Anwendung befestigen dies bald; das Kind lernt: Ich setze die Zehner vor die Einer. Beim Schreiben der Hunderter ergibt sich ebenso leicht, daß die Hunderter vor die Zehner gesetzt werden, und auch der Tausender wird dann seinerzeit vor die Hunderter gesetzt.

Bei der Einführung des höheren Zahlenkreises tritt eine Änderung ein. Das Kind hat drei oder auch vier Jahre nach der Zehnerordnung gerechnet und nach dem Gesetz der Stellenordnung seine Zahlen geschrieben, jetzt ist es Zeit, aus der Reihe der Einzelvorstellungen das Gemeinsame herauszuheben. „Zehn Einer bilden einen Zehner", „zehn Zehner bilden einen Hunderter" und „zehn Hunderter bilden einen Tausender!" Das Gemeinsame hieraus findet das Kind mit Leichtigkeit; sehr bald kann es aussprechen, daß bis jetzt stets 10 Einheiten eine Einheit höherer Ordnung ergaben. Nun erfährt das Kind, daß dies auch fernerhin so ist, daß also auch 10 Tausender eine neue Einheit bilden werden usw. Das nun er-

kannte Gesetz heißt also: Zehn Einheiten bilden stets eine Einheit einer höheren Ordnung. Die Namen derselben werden nach und nach gegeben, zuerst bis zum Millioner, dann darüber hinaus, wenn auch nur in der Ausdehnung, daß die Kinder selbst finden müssen, daß das Zahlengebäude hier noch keinen Abschluß gefunden hat, daß es unendlich ist, weil stets wieder 10 der erreichten Einheit eine Einheit höherer Ordnung bilden.

Hand in Hand mit dieser Erweiterung der Zehnerordnung geht das Schreiben der Zahlen. Die drei Ziffern 4, 5 und 6 werden jetzt in folgender Weise geschrieben:

a)	4	5	6
b)	5	6	4

Die Bedeutung der einzelnen Ziffern wird festgestellt. Jetzt werden die Ziffern umgestellt, vielleicht wie bei b) und auch hier die Bedeutung der Ziffern erläutert. Hierauf werden die einzelnen Ziffern in beiden Zahlen nach ihrem Werte verglichen. Die 6 bedeutet bei a) 6 Einer, bei b) 6 Zehner, mithin 10mal soviel. Wenn wir eine 6 unter die 5 der zweiten Ziffer stellen würden, so würde sie wieder 10mal soviel oder 600 bedeuten. Dasselbe wird auch an anderen Zahlen geübt. Endlich ergibt sich, daß die Ziffer, die am weitesten nach rechts steht, Einer bedeutet. Wir sagen nun, die Einer stehen in der ersten Stelle. Daß dann die Zehner in der zweiten und die Hunderter in der dritten Stelle stehen, werden die Kinder leicht einsehen. — Hieraus folgt, daß eine Ziffer 10mal soviel bedeutet, wenn sie eine Stelle nach links gerückt wird. Jetzt werden die Kinder schon selbst angeben können, wohin die Tausender geschrieben werden müssen und weshalb sie in die 4. Stelle geschrieben werden; auch werden sie feststellen können, daß die Zehntausender, die 10mal soviel bedeuten, in der 5., die Hunderttausender dann in der 6. Stelle usw. stehen müssen. Jede Ziffer besitzt also neben ihrem Zifferwerte noch einen Stellenwert.

Da wir nur drei Stellen mit Leichtigkeit überblicken können, so wird zwischen den Tausendern und den Hundertern ein größerer Zwischenraum gelassen als zwischen den andern Stellen. Die Millioner werden ebenfalls durch einen größeren Zwischenraum (vielfach auch noch durch ein Komma oben hinter der Ziffer) von den rechtsstehenden Ziffern geschieden.

Für den Aufbau der Zahlen soll hier noch bemerkt werden, daß wir in den Zahlkenreisen bis 100 und bis 1000 vorwiegend in Einern aufwärts schreiten und allmählich erst zu den größeren Einheiten gelangen. Nach Einführung der Zehnerordnung aber werden wir in größeren Einheiten aufwärts zählen.

Vielfache Übung führt zur Sicherheit.

14. Das schriftliche Zusammenzählen und Abziehen.

Das Kopfrechnen wird zum Tafelrechnen durch den Ansatz; dieser legt nicht nur die Zahlen fest und entlastet dadurch das Gedächtnis, sondern er ordnet auch die Zahlen, so daß die gleichwertigen Größen übersichtlich untereinander stehen. Die Ansatzformen für das Zusammenzählen und Abziehen sind seit alter Zeit die gleichen geblieben. Man setzt Posten unter Posten oder die Abzugszahl unter die Vollzahl. Zuerst

berücksichtigt man den Zahlenwert; später aber erkennt man auf Grund der Kenntnis des Gesetzes der Zehnerordnung, daß diese Berücksichtigung unnützer Ballast ist, da immer 10 Einheiten eine neue Einheit bilden. So kommt man im höheren Zahlenkreis zum mechanischen Rechnen. Es bleibt hier nur noch übrig, einige Winke über die zu erzielende Sicherheit zu geben. Man gewöhne die Schüler daran, beim Zusammenzählen jede Aufgabe zweimal zu rechnen und dabei einmal von oben nach unten und einmal von unten nach oben zu zählen. Bei zwei übereinstimmenden Resultaten darf der Schüler die Richtigkeit annehmen. — Beim Subtrahieren gewöhne man die Schüler, solange sie das bisher gebräuchliche Verfahren benutzen, daß sie nach dem Abziehen die erhaltene Differenz zum Subtrahendus zählen. Ungenaue Resultate werden hierbei sofort erkannt.

Über eine zweite Form des Abziehens, das östreichische Subtrahieren, siehe den folgenden Abschnitt.

Im Mittelalter benutzte man die Neunerprobe, um die Richtigkeit der Rechnung festzustellen. Man überlege folgende Beispiele:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 8537 & = & 23 & = & 5 & & \\ 4629 & = & 21 & = & 3 & & \\ 8139 & = & 21 & = & 3 & & \\ \hline 21305 & = & 11 & = & 11 & & \\ & = & 2 & = & 2 & & \\ 97316 & = & 26 & = & 8 & = & 8 \\ -\ 45389 & = & 29 & = & 11 & = & 2 \\ \hline 51927 & = & 24 & = & 6 & = & 6 \end{array}$$

15. Das östreichische Subtrahieren.

Zusammenzählen und Abziehen sind verwandte Rechnungsarten. Dieser allgemein bekannte Satz wird schon bei den Anfängen des Rechnens in der Volksschule dadurch berücksichtigt, daß beim Rechnen im Zahlenkreis bis 20 an die Zerlegung jeder Zahl in 2 Posten beide Rechnungsarten angeschlossen werden; denn aus $6 = 5 + 1$ folgen sowohl die Additionsaufgaben $5 + 1$ und $1 + 5$ als auch die Subtraktionsaufgaben $6 - 1$ und $6 - 5$. — Zusammenzählen und Abziehen sind verwandte Rechnungsarten, sagt auch das sogenannte wissenschaftliche Rechnen, wenn es definiert: „Subtrahieren heißt die Zahl finden, die man zu einer gegebenen Zahl (dem Subtrahendus) zählen muß, um eine zweite gegebene Zahl (den Minuendus) zu erhalten", und wenn es beim Aufsuchen der Differenz den Minuendus mit dem Subtrahendus vergleichen läßt. — Unser Volk hat den angeführten Satz, daß Zusammenzählen und Abziehen verwandte Rechnungsarten sind, schon längst in die Praxis umgesetzt, wenn es besonders im Kleinverkehr jedes Abziehen in ein Zuzählen verwandelt. Kostet eine Ware 1,65 ℳ, so rechnet der Verkäufer, der auf einen Taler herausgeben soll, weder im Kopf noch mit Ziffern 3 ℳ — 1,65 ℳ = 1,35 ℳ, sondern er legt einen 5 Pfenniger hin und sagt: „Eine Mark 70 Pfennig," danach legt er nacheinander 3 Zehnpfenniger hin und zählt

dabei „Eine Mark 80 Pfennig, eine Mark 90 Pfennig, zwei Mark“, dann legt er ein Markstück dazu, sagt „drei Mark“ und weiß, daß er richtig gerechnet hat.

Nur unsere Schule vergißt diesen engen Zusammenhang beider Rechnungsarten, sobald sie über den Zahlenkreis von 20 hinausgeht. Sie unterscheidet streng vier Grundrechnungsarten und übt sowohl im Kopf- als auch im Tafelrechnen für jede Grundrechnungsart besondere Lösungsformen. Ab und zu fand sich wohl bei der Lösung von Kopfrechenaufgaben die alte ursprüngliche Form der Ergänzung in den sogenannten besonderen Auflösungsformen; man rechnete dann wie im gewöhnlichen Verkehr, nicht nur mit benannten, sondern auch mit unbenannten Zahlen. So ergänzte man z. B., wenn man 288 von 347 abziehen sollte, 288 durch Hinzuzählen von 12 zu 300 und fand die Lösung der Subtraktionsaufgabe durch Zusammenzählen von 12 und 47; aber bei dem schriftlichen Rechnen blieb es lange bei der gewohnten Form. Nur in Süddeutschland und Östreich fing man an, auch für das schriftliche Rechnen die Ergänzung des Subtrahendus zum Minuendus zu benutzen. Dieses Ergänzungsverfahren im schriftlichen Rechnen ist unter dem Titel „östreichisches Subtrahieren“ oder „Ergänzungsverfahren“ allmählich bekannt geworden, doch geht es ihm, wie so vielem Neuen, man spricht davon, ohne es recht zu kennen, und man verurteilt es, weil man es nie recht kennen gelernt hat.

Aus dem Vorstehenden geht hervor, daß das „östreichische Subtrahieren“ nichts Künstliches ist, sondern daß es eng mit unserm Volksrechnen und mit den Anfängen unseres Schulrechnens zusammenhängt. Im 1. Schuljahre ergänzt das Kind z. B. 6 zu 7 und 8, aber auch zu 13 und 14. Diese Ergänzungsübungen dürfen später nicht vernachlässigt werden, ja sie müssen in derselben Form auch bei dem schriftlichen Rechnen auftreten. Unsere Schüler werden also im Kopfrechnen geübt, auch weiterhin 39 zu 42 und 176 zu 180 zu ergänzen, und im schriftlichen Rechnen lernen sie aussprechen, daß, wenn $438 - 346 = 92$ ist, $92 + 346$ 438 ergibt. Ist in der Schule dann im 4. Schuljahre der Übergang bei dem schriftlichen Rechnen vom Rechnen mit Stellenwert zu dem Rechnen ohne Stellenwert (vom Zahlen- zum Ziffernrechnen) gefunden, dann halte ich es für angebracht, in methodischer Weise das östreichische Ergänzungsverfahren einzuführen. Wir gehen von einfachen Zahlen, vielleicht von einstelligen Zahlen, aus und können nach wenigen Beispielen zu den mehrstelligen Zahlen kommen. Die Reihenfolge der Aufgaben dürfte folgende sein:

1)	2)	3)	4)
8	13	34	34
— 6	— 6	— 12	— 18

5)	6)	7)	8)
235	818	3425	4635
— 122	— 279	— 1214	— 1857

Daß bei den Aufgaben 1 bis 4 die Richtigkeit der gefundenen Resultate durch Kopfrechnen festgestellt werden kann, ist nicht unwesentlich für die zu erzielende Klarheit und vermittelt besonders das Verständnis der Rechenform bei den Übergängen. Bei Aufgabe Nr. 8 wird endlich gerechnet

werden: 7 und 8 ist 15 (8 wird unter die Einer geschrieben und der Zehner zu den 5 Zehnern gezählt); 5 und 1 ist 6 und 7 ist 13 (7 kommt in die 2. Stelle und die 1, die Hunderter bedeutet, kommt zu den Hundertern, d. h. sie wird zur nächsten Stelle gezählt); 8 und 1 ist 9 und 7 ist 16 (7 kommt in die 3. Stelle); 1 und 1 ist 2 und 2 ist 4 (2 kommt in die 4. Stelle). Man könnte einwenden, daß diese praktische Form des Abziehens zu früh kommt. Ich habe jedoch durch Erfahrung bestätigt gefunden, daß die Kinder gern und mit Einsicht und Lust sich die dargebotene Form aneignen, und daß vornehmlich die von Hartmann in seinem Rechenunterricht in der deutschen Volksschule Seite 447 ausgesprochenen Bedenken, gründliche Verwischung des Charakters der Subtraktion und größerer, wenn auch leistungsfähigerer Mechanismus, nicht eingetreten sind. Eine an gleicher Stelle von Hartmann gewünschte Verschiebung der Einführung dieser Subtraktionsform auf die Oberstufe halte ich demnach nicht für nötig, andererseits aber würde natürlich die Einführung auf der Oberstufe immer besser sein als gar keine Einführung.

Es ist selbstverständlich, daß die gewonnene Fertigkeit bei allen passenden Gelegenheiten angewendet wird, damit sie nicht verloren geht, sondern als festes Besitztum mit in das Leben hinausgenommen werden kann. Da sind es zunächst die Subtraktionsaufgaben mit unbenannten und benannten Zahlen, die sich zur Anwendung eignen, und hier wieder sind ganze und dezimal geteilte Zahlen leichter zu verwenden als gewöhnliche Brüche und als die nicht auf dezimaler Teilung beruhenden mehrfach benannten Zahlen. Besonders interessant und praktisch sind ferner die Aufgaben, welche Zusammenzählen und Abziehen vereinigen. Es soll z. B. die Aufgabe gelöst werden: Eine Hausfrau hat 25 ℳ Wochengeld zur Bestreitung der Wirtschaftskosten und gibt am Sonntag 2,15 ℳ, am Montag 3,28 ℳ, am Dienstag 2,75 ℳ, am Mittwoch 4,28 ℳ, am Donnerstag 4,05 ℳ, am Freitag 2,08 ℳ, und am Sonnabend 3,86 ℳ aus. Wie groß ist der Bestand am Schluß der Woche? Wir setzen an

```
   25,00 ℳ
  ⎧ 2,15 „
  ⎪ 3,28 „
  ⎪ 2,75 „
— ⎨ 4,28 „
  ⎪ 4,05 „
  ⎪ 2,08 „
  ⎩ 3,86 „
  ─────────
    2,55 ℳ
```

und rechnen: 6 u. 8 ist 14 u. 5 ist 19 u. 8 ist 27 u. 5 ist 32 u. 8 ist 40 u. 5 ist 45 u. 5 ist 50 (unter die Hundertstel wird die letzte ergänzende 5 gesetzt und 5 Zehntel werden zu den Zehnteln gezählt); 5 u. 8 ist 13 u. 2 ist 15 u. 7 ist 22 u. 2 ist 24 u. 1 ist 25 u. 5 ist 30 (unter die Zehntel kommt die ergänzende 5 und 3 Einer werden zu den Einern gezählt); 3 u. 3 ist 6 u. 2 ist 8 u. 4 ist 12 u. 4 ist 16 u. 2 ist 18



u. 3 ist 21 u. 2 ist 23 u. 2 ist 25 (die ergänzende 2 wird unter die Einer gesetzt und die 2 Zehner entsprechen den vorhandenen 2 Zehnern).

Angewendet werden soll ferner dies Ergänzungsverfahren bei allen andern Rechnungsarten, bei denen eine Subtraktion notwendig ist. In Betracht kommt also hierbei noch die Division und das Wurzelausziehen. Die Divisionsaufgabe: 57728 : 328 wird ohne Anwendung des Ergänzungsverfahrens folgendermaßen gelöst:

$$\begin{array}{l} 57728 : 328 = 176. \\ \underline{328} \\ 2492 \\ \underline{2296} \\ \ \ 1968 \\ \ \ \underline{1968} \end{array}$$

Bei Anwendung des Ergänzungsverfahrens werden wir rechnen:

$$\begin{array}{l} 57728 : 328 = 176 \\ \overline{2492} \\ \ \ \overline{1968} \end{array}$$

577 : 328 ist 1; 1 . 8 ist 8 u. 9 ist 17 (die ergänzende 9 wird hingeschrieben und der eine Zehner wird gemerkt); 1 . 2 ist 2 u. 1 ist 3 u. 4 ist 7 (die ergänzende 4 wird hingeschrieben); 1 . 3 ist 3 u. 2 ist 5 (die ergänzende 2 wird hingeschrieben); 2492 : 328 ist 7; 7 . 8 ist 56 u. 6 ist 62 (die ergänzende 6 wird hingeschrieben und die 6 Einheiten der neuen Ordnung werden gemerkt); 7 . 2 ist 14 u. 6 ist 20 u. 9 ist 29 (hingeschrieben wird die ergänzende 9 und gemerkt werden die 2 Einheiten der neuen Ordnung); 7 . 3 ist 21 u. 2 ist 23 u. 1 ist 24 (hingeschrieben die ergänzende 1); 1968 : 328 ist 6 (bei der weiteren Berechnung würden sich überall Nullen ergeben). Bei einiger Übung ist die praktische Ausführung überraschend schnell und sicher.

Auch bei dem Radizieren wird durch Anwendung des Ergänzungsverfahrens die gekürzte Form noch wesentlich abgekürzt; wir ersparen wieder viel Zeit und Raum. Folgende Berechnung wird dies lehren. Die Aufgabe ist $\sqrt{18939904}$. Wir rechnen:

$$\begin{array}{l} \sqrt{18|93|99|04} = 4352 \\ \ \ \overline{293} \quad : 8 \\ \ \ \ \overline{4499} \quad : 86 \\ \ \ \ \ \overline{17404} : 870 \end{array}$$

$4^2 = 16$ u. 2 ist 18; $29 : 8 = 3$, $3^2 = 9$ u. 4 ist 13 (die ergänzende 4 wird hingeschrieben und die 1 wird gemerkt); 3 . 8 ist 24 u. 1 ist 25 u. 4 ist 29 (hinschreiben der ergänzenden 4); $449 : 86 = 5$, $5^2 = 25$ u. 4 ist 29 (hinschreiben der 4 usw.); 5 . 6 ist 30 u. 2 ist 32 u. 7 ist 39 (hinschreiben der 7 usw.); 5 . 8 ist 40 u. 3 ist 43 u. 1 ist 44 (hinschreiben der 1); $1740 : 870 = 2$, $2^2 = 4$ usw.

Dasselbe gilt von dem Kubikwurzelausziehen. Hier schreiben wir

$3a^2b$, $3ab^2$ und b^3 so unter die Vollzahl, daß wir die Ein unter die drittletzte Stelle setzen und bei jedem weiteren R Stelle nach rechts rücken; dann ziehen wir, wie bei dem Beispiel, die drei Posten ab. Vorbedingung ist das Herun ganzen Gruppe und das Teilen aller Stellen, mit Ausnahme Stellen. Beispiel:

$$\sqrt[3]{904|231|063} = 967$$

175231 : 243

$$-\begin{cases} 1458 \\ \;\;972 \\ \;\;\;216 \end{cases}$$

19495063 : 27648

$$-\begin{cases} 193536 \\ \;\;14112 \\ \;\;\;\;343 \end{cases}$$

$9^3 = 729$; 9 u. 5 ist 14, 2 u. 1 ist 3 u. 7 ist 10, 7 u. 1 ist 1752 : 243 ist 6; 6 . 243 ist 1458 (hingeschrieben — wie in $6^2 = 36 . 3 = 108 . 9 = 972$ (eine Stelle nach rechts gerückt) (wieder eine Stelle nach rechts gerückt). Durch Abziehen de erhalten wir 19495, die nächste Gruppe herunter = 19495063. 1 durch 27648 = 7; 7 . 27648 = 193536; $7^2 = 49 . 3 = 147 . 9$ u. $7^3 = 343$. Die Subtraktion ergibt nichts.

Wir fassen zusammen: Die Vorteile der östreichischen sind für jeden Rechner so groß, daß diese Lösungsform ein unserer Volksschule verdient. Man stoße sich nicht an dem lichen und Unbekannten, sondern versuche sich einzuleben in Form; bald wird man die feindliche oder mindestens indifferen aufgeben und ein begeisterter Anhänger werden. Auch ver die Anwendung des Ergänzungsverfahrens beim Kopfrechnen berechne $8\frac{3}{4} - 7\frac{5}{8}$ so, daß man zu $\frac{1}{8}$ die über 8 liegen

16. Das schriftliche Vervielfachen.

Es ist bereits ausgesprochen worden, daß die Ansätze des Tafelrechnens erst bei dem Rechnen im Zahlenkreise bis 100 werden und daß auch dieser Zweig des Rechnens dazu bei müsse, den formalen Zweck des Rechenunterrichts zu erreic Ansatz muß verstanden, jede Form zur Klarheit gebracht we Verständnis wird aber im wesentlichen durch die im Kopfrechne Einsicht vermittelt, daher muß ja auch das Kopfrechnen dem vorangehen. — Die schriftlichen Formen sind auch für das und Teilen mit einstelliger Zahl so einfach und selbstverst ihre Einübung keine Schwierigkeiten bereitet. Anders ist Vervielfachen mit zweistelliger Wiederholungszahl. Das soge rücken in der Praxis oft nur mechanisch vorgeführt u und doch soll auch dieses dem Verständnis erschlossen werden.

Häufig vervielfacht man direkt die einzelnen Größen der Grundzahl mit der Zehnerzahl in der Wiederholungszahl und verwandelt die erhaltenen Einer in Zehner, Hunderter usw. Z. B.

$$\begin{array}{r} 576 \\ 45 \\ \hline 2880 \end{array}$$

Nachdem in bekannter Weise mit 5 bereits vervielfacht ist, wird mit 40 vervielfacht. Es wird gefunden: 40 . 6 = 240; 240 sind 2 Hunderter, 4 Zehner und kein Einer. Wir schreiben keinen Einer, also die Null in die Einerstelle und die 4 Zehner mit der Ziffer 4 in die Zehnerstelle, zwei Hunderter werden gemerkt. 40 . 70 = 2800 und 200 = 3000, dreitausend sind 3 Tausender und kein Hunderter. Kein Hunderter wird hingeschrieben, d. h., es wird eine Null in die Hunderterstelle gesetzt usw. Nachdem dies an verschiedenen Beispielen geübt ist, wird gefunden, daß in der 2. Reihe stets in der Einerstelle eine Null stehen muß, und daß diese deshalb weggelassen werden kann. Man vervielfacht also dann nicht mit der Zehnerzahl, sondern mit einer Einerzahl, schreibt aber das Resultat nur von der zweiten Stelle ab. Man rückt also eine Stelle ein.

Die große Anzahl der Einer und die bei der Verwandlung eintretenden Resultate: Kein Einer, kein Zehner usw. verwirren aber leicht den Schüler und erschweren die Durchsichtigkeit des Verfahrens. Wir üben deshalb eine andere Form.

Im Kopfe werden Aufgaben gerechnet wie 5 . 7, 8 . 7 usw. (Größere Wiederholungszahl bei gleicher Grundzahl.) Das Kind findet an diesen und ähnlichen Beispielen: Je größer die Wiederholungszahl bei gleicher Grundzahl ist, desto größer ist auch das Vielfache. Ferner wird gerechnet: 3 . 8, 6 . 8, 15 . 8; oder 5 . 7, 10 . 7, 50 . 7 (doppelte usw. Wiederholungszahl bei gleicher Grundzahl). Das Kind stellt fest: Doppelte Wiederholungszahl, doppeltes Vielfache; dreifache Wiederholungszahl, dreifaches Vielfache — endlich: Soviel mal so groß die Wiederholungszahl bei gleicher Grundzahl ist, soviel mal so groß ist das Vielfache. Diese Untersuchungen schärfen die Auffassungs- und Beurteilungsgabe der Kinder und müßten auch angestellt werden, wenn sie zu dem angeführten Zwecke nicht notwendig wären; um so mehr, da sie im späteren Rechnen wieder Verwendung finden. (Vergleiche das Vervielfachen mit Brüchen.)

Es wird nun gerechnet: 2 . 7 und 20 . 7; 5 . 9 und 50 . 9; 6 . 18 und 60 . 18 usw., dann auch 2 . 9 und 200 . 9; 3 . 15 und 300 . 15 usw. Überall wird gefunden, daß das letzte Vielfache 10mal und dann 100mal so groß ist als das erste; ferner, daß, wenn mit einer Zehnerzahl vervielfacht werden soll, dies am leichtesten geschieht, wenn erst mit der Einerzahl und dann mit 10 vervielfacht wird und daß dasselbe auch von den Hunderterzahlen gilt.

So einfach das letztere erscheint, so notwendig ist doch die systematische Einführung dieser Abkürzung. Bei der Einführung des Stellenwertes ist schon darauf hingewiesen worden, daß eine Ziffer den zehnfachen Wert bekommt, wenn sie eine Stelle nach links, den 100fachen Wert, wenn

wird an einzelnen Ziffer
geübt. Nach diesen
leicht nach den
wir zu

zahl,
daß,
ch das

n, wenn
llen vor=
ngsformen
3 mal 560
wird jedes=
vor Mißver=
olgende sein:

eine oder mehre=
mal 324! Setze
zuerst mit Null de
hreiben (Beispiel a
dann mit dem Be
wir nun das Resul
eihe darunter schreibe

c)

```
   324
   450
  ----
     0
  1620
 1296
------
145800
```

Ich empfehle von diesen drei Lösungsformen die zweite. Bei a) stört die Reihe der überflüssigen Nullen, bei c) ist der freie Raum in der 1. Reihe unangenehm. Selbst bei der vorstehenden Aufgabe, bei der durch 5 mal 4 eine zweite Null im Resultate erscheint, ist das richtige Einrücken gesichert, da die erste Stelle stets an der ersten geltenden Stelle der Wiederholungszahl, hier also an der 5, erkannt wird.

Stehen nun in beiden Faktoren Nullen, so vereinigen wir die beiden empfohlenen Lösungsformen. Dies ist übersichtlich und leicht verständlich. Steht eine Null in der Wiederholungszahl, aber nicht am Ende derselben, so bezeichnen wir Reihe und Stelle, die sich durch Vervielfachen mit der betreffenden Stelle der Wiederholungszahl ergeben würde, mit einer Null und vervielfachen dann mit der nächsten Stelle, schreiben aber das Resultat in die durch die Null angedeutete Reihe. Da die Wiederholungszahl selten über 3 Stellen haben wird, ist ein Versehen und Verrechnen leicht zu vermeiden. Z. B. 308 mal 756.

```
   756
   308
  ----
  6048
 22680
 -----
232848
```

Sollten bei einem ähnlichen Beispiele noch mehr Stellen in der Wiederholungszahl stehen, so wird das richtige Einrücken durch Beachtung der ersten geltenden Stelle (hier der 3) gesichert; denn unter dieser Zahl steht stets die erste Stelle des neuen Vielfachen.

```
Beispiel:   63758
            20009
       ----------
           573822
        127516000
       ----------
       1275733822
```

17. Das schriftliche Teilen.

Das Teilen beruht auch bei dem Tafelrechnen, wie bei dem Kopfrechnen, auf dem Erkennen des Zahleninhalts. Bei dem Kopfrechnen mußten die Zahlen in Vielfache des Teilers zerlegt werden, und da das Kopfrechnen stets dem Tafelrechnen vorangeht, wird das schriftliche Teilen hierin seine beste und natürlichste Vorbereitung finden.

Im Zahlenkreise bis 100 wird jede Teilungsaufgabe als Kopfrechenaufgabe gelöst, erst in dem Zahlenkreise bis 1000 treten die Ansätze des Tafelrechnens auf.

In vielen Büchern unterscheidet man noch Teilen und Enthaltensein und übt beide Formen vom ersten Schuljahr an. Wir schließen uns diesem Gebrauche nicht an, sondern berücksichtigen bis zum Schluß des 4. Schuljahres sowohl im Kopf- als im Tafelrechnen nur das Teilen. (Vergleiche C, Abschnitt 25.) Erst bei dem höheren Zahlenkreise werden einige

Kopfrechenaufgaben für das Enthaltensein (in der Bedeutung der besonderen Auflösungsweisen) gegeben. Der Grund dafür, daß das Enthaltensein oder Messen überhaupt eingeführt wird, liegt darin, daß bei dem Rechnen mit mehrfach benannten Zahlen diese beim Zusammenfassen der niederen Einheiten in höhere Einheiten miteinander gemessen werden müssen, und daß auch sonst bei diesem Rechnen, wie bei den bürgerlichen Rechnungsarten, das Messen der Zahlen in den Schlußformen der schulgemäßen Kopfrechenlösungen vorkommt. Z. B., so oft die Zinsen des Normalkapitals in der gegebenen Zeit in den gegebenen Zinsen enthalten sind, soviel mal 100 ℳ beträgt das Kapital usw.! Die Frage, ob wir auch für das schriftliche Rechnen einen Unterschied zwischen Teilen und Enthaltensein machen müssen, wird sich beantworten lassen, wenn wir untersuchen, ob das Leben schriftliches Enthaltensein fordert, und ob der logische Unterricht in der Schule uns zu schriftlichen Enthaltenseinsaufgaben führt.

Die dem wirklichen Leben entnommenen Divisionsaufgaben treten zuerst in der Regeldetri den Kindern entgegen, so daß die Kinder durch Überlegung (Auflösung) die Grundrechnungsart finden, die sie zur Ausrechnung der Aufgabe gebrauchen. Wenn wir wissen, daß 1 kg Seife 75 Pf. kostet, so können wir berechnen, wie viele kg Seife wir für 4,50 ℳ erhalten werden. Die Kopfrechenform schließt hier: Für 75 Pf. erhalte ich 1 kg Seife, für 4,50 ℳ oder 450 Pf. werde ich so viel mal 1 kg Seife erhalten, als 75 Pf. in 450 Pf. enthalten sind usw. Das Kopfrechnen wendet also die Enthaltenseinsform an. Wie ist nun aber die gebräuchliche schriftliche Form? Das Tafelrechnen setzt an:

75 Pf. geben 1 kg
1 „ gibt
450 „ geben

$$\frac{1\ \text{kg} \cdot 450}{75} =$$

d. h., für 75 Pf. erhalte ich 1 kg Seife, für 1 Pf. werde ich den 75. Teil und für 450 Pf. 450mal soviel erhalten. Das Tafelrechnen wendet hier durch den bekannten Schluß auf die Eins in ebenso logischer Weise die Teilungsform an. — Wollten wir die vorhin herangezogene Zinsrechnungsaufgabe durch Tafelrechnen lösen, so würde geschlossen werden:

4 ℳ Zinsen bedingen auf 1 Jahr
1 „ „ „ „ 1 „
65 „ „ „ „ 3 „

$$\frac{100\ ℳ \cdot 65}{4 \cdot 3}$$

Auch hier finden wir keine Enthaltenseinsform; der Schluß auf die Eins bedingt auch hier die Teilungsform.

Aus vorstehendem dürfte sich ergeben haben, daß bei allen Divisionsaufgaben, die die Schule dem Leben entnimmt und durch logische Schlüsse zur schulgemäßen schriftlichen Lösung umbildet, sich nicht die Enthaltenseinsform, sondern die Teilungsform ergibt, daß also die Enthaltenseinsform für das Tafelrechnen sich nur bei den eigentlichen Schulaufgaben, d. h. bei eigens für vermeintliche Schulzwecke zurechtgestutzten Aufgaben findet.

Für uns wird daraus folgen, daß wir bei dem schriftlichen Rechnen nur eine Form, und zwar die Teilungsform, einzuführen brauchen.

Hierdurch sind zugleich die streitigen Fragen über Stellung des Divisors, über Divisionszeichen und über den sprachlichen Ausdruck bei dem Dividieren gelöst. Im schriftlichen Teilen stellen wir den Teiler stets hinter die Teilungszahl, wir trennen ihn von derselben durch einen Doppelpunkt und lesen: 576 geteilt **durch** 14.

Interessant ist es, zu beobachten, wie man lange Zeit hindurch in unseren Volksschulen in dem Streben, elementar zu unterrichten, diese Teilungsform für das schriftlichen Rechnen ganz ausgeschieden hatte. Obwohl der Schluß auf die Eins zum Teilen führen mußte, so ließ man doch lieber unlogisch messen, man sagte stets „4 in", und aus dieser Zeit stammt dann auch das „Hineindividieren", das beide Divisionsformen zu vereinigen sucht.

Das schriftliche Teilen tritt im Zahlenkreise bis 1000 neu auf. Die Ansatzform ergibt sich aus der schon früher geübten Form für die Aufzeichnung der Kopfrechenaufgabe im Zahlenkreise bis 100. 94 : 7 wird gelesen: 94 geteilt durch 7 oder der siebente Teil von 94. Obwohl die letztere Form sich dem glatten mündlichen Ausdruck besser anpaßt, müssen die Schüler doch beide Formen mit gleicher Sicherheit anwenden lernen.

Der Teiler ist in diesem Zahlenkreise stets eine einstellige Zahl. Eine leicht zerlegbare Zahl bildet die Teilungszahl. Bei der Aufgabe 562 : 2 scheidet das Kind wie beim Kopfrechnen zuerst die Zahl aus, die reine Hunderter als Anteil ergibt, es hat aber den Vorteil, daß es die auszuscheidende Zahl sofort unter die Teilungszahl schreibt, so daß das Gedächtnis entlastet wird. Ein weiterer Vorteil wird in der Anwendung des schriftlichen Subtrahierens liegen. — Die Anteile werden hinter dem Teiler untereinander geschrieben und zum Schluß zusammengezählt.

Die Lösung wird sich in folgender Weise darstellen:

```
562 : 2 = 200
400        80
---
162         1
           ---
160       281
---       ===
  2
  2
---
```

Sehr bald werden sich die Kinder an diese die schriftliche abgekürzte Form vorbereitende Lösungsart gewöhnen. Die Aufgaben sind alle dem Kopfrechenkreise entnommen, sie bilden also als Teilungsaufgaben keine besonderen Schwierigkeiten, und das Kind kann alle Aufmerksamkeit der schriftlichen Form zuwenden. Sicheres und gewandtes Vorrechnen ist auch hier zu verlangen. Die Aufgabe heißt z. B.:

```
987 : 8 = 100
800        20
---
187         3
160        3/8
---       -----
 27      123 3/8
          =====
 24
---
  3
```

Das Kind rechnet und spricht: Der 8. Teil von 800 ist 100 (niedergeschrieben wird zuerst die 800 und dann die 100), es bleiben 187; der 8. Teil von 160 ist 20 (niedergeschrieben), es bleiben 27; der 8. Teil von 24 ist 3, es bleiben 3; der 8. Teil von $3 = \frac{3}{8}$, also ist der 8. Teil von $987 = 123\frac{3}{8}$. — Die Aufgaben im Zahlenkreise bis 1000 behandeln nur kleine Zahlen, deshalb ist eine Formenerleichterung noch nicht notwendig, die Kinder rechnen also alle Aufgaben in der angegebenen Weise.

Im größeren Zahlenkreise werden zunächst auch noch Aufgaben mit einstelligem Teiler gelöst. Hier lernen die Kinder bald die abgekürzte Form verstehen. Sie wissen, daß eine 5 in der 4. Stelle 5 Tausender bedeutet mit oder ohne Nullen. Die Nullen werden also gespart. Die übrigbleibenden Tausender werden in Hunderter verwandelt und zu diesen die vorhandenen Hunderter gezählt usw. Nach und nach lernen die Kinder verstehen, daß ein Herunterziehen der nächsten Stelle dieselbe Zahl gibt, die wir sonst durch langatmiges Verwandeln und Zusammenzählen erhalten. So fällt eine ausführliche Form nach der andern, bis die Kinder nicht mehr die Zahlen, sondern nur die Ziffern teilen, bis die Form mechanisch geworden ist. Jederzeit aber muß das Kind auf bezügliche Fragen des Lehrers die das Verständnis nachweisende Antwort geben können. — Hierauf wird das Teilen mit zweistelligem Teiler eingeführt. Nach einer oder einigen ausführlichen Lösungen wird die abgekürzte Form benutzt. Die Kinder müssen abschätzen lernen durch Vergleichung der zwei oder drei ersten Stellen der Teilungszahl mit dem Teiler. Dasselbe gilt auch, wenn es erfordert wird, bei drei- und mehrstelligen Teilern. Diese Aufgaben mit drei- und mehrstelligen Teilern können in einigen Stunden geübt werden, aber es ist hierauf nicht das Hauptgewicht zu legen. Das Kind, das durch zweistellige Teiler sicher teilen kann, löst erforderlichenfalls auch Aufgaben mit mehrstelligem Teiler. Vor allem hat die einklassige Volksschule sich zu hüten vor der Überbürdung der Schüler mit großen Zahlen und vor der dadurch bedingten Vernachlässigung derselben in der Sicherheit in dem notwendigen Stoffe. Wenn an irgend einer Stelle, so ist hier stetige Übung geboten. —

Die abgekürzte Lösung wird durch Anwendung des öſtreichischen Subtrahierens noch wesentlich verkürzt. (Vgl. Abschnitt 15.)

Besonders achte der Lehrer darauf, daß dem Teilen im Lehrplane genügende Zeit zugewiesen wird, und daß diese Zeit nicht verkürzt werde durch ungerechtfertigte Ausdehnung der drei anderen Grundrechnungsarten. Es kann sonst leicht vorkommen, daß die Kinder Jahr für Jahr nicht zur verlangten Sicherheit im Teilen kommen und somit nie sicher teilen lernen. Die planmäßige Wiederholung (siehe B, Abschnitt 8) wird das Teilen ganz besonders zu berücksichtigen haben. Dann wird die in dem größeren Zahlenkreise erlangte Fertigkeit nicht wieder verloren gehen, um so mehr, als nach dem Vorstehenden alles fernere Rechnen häufig das Teilen verlangt. Hier mag schon erwähnt werden, daß bei der Ausrechnung des in Frage kommenden Bruchsatzes stets zuerst vervielfacht wird, ehe das Teilen eintritt.

18. Reihen.

Schon öfter ist in den früheren Abschnitten auf die Bildung von Reihen hingewiesen worden. Galt es, eine gewonnene Erkenntnis zu vertiefen, oder die Festigkeit und Sicherheit im behandelten Zahlenraume zu erhöhen; galt es, schnell Stoff für eine größere Anzahl von Aufgaben zu erhalten, oder Abteilungen nebenher angemessen im Kopfe zu beschäftigen: so wurden Reihenaufgaben angewendet. Die Bedeutung dieser Reihen für den gesamten Unterricht ist so groß, daß ihnen hier ein besonderer Abschnitt gewidmet worden ist.

Die ältesten und bekanntesten der Reihen sind die Vervielfachungsreihen des Einmaleins. Durch Zusammenzählen wurden die einzelnen Posten gefunden, durch häufige Übung aber dann allmählich auswendig gelernt. Ohne auswendig gelerntes Einmaleins ist kein Vervielfachen möglich. Bequem und naheliegend war es, an die Einmaleins-Reihe die „Eins durch eins-"Reihe anzuschließen; fordert das Wissen der einen doch auch das Wissen der anderen. Zu ähnlicher Fertigkeit wurde auch in den Schulen die „Eins und eins-" und die „Eins von Eins-" Reihe gebracht; Grundzahlen wurden fortgesetzt zusammengezählt und abgezogen, bis eine vollständige Sicherheit erzielt war. Damit aber hörte meistenteils der Gebrauch der Reihen auf; nur selten fand man hier und da noch einen schüchternen Versuch, sie an anderem Stoffe und in späteren Schuljahren zu verwenden.

Wie verwenden wir die Reihen im Rechenunterricht?

Auf der Unterstufe treten uns überall Reihen entgegen, sowohl bei der Einführung als bei der Übung. Das fortgesetzte Zu- und Abzählen einer Zahl ist eine Reihe, z. B. 1 + 3 (4) + 3 (7) + 3 (10) usw.; das Zu- oder Abzählen einer Zahl zu den gleichen Einerzahlen in verschiedenen Zehnern ist ebenfalls eine Reihe, z. B. 11 + 3, 21 + 3, 31 + 3 usw.; das Einmaleins sowohl als das Teilen der Einmaleins-Vielfachen sind Reihen u. a. m. Die Empfehlung, die in diesem Buche der Kaselitzschen Methode der operativen Zahlen geworden ist, beruht auf der Wertschätzung der bei dieser Methode besonders hervortretenden Reihenbildung. So geschieht z. B. dort die Einführung des Zusammenzählens und Abziehens in Reihen. 1 + 8, 11 + 8 usw. bis 71 + 8 und 9 — 8, 19 — 8 usw. bis 79 — 8; 2 + 8 usw., 3 + 8 bis 10 + 8 ergibt je 10 Reihen für Zusammenzählen und Abziehen. Zweck ist hier, die gewonnene Erkenntnis durch Heranziehung gleicher Erscheinungen zu vertiefen und zu befestigen. Dies sind aber nicht die einzigen Reihen der 8 aus diesen beiden Grundrechnungsarten. Wir üben auch 1 + 8, 2 + 8, 3 + 8 usw. und umgekehrt; ferner 1 + 8, 9 + 8, 17 + 8 usw. und auch rückwärts durch fortwährendes Abziehen, und das Zuzählen der 8 zu den geraden und dann zu den ungeraden Zahlen ergibt eine weitgehende Fülle von Aufgaben, die die Fertigkeit und Sicherheit der Kinder in diesem engen Kreise erhöhen werden. Dasselbe gilt von den bekannten Vervielfachungs- und Teilungsreihen der 8.

Wenn der Zahlenkreis über 100 erweitert ist, so kann es nicht nur

Aufgabe des Rechnens sein, mit großen Zahlen zu operieren, nein, gerade hier müssen die Operationszahlen der ersten beiden Jahre wieder häufig angewendet werden. Fortwährende Übung ist notwendig zur Erhaltung und Weiterentwicklung der Rechenfertigkeit. Ähnliche Reihen für Zusammenzählen und Abziehen, wie oben angegeben, werden also auch hier gebildet; die Kinder werden auch bald imstande sein, leichtere *zweistellige* Zahlen zur Reihenbildung zu verwenden; geht es auch noch nicht schnell, so bietet sich hierin doch ausreichend berechtigter Übungsstoff für viele Wochen. Zur Erhöhung der Rechenfertigkeit und der Aufmerksamkeit dienen Reihen, bei denen abwechselnd zuerst die eine und dann die andere Zahl zugezählt oder auch abgezogen wird, sowie Verbindungen vom Zusammenzählen und Abziehen. So z. B.: Zähle fortgesetzt abwechselnd 8 und 5 zu 13. Das Kind rechnet: $13 + 8 = 21$; $21 + 5 = 26$; $26 + 8 = 34$ usw., oder zähle fortgesetzt abwechselnd zu 5 zuerst 7 und ziehe dann 4 ab. Das Kind rechnet $5 + 7 = 12$; $12 - 4 = 8$; $8 + 7 = 15$; $15 - 4 = 11$ usw. Wenn dann nach einigen Übungen an leichten Aufgaben die Resultate nicht wiederholt werden dürfen, sondern die Kinder rechnen müssen 13, 21, 26, 34 usw., oder 5, 12, 8, 15, 11, 18 usw., so sind dies zunächst Aufgaben, die trotz der kleinen Zahlen die ungeteilte Aufmerksamkeit der Kinder verlangen, und die auch dazu verwendet werden können, die betreffende Rechenabteilung einige Zeit im Kopfe (mit Aufzeichnung der Ergebnisse) ohne direkte Beteiligung des Lehrers zu beschäftigen. Mit welcher Zahl bist du in den 5. Zehner gekommen? Diese und ähnliche Fragen erleichtern die Kontrolle.

Ebenso ist es später bei dem Rechnen mit mehrfach benannten Zahlen. Ziehe von 100 ℳ fortgesetzt 1,25 ℳ ab, dies kennzeichnet eine Reihe von Aufgaben, die sich in ähnlicher Weise, wie oben angegeben, mannigfaltig vermehren und umgestalten lassen.

Bei dem Vervielfachen und dem Teilen empfiehlt es sich auf allen Rechenstufen, die Aufgaben zunächst nach den Operationszahlen zu ordnen. Vervielfacht mit 2 jede Zahl, die ich nenne! Zuerst vorrechnen, dann kurzes Angeben des Resultates. So auch mit den anderen Grundzahlen bei dem Vervielfachen und Teilen. Dasselbe auch mit stetiger Grundzahl beziehungsweise Teilungszahl und stets veränderter Operationszahl. Die Sicherheit des Einmaleins kann durch nichts vollständiger erzielt werden, als durch die Herannahme gleicher Operationszahlen beim Vervielfachen und beim Teilen.

Auch bei der Bruchrechnung lassen sich die Reihen, und zwar vornehmlich bei dem Zusammenzählen und Abziehen, mit gutem Erfolg anwenden. Zähle bis zur Zahlengrenze von 10 zu $\frac{2}{3}$ fortgesetzt $\frac{3}{4}$; ziehe von 20 fortgesetzt $\frac{5}{7}$ ab; vergrößere $\frac{1}{2}$ abwechselnd fortgesetzt um $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{5}$ usw. Auch diese Aufgaben eignen sich vorzüglich zum stillen Kopfrechnen. Sie stellen nicht geringe Anforderungen an die Rechenfertigkeit der Schüler und an die Energie derselben und sind ein vorzügliches Erziehungsmittel. Zu den Reihen werden noch die Prozentbestimmungsreihen ($\frac{1}{2}$ v. Ganzen $= 50\,\%$; $\frac{1}{3}$ v. Ganzen $= 33\frac{1}{3}\,\%$ usw.) gerechnet werden müssen; auch viele der Aufgaben der bürgerlichen Rechnungsarten werden zu Reihenaufgaben ver-

wendet werden können, so z. B. Aufgaben aus der Zins- und Zinseszinsrechnung, ebenso aus der Gesellschaftsrechnung usw. — Gesicherte Einsicht, Zahlengedächtnis und Rechenfertigkeit für die Schüler, Zeit- und Kraftersparnis für den Lehrer ergeben sich überall als Vorteile dieser Reihenaufgaben.

19. Die Vorbereitung der Bruchrechnung auf den untern Stufen.

Die Zeit liegt nicht allzuweit hinter uns, in der in manchen unserer Landschulen Bruchrechnung nicht getrieben wurde; denn — Bruchrechnung gehörte zu den größten Geheimnissen der Rechenkunst. Das Betreiben der Bruchrechnung galt als ein sicheres Zeichen vorgeschrittener Schulen, und selbst in diesen verzichtete man häufig oft von vornherein auf klares Verständnis, sondern begnügte sich mit der Einprägung und Anwendung einiger Regeln, unter denen die von dem Vervielfachen der Zähler und Nenner untereinander und die von dem Um-(Rum-)drehen des Teilers die am meisten gequälten waren. — Dabei forderten schon die Regulative ein Rechnen mit gebrochenen Zahlen, und viele Rechenmethodiker vor Pestalozzi und von Pestalozzi und seinen Quadrattafeln an hatten der Bruchrechnung ihre besondere Aufmerksamkeit zugewendet.

Die „Allg. Best." schreiben nicht nur Bruchrechnung vor, sondern bestimmen die in geeigneter Weise zu erfolgende Vorbereitung derselben auf den untern Stufen. Hierdurch wurde das Vorschrift, was von denkenden Rechenlehrern gewünscht und angestrebt worden war, nämlich die Vorbereitung der Bruchrechnung.

Wie bereiten wir die Bruchrechnung vor?

Nicht der Begriff „Bruch" soll auf den untern Stufen eingeführt werden, nur vorbereitet soll dieser Begriff und dadurch die Bruchrechnung werden. Dies geschieht, wenn wir im Rahmen der bekannten und anwendbaren Rechnungsarten gleiche Teile von Ganzen entstehen und dieselben in einfachen Aufgaben auch anwenden lassen, wenn wir also mit Brüchen rechnen lassen, ehe Bruchrechnung eingeführt ist. Das Wesentliche der Vorbereitung ist naheliegend. Bei dem Teilen können die Aufgaben, falls sie dem Leben entnommen sind, nicht immer so gegeben werden, daß die „Division aufgeht", es bleibt dann eben so und soviel „Rest". Ob wohl das Leben in seinem Handel und Wandel vom Kleinsten bis zum Größten, vom Einfachsten bis zum Zusammengesetztesten etwas von Resten weiß? Das geschulte Kind wird angehalten, zu sagen: Die Hälfte von 3 Äpfeln ist 1 Apfel, Rest 1 Apfel. Das nicht geschulte Kind weiß sich hier besser zu helfen, bei dem bleibt nichts übrig, es schneidet den Apfel durch, und zwar gibt es genau acht, daß die Teile gleich werden; so teilt es also den Rest. Dieses Teilen der Äpfel und auch anderer Gegenstände ist dem Anschauungskreise des Kindes entnommen; ihm bringt es Interesse entgegen; hier schon kann die Schule einsetzen und anfangen, die Bruchrechnung vorzubereiten. Die Ausdrücke „ein Halb" oder „die Hälfte" sind so weit verbreitet, daß sie dem Kinde meistens nichts Neues sein werden, aber auch die Einführung der Ausdrücke

... keine besonderen Schwierigkeiten bereiten.
... dem Apfel gemacht, ein Teil ist
... Drittel. Und wenn nun zwei
...hen sollen? Die drei Kinder
...mmt jedes ein Drittel, so-
... ein Drittel sind also
...in Drittel. Zwei
... 4 Halbe usw.
...eile auch zu-
... Die Kinder
...en. Der Lehrer
... Verwandeln der
...ier noch mehr als
...gehe besonnen und
... sondern die kleinsten
... überblickbarer „Rest“.
... operativen Zahlen ge-
...aben von selbst. Wenn
...leinsreihe der 2 durch 2
...ff „ein Halb“ eingeführt
... ⅓ und dann vielleicht noch
... andern einfachen Teile beim
...d bei den Ergänzungsaufgaben
...ehe ich, daß eine Klasse schwach
...e Unterrichtszeit verkürzt worden,
...f die Teilung der Reste, ich gebe
...ste vorkommen. Im 2. Schuljahre
...saufgaben nachgeholt werden, doch
...an dann genügend Zeit für dieses

... der von uns angewendeten Vermittlungs...
... der Bruchrechnung fehlen mit dem erst...
...n. Die sonst vollständige Behandlung ...
... die Kinder fast größere Anforderungen ...
...reise bis 40 mit den operativen Zahlen vo...
...itt der Unterschied bei der Vorbereitung ...
...Bei der Kaselitzschen Methode werden im e...
...Drittel und Viertel eingeführt, bei der allsei...
...reises bis 20 müßten die Kinder auch mit Fü...
...t gemacht werden. — Wir können also im ...
...Vorbereitung der Bruchrechnung verzichten, dafü...
...Schuljahr um so mehr Nachdruck auf diesen Stoff ...
...n das Ziel, klare Begriffe von diesen Teilen zu verr...
...t werden. Ich habe bis jetzt stets gefunden, ...
...iften und mir keine Schwierigkeiten gemacht hat, ...
...nen Art die Bruchrechnung vorzubereiten. — Die Kinde...
... und kommen sogar, sobald sie die Teilung durch d...

Zahlen verstanden haben, dem Lehrer entgegen. Es ist also kein Grund vorhanden, diese Teilung der Reste bis zur Mittelstufe aufzuhalten, wie ängstliche Gemüter glauben mögen.

Die Mittelstufe verfährt wie die Unterstufe, sie teilt ja vorwiegend durch einstellige Teiler, deshalb werden neue Größen zunächst nicht eingeführt; dabei vergißt sie nicht, bequeme Teile in Aufgaben aus den vier Grundrechnungsarten zu verwenden, auch treten hier einfache Verwandlungsaufgaben der Ganzen in Teile und der Teile in Ganze auf. Auch beim schriftlichen Teilen werden die Teilungszahlen häufig nicht reine Vielfache des Teilers sein. Die Kinder werden dann auch hier keinen Rest lassen und z. B. $\frac{16}{275}$ zum Anteil setzen, wenn 16 noch durch 275 zu teilen war. — Der Vorwurf, daß die Kinder keinen klaren Begriff von $\frac{16}{275}$ hätten, trifft nicht zu. — Im Anschluß an die kleineren Zahlen verstehen die Kinder recht wohl, wie $\frac{1}{275}$ und wie $\frac{16}{275}$ entstehen (ebenso wie $\frac{1}{4}$ und $\frac{3}{4}$), mithin haben sie von $\frac{16}{275}$ genau dieselbe auf andern Erkenntnissen beruhende Vorstellung wie z. B. von 836 oder 1074. In meinen Rechenbüchern sind die Aufgaben, bei denen die Division nicht „aufgeht", an den Schluß der Abschnitte gestellt und mit der Überschrift „Vorbereitung der Bruchrechnung" versehen. Ein Hauptgewicht wird in der Mittelstufe bei dem Rechnen mit mehrfach benannten Zahlen auf die Teile von den bekanntesten Münzen und Maßen gelegt werden, die in niedere Sorten verwandelt werden können. $\frac{1}{2}$ ℳ sind 50 Pf. usw. (Einige Aufgaben hiervon könnten auch zum Stoff der Unterstufe gerechnet werden.) Daß hierbei die Zehntel betont werden müssen, ergibt sich aus dem Inhalt der Größen. — Besondere Freude macht es den Kindern, wenn sie scheinbar verschiedene Brüche durch Zusammenzählen oder Abziehen vereinigen können. So rechnen sie bei der Aufgabe, wieviel $\frac{1}{2}$ ℳ und $\frac{1}{5}$ ℳ sind: $\frac{1}{2}$ ℳ = 50 Pf., $\frac{1}{5}$ ℳ = 20 Pf.; 50 Pf. und 20 Pf. sind 70 Pf., folglich ist $\frac{1}{2}$ ℳ + $\frac{1}{5}$ ℳ = 70 Pf.

Das Kind lernt nun nicht nur die gleichen Teile der Ganzen kennen und mit ihnen in einfacher Weise rechnen, sondern es lernt sie auch in der Bruchform schreiben. Ein Drittel wird geschrieben $\frac{1}{3}$, und der 12. Teil von 7 wird geschrieben $\frac{7}{12}$. Dieselbe Form ergibt sich aber auch bei den aus Vervielfachen und Teilen zusammengesetzten Aufgaben. $\frac{7}{12}$ von 4596 heißt 7mal den 12. Teil von 4596, und $\frac{7}{12}$ mal 4596 ist der 12. Teil von 7mal 4596; nur der Abkürzung wegen wird hier die Bruchform gebraucht. Man beachte hier, daß auch in dem ersten Falle $\frac{7}{12}$ von 4596 gerechnet wird: 7mal 4596 geteilt durch 12. Immer wieder muß darauf hingewiesen werden, daß bei einer Verbindung von Multiplizieren und Dividieren stets zuerst multipliziert wird.

Bei dem Rechnen mit mehrfach benannten Zahlen tritt der Bruchstrich bei dem Bruchsatz (der schriftlichen Form) auf. Die Kinder lernen verstehen, daß der Teiler auch unter die Teilungszahl gesetzt werden kann, und daß beide durch einen Strich getrennt werden.

Ist die Bruchrechnung in dieser Weise vorbereitet worden, so bietet der Begriff „Bruch" keine Schwierigkeiten mehr, und auch die Operationen mit Brüchen werden leichter sein, arbeitet doch der Schüler nicht mit neuen,

sondern mit längst bekannten und alt gewohnten Vorstellungen. (Über die Vorbereitung der Dez.-Bruchrechnung siehe den Abschnitt über Einführung der Dez.-Schreibweise, III, Abschnitt 23.)

20. Die Einführung der Grundzahlen und der zusammengesetzten Zahlen.

Schon früher ist auf die Wichtigkeit der Zerlegung der Zahlen in Vielfache des Teilers hingewiesen worden. Es ist daher von großem Vorteil für die allseitige Auffassung und Erkenntnis der Zahlen, wenn wir nach der mündlichen und schriftlichen Behandlung der vier Grundrechnungsarten mit unbenannten Zahlen Übungen im Zerlegen derselben anstellen. (Vgl. Stephani und sein Ponderieren, S. 42.) Ich meine, daß am Schluß des vierten Schuljahres der geeignete Platz für diese neue Betrachtung der Zahlen ist, da in diesem Jahre das zur mechanischen Fertigkeit gewordene Tafelrechnen in dieser eigenartigen Durchdringung der Zahlen ein gutes Gegengewicht erhält. Sollte aber hier die Zeit fehlen, so würde auch eine Verlegung der Durchnahme bis an den Schluß des 5. Schuljahres möglich sein.

Beim Dividieren unterschieden wir Teilen und Enthaltensein; beides ist geübt, wenn auch in verschiedener Ausdehnung. Jetzt wird an Beispielen erkannt, daß eine Zahl in mehreren Zahlen ohne Rest enthalten sein kann, und wievielmal dies der Fall ist. Wir messen nun die Länge des Tisches. Dazu gebrauchen wir ein Maß, das Meter. Ebenso messen wir andere Längen, indem wir zusehen, wie oft wir das Meter auf der Länge abtragen können. Wir messen das Wasser in einem Topfe mit dem Liter, d. h., wir sehen zu, wie oft wir ein Liter Wasser von dem im Topfe befindlichen Wasser ausschöpfen können. Meter und Liter sind Maße. Längen werden durch Längen, Flächen durch Flächen usw. gemessen, also müssen auch Zahlen durch Zahlen gemessen werden. Miß also die 4 durch 2, desgl. die 12 durch 2 und 3 usw. Endlich wird erkannt, daß die Zahl ein Maß einer Zahl ist, die in ihr ohne Rest enthalten ist. Nun werden verschiedene Maße verschiedener Zahlen gesucht. — An richtig gewählten Beispielen wird gefunden, daß zunächst viele Zahlen die Eins zum Maße haben. Da keine Zahl genannt werden kann, welche die 1 nicht zum Maße hat, so wird festgestellt: Jede Zahl hat die 1 zum Maße. In derselben Weise wird nachgewiesen: Jede Zahl hat sich selbst zum Maße. Beide Sätze werden nun vereinigt: Jede Zahl hat die 1 und sich selbst zum Maße. Welche Maße haben also 6, 9, 11? Antwort: 1 und 6, 1 und 9, 1 und 11. — Durch Untersuchung wird nun gefunden, daß die 6 außer der 1 und sich selbst noch 2 und 3, die 9 außer 1 und sich selbst noch 3 zum Maße haben, daß aber die 11 nur 1 und sich selbst zum Maße hat. Dasselbe wird an anderen Zahlenbeispielen nachgewiesen. Daraus wird erkannt, daß es Zahlen gibt, welche nur die 1 und sich selbst zum Maße haben, während andere Zahlen außer der 1 und sich selbst noch andere Zahlen zum Maße haben. Hiernach werden nun zunächst die Zahlen von 2—10 in 2 Gruppen geteilt. Auf die linke Seite kommen die Zahlen, die nur die Eins

schaftliches Maß haben, heißen verwandte Zahlen, die, die kein gemeinschaftliches Maß haben, heißen nicht verwandte Zahlen (prim unter sich). Vgl. Abschnitt 20.

Bei dem Aufsuchen des kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen wird in ähnlicher Weise verfahren. Es werden Vielfache der Zahlen von dem 2fachen an aufsteigend aufgeschrieben, bis ein gemeinschaftliches Vielfaches gefunden ist. Dieses ist zugleich das kleinste derselben, z. B.:

Vielfache von 36 sind 72, 108, 144, 180;

Vielfache von 30 sind 60, 90, 120, 150, 180.

Auch hier mag dann wieder die Vergleichung der Grundfaktoren der Zahlen mit denen des kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen derselben stattfinden; das Ziel ist aber die Erkenntnis, daß das kleinste gemeinschaftliche Vielfache verwandter Zahlen gefunden wird, wenn das größte gemeinschaftliche Maß beider Zahlen aus einer derselben ausgeschieden und der übrigbleibende Faktor mit der andern Zahl vervielfacht wird, und daß ferner bei nicht verwandten Zahlen das Vielfache aus beiden Zahlen das kleinste gemeinschaftliche Vielfache ist. Zahlreiche Übungen werden angestellt; auch hier wird darauf hingesteuert, daß die Schüler das kleinste gemeinschaftliche Vielfache zwischen nicht zu großen Zahlen sofort bestimmen können.

Wie schon angegeben worden ist, wird die Lehre von dem größten gemeinschaftlichen Maße zunächst angewendet werden bei der Regeldetri. Soll ich bei dem Kopfrechnen von 36 kg auf 54 kg schließen, so würde es zu unnötigen Schwierigkeiten führen, wenn man auf 1 kg zurückgehen wollte. Die Einheit ist hier nicht 1 kg, sondern das größte gemeinschaftliche Maß beider Größen, 18 kg. Weiterhin findet diese Lehre vom größten gemeinschaftlichen Maße ihre Anwendung bei dem Kürzen der Brüche sowie bei dem Kürzen der Bruchzahlen bei dem Vervielfachen und Teilen mit Brüchen und bei dem Bruchsatz. Da ferner die Verhältnisbestimmungen in den kleinsten ganzen Zahlen (d. h. nach den größten gemeinschaftlichen Teilen) erfolgen, so muß auch hier das größte gemeinschaftliche Maß bekannt sein. Und wie mannigfaltig sind die Aufgaben aus den bürgerlichen Rechnungsarten, bei denen durch Anwendung des größten gemeinschaftlichen Maßes die Rechenarbeit wesentlich erleichtert und verkürzt wird!

Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache tritt bei der Bruchrechnung als Hauptnenner auf. Auch bei dem Aufsuchen des Hauptnenners wird deshalb auf das hier Erkannte zurückgegriffen werden, doch hierüber in einem andern Abschnitt.

22. Die Einführung der mehrfach benannten Zahlen.

Im Anschluß an III, Abschnitt 10, führen wir hier nochmals einige Gedanken über den Zusammenhang des Rechnens mit unbenannten und mit mehrfach benannten Zahlen aus.

Alles Rechnen ist zunächst ein Rechnen mit benannten, dann mit unbenannten Zahlen, und die hierbei gewonnene Erkenntnis und Kraft

wird dann dem praktischen Leben und seinen Verhältnissen zugeführt. Gerechnet wird nun im Leben nicht mit unbenannten, sondern mit benannten Zahlen, nämlich mit den verschiedenen Münzen, Maßen und Gewichten. Dieses Rechnen unterscheidet sich von dem oben angeführten Rechnen mit benannten Zahlen dadurch, daß bei dem letzteren nur einsortige Größen, bei dem ersteren aber mehrsortige Größen in ihren Beziehungen zu einander behandelt werden. Die Zahlenkraft des Schülers muß entwickelt, sein Verständnis vertieft, sein Sprachschatz erweitert sein, ehe das Rechnen mit den sogenannten mehrfach benannten Zahlen auftreten kann. Gewöhnlich ist deshalb dieser Rechenstoff der Mittelstufe und zwar dem ältesten Jahrgang derselben zugewiesen.

Es würde aber unmethodisch sein, wenn wir bis zu diesem Schuljahre die Kinder ohne jede Kenntnis der wichtigen, das geschäftliche Leben beherrschenden Größen ließen. Auch hier ist eine Vorbereitung geboten und leicht durchgeführt. Das häusliche Leben der Kinder bietet ihnen Anschauungen von Münzen, Maßen und Gewichten, die in der Schule nur geordnet und vertieft zu werden brauchen, um diese und jene dieser Größen schon früher im Unterricht verwerten zu können. Nur wird dieses Rechnen dann gleich dem auf der Unterstufe ein Rechnen mit einfach benannten Größen sein. Wie mit Bohnen oder Äpfeln, so rechnen wir auch mit Mark oder Litern, mit Pfennigen oder Kilogramm. Auch die amtlich festgesetzten Abkürzungen der in den Unterricht hineingezogenen Größen wird gelehrt, so daß dann bei der eigentlichen systematischen Einführung dieser mehrsortigen Größen vieles Bekannte sich finden wird.

Daß dieser Einführung die anschauende Betrachtung der Größen selbst zugrunde liegen soll, ist unter III, Abschnitt 9, schon erwähnt worden. Es soll hier nur nochmals darauf hingewiesen werden, daß fort und fort darauf zu achten ist, daß diese durch Selbsttätigkeit gewonnene Kenntnis nicht verloren gehe, sondern durch stete Übung erhalten bleibe.

Wir beginnen mit der Einführung der Münzen. Das Kind kennt Mark und Pfennig, trotzdem werden beide wieder vorgezeigt und vom Kinde die Verschiedenheiten in Größe, in Farbe, in Stoff und endlich im Werte festgestellt. Eine Mark hat 100 Pfennige, hieran schließen sich sofort Übungsaufgaben über Verwandeln von Mark in Pfennige und umgekehrt von Pfennigen in Mark (Auflösen und Zusammenfassen); 100 ist dabei die Operationszahl. Mark wird abgekürzt in ℳ (ohne Punkt), für Pfennig schreiben wir Pf. Jetzt werden nach und nach die anderen Silbermünzen vorgezeigt. Die Größenvergleichung unterstützt die Wertvergleichung. Auch hier werden leichte Wechselaufgaben gestellt. Wie viele Fünfzig-Pfenniger erhält man für ein (vier) Zweimarkstück? usw. Das Kind wiederholt nun die ihm bekannten Silbermünzen. Das Zehnmarkstück von Gold wird neben das Fünfmarkstück von Silber gelegt. Aus der Größe und der Wertvergleichung derselben erfährt es, daß Gold viel kostbarer sein muß, als Silber ist. Das Zwanzigmarkstück wird angeschlossen. Auch hier werden leichte Verwandlungsaufgaben gegeben. Wie das Fünfmarkstück von Silber mit dem Zehnmarkstück von Gold verglichen wurde, so auch die kleinste Silbermünze, der Fünfzigpfenniger mit dem Zehnpfenniger von

Nickel. Es folgt hieraus, daß Nickel billiger ist als Silber. (Beispiele aus dem Anschauungskreise der Kinder können herangezogen werden.) Dem Zehnpfenniger folgt der Fünfpfenniger, und dieser wieder wird in bekannter Weise verglichen mit dem größeren, aber minder wertvollen Zweipfenniger. Endlich schließt der Pfennig die Reihe der Münzen. Die Kinder fassen nun zusammen, aus welchen Metallen die Münzen geprägt sind, und welche sie kennen gelernt haben. Einige einfache Bemerkungen über das Recht zur Prägung von Münzen und die Zusammensetzung der verwendeten Metalle schließen sich ungesucht an. Über die dezimale Schreibweise der Münzen siehe den folgenden Abschnitt.

In ähnlicher Weise langsam weitergehend und die gewonnene Kenntnis durch Auflösungs- und Zusammenfassungsaufgaben sogleich befestigend, werden die übrigen Maße eingeführt. Es genügen deshalb hier nur kurze Andeutungen. Ein Meter (m), dessen Länge an dem Türpfosten durch einen kräftigen Strich angezeichnet ist, zerfällt in 100 Centimeter (cm), deren Länge an der Fingernagelbreite ungefähr bestimmt wird. Ein Centimeter wird in 10 Millimeter (mm) geteilt (Messerrückenbreite). 1000 Meter nennt man 1 Kilometer (km). Wieviel Zeit braucht ein rüstiger Fußgänger, um eine Strecke von 1 km zu gehen? Entfernungen bekannter Orte sind anzugeben, oder diese Angabe ist den Schülern aufzugeben. Bei den Kunststraßen ist die Länge eines Kilometers in 10 gleiche Teile geteilt; zu jedem Teile gehören 100 m.

An der Wandtafel oder auf dem Fußboden wird ein Quadrat (einfachste Begriffsbestimmung als Viereck von lauter gleichen Seiten und rechten Winkeln) gezeichnet, dessen Seiten je 1 m lang sind. Diese Fläche heißt Quadratmeter (qm), ein Quadrat von 1 cm Seitenlänge heißt Quadratcentimeter (qcm). Die bekannte Teilung des Quadrates in 100 Streifen (Beschreibung eines Streifens) und die von jedem Streifen in 100 kleine Quadratcentimeter ergibt die Zahl von 10000 qcm, welche zu 1 qm gehören. 1 qcm hat 100 Quadratmillimeter (qmm). 10 qm messe ich auf dem Fußboden an der Schulwand oder im Schulgarten am Zaun nebeneinander ab. Der Streifen ist 10 m lang und 1 m breit. Soll die Breite auf 10 m ergänzt werden, so müssen 10 solche Streifen nebeneinander abgemessen werden. Das Ganze faßt dann 100 qm und ist ein Quadrat von 10 m Seitenlänge. Ein solches Quadrat heißt Ar (a). In gleicher Weise entsteht aus dem a das Hektar (ha).

Es wird versucht, durch Aufstellung von 2 Bretterwänden (je 1 qm Fläche) auf dem auf die Dielen der Schulstubenecke gezeichneten Quadrate den Raum des Würfels zu veranschaulichen, der 1 m Kantenlänge hat. (Andere Würfel, vorhandene und herzustellende Modelle unterstützen diese Anschauung.) Dieser Würfel heißt Kubikmeter (cbm). Kleine Würfel von 1 cm Kantenlänge lassen sich leicht herstellen, sie heißen Kubikcentimeter (ccm). An eine Kante des Kubikmeters lassen sich 100 kleine Kubikcentimeter stellen. Solche Reihen müßten aber 100 nebeneinander gestellt werden, bis die Grundfläche des Kubikmeters bedeckt wäre, und 100 solche Schichten würden erst ein Kubikmeter ausmachen. (In ähnlicher Weise könnte auch 1 cbm in 100 Scheiben, jede Scheibe in 100 Säulen und jede Säule in 100 ccm geteilt werden.) 1 cbm = 1000000 ccm. Aus

dem Kubikmeter sollen jetzt nur 10 Scheiben gebildet werden. Jede Scheibe ist 10 cm dick und zerfällt in 10 Säulen, von denen jede wieder 10 Würfel bildet. (Überall Beschreibung der entstandenen Körper und Festsetzung ihrer Zahl.) Ein Würfel dieser Art heißt ein Zehncentimeterwürfel! Der Raum dieses Würfels (Vorzeigen) heißt auch Liter (l). Zu einem Kubikmeter gehören 1000 l. 100 l gehören zu einem Hektoliter (hl). Größenvergleichung von cbm und hl.

Das Gewicht eines Litergefäßes wird vielleicht durch Steinchen auf einer Wage bestimmt. Man fülle nun das Gefäß mit recht reinem und recht kühlem Wasser und suche unter den vorhandenen Gewichtsstücken das Stück aus, welches (ungefähr) das Gleichgewicht hergestellt. Dieses Gewicht heißt 1 Kilogramm (kg). Der tausendste Teil desselben ist 1 Gramm (g) und 1000 kg nennt man Tonne (t). (Was wiegt 1 cbm Wasser? Wieviel wiegt 1 ccm Wasser?)

Das Papier wird nach Ries und Bogen berechnet. 1 Ries hat 1000 Bogen.

Bekannt sind auch den Kindern die meisten der sogenannten Zeit- und Zählmaße. Mandel, Dutzend, Zehner und Stück, Tag, Woche, Monat und Jahr usw. werden deshalb leicht eingeprägt.

Nochmals sei darauf hingewiesen, daß sich unmittelbar an jede Neueinführung Verwandlungsaufgaben anschließen müssen. Nur hierdurch können die Kinder zur Sicherheit in den einzelnen Arten gebracht werden. Ab und zu kann die Einführung dieser Größen auch kurz unterbrochen werden durch einfache, dem Leben entnommene Aufgaben aus den vier Grundrechnungsarten. Nach der Einführung aller Sorten aber dienen zur Befestigung die Wiederholungsfragen nach der Anzahl der Einheiten, die sich aus einer Einheit ergeben oder die zu derselben zusammenzufassen sind. Diese Zahlen heißen **Währungszahlen**, sie sind die Operationszahlen beim Auflösen und Zusammenfassen. Vielfache Übung mit diesen Währungszahlen führt nun zur unbedingten Sicherheit.

Man könnte nun noch darüber im Zweifel sein, ob hier auf der Mittelstufe schon die Einführung der Flächen- und Körpermaße erfolgen solle, oder ob man damit warten wolle, bis auf der Oberstufe in der Raumlehre die Berechnung der Flächen und Körper gelehrt wird. Ich glaube, wir haben keine Veranlassung, hier auf der Mittelstufe eine Lücke im Stoff zu lassen, umsomehr, als der größte Teil der mehrfach benannten Zahlen den Kindern nicht ganz neu ist und das Leben die Maße der Flächen und Körper häufig verlangt. Außerdem fehlt es nicht an der Zeit zur Einführung und bei richtiger Behandlung wird der Stoff für die Kinder des fünften Schuljahres auch nicht zu schwer sein. Endlich möchte ich noch auf einen häufig vorkommenden Fehler aufmerksam machen, daß nämlich erfahrungsgemäß die Kinder die dezimalen Währungszahlen bevorzugen und gern auch bei Zeit- und Zählmaßen unrichtig verwenden.

23. Die Einführung der dezimalen Schreibweise der mehrfach benannten Zahlen.

Die meisten und weitaus wichtigsten unserer mehrsortigen Größen sind bei ihrer Teilung dem Gesetz der Zehnerordnung gefolgt. Welche

Vorteile und Erleichterungen dadurch dem Rechnen und dem Rechenunterrichte erwachsen sind, ist leicht einzusehen. Die Älteren unter uns mögen an ihre Kindheit zurückdenken, an 110 und 100 Pfund, an 32 und 30 Lot, an 24 Scheffel und 16 Metzen usw., usw., an die Regeln über Schnellrechnen, an Talerbrüche, Agioregeln usf., und man wird begreifen, daß der heutige Rechenunterricht viel einfachere Stoffe zu bewältigen hat wie der frühere. Vervielfachen und Teilen durch 10, 100 oder 1000, in den seltensten Fällen durch eine höhere Einheit der Zehnerordnung ist an die Stelle von den Sechzehner-, Vierundzwanziger-, Dreißiger- usw. Reihen getreten. Wie schwer und wenig übersichtlich waren früher die zusammengesetzten Größen, z. B. 7 Tlr. 14 Sgr. 6 Pf., wie leicht überschauen sich dagegen die heutigen 22 ℳ 45 Pf. Letztere Summe überblickt man leicht, weniger übersichtlich sind 2245 Pf.; ebenso leicht sind 13 kg 530 g zu überblicken, schwieriger aber ist es bei 13530 g. Zum besseren Überblick ist also auch bei den jetzigen mehrfach benannten Zahlen eine Zusammenfassung in größere Einheiten notwendig gewesen. Man könnte nun das Rechnen mit mehrfach benannten Zahlen überhaupt vermeiden, wenn man durch Weglassen der Bezeichnung für die größeren Sorten diese in die kleinsten Sorten verwandelte und dann berechnete, wie das früher geübt worden ist. Man hätte freilich mit etwas großen Zahlen zu rechnen, auch müßte man der Übersichtlichkeit wegen vorher und nachher einige Nebenrechnungen ausführen, aber man käme doch schließlich, wenn auch auf recht umständliche Weise, zum Ziel, denn die Resultate sind richtig und schließlich auch übersichtlich. Bequemer wäre es dann schon, man gewöhnte sich an das Neue und rechnete mit mehrfach benannten Zahlen. Hatte man vorher zwei Nebenrechnungen, so ist jetzt nur eine notwendig, wenn nämlich im Laufe der Rechnung entweder die Summe der kleinen Einheiten in größere verwandelt oder eine große Einheit in kleine Einheiten aufgelöst werden muß, und außerdem erhält man sofort ein übersichtliches Resultat.

Nun ordnet aber eine Vorschrift unserer hohen Behörde wohl mit Rücksicht auf die Übersichtlichkeit an, daß die auf dezimaler Teilung beruhenden Maße und Gewichte einsortig zu schreiben seien.

Man hat nun wirklich versucht, diese Forderung dadurch zu erfüllen, daß man durch Verwandlung der großen Sorten in kleine einsortige Größen schuf. Die Rechnung mit diesen aber ergab nun all die oben schon angeführten Übelstände; ich glaube auch nicht, daß dies Verfahren sich viel Freunde erworben hat. —

Es gibt aber noch einen zweiten Weg, aus mehrsortigen Größen einsortige zu schaffen, den nämlich, daß man die kleinen Einheiten auf die großen Einheiten bezieht, d. h. sie als Teile der großen Einheiten auffaßt. Bei den dezimal eingeteilten Münzen, Maßen und Gewichten ist es besonders leicht, die kleinen Einheiten als Teile der großen Einheiten aufzufassen. Wir erhalten dabei Zehntel, Hundertstel, auch Tausendstel und werden hierdurch direkt auf den Teil der Bruchrechnung, der mit solchen Brüchen sich beschäftigt, auf die Dezimalbruchrechnung, geführt. Doch würde es nicht geraten sein, hier schon einen Kursus der Dezimalbruchrechnung einzuschalten, dies wäre entschieden verfrüht. Wie aber das

Teilen der Reste dahin führte, die gemeine Bruchrechnung vorzubereiten, so werden wir die Beziehung der Pfennige auf die Mark, der Gramm auf die Kilogramm usw. dazu benutzen, die Dezimalbruchrechnung vorzubereiten. Die Kinder werden wirklich Zehntel, Hundertstel und Tausendstel kennen und schreiben lernen, aber, wie ich nochmals betonen will, ohne Dezimalbruchrechnung.

Schon bei der Vorbereitung der Bruchrechnung (III, Abschnitt 19) war verlangt worden, daß Zehntel, vielleicht auch Hundertstel mit erwähnt werden; Gelegenheit dazu bietet sich ungesucht. Hier würde die Kenntnis dieser Größen dahin erweitert werden, daß die Zehntel usw. in ihrer Beziehung zur Zehnerordnung auftreten; denn dadurch erklärt sich ihre Schreibweise. Da nun dies alles im engen Anschluß an den äußern und innern Anschauungskreis der Kinder getrieben wird, so wird auch der Einwurf, daß diese Betrachtungsweise für die Kinder zu schwer, weil zu abstrakt ist, hinfällig werden.

Unsere Aufgabe wird also eine doppelte sein. Zuerst müssen wir im Anschluß an die Beziehungen der kleinen zu den großen Einheiten neue Namen für die niederen Einheiten finden, und dann muß die Stellung dieser Größen in unserem Zahlensystem gefunden werden.

Wir legen die bekannten Münzen zugrunde. Die Mark ist die Einheit; nach Mark wird überall gerechnet; auf Mark sollen also die Pfennige bezogen werden. Zur Mark gehören 10 Zehnpfenniger, 1 Zehnpfenniger ist also eine Zehntelmark. 2 Zehnpfenniger sind $\frac{2}{10}$ und 7 Zehnpfenniger $\frac{7}{10}$ Mark. Zu einer Mark gehören $\frac{10}{10}$ Mark (10 Zehnpfenniger). Es werden nun Mark in Zehntelmark und umgekehrt Zehntelmark in Mark verwandelt; wenn es hierbei notwendig ist, wird anfangs auch auf den Zehnpfenniger zurückgegriffen. Wir schreiben 327 ℳ. Die Kinder wiederholen an diesen oder ähnlichen Zahlen, daß 1 Hunderter in 10 Zehner, 1 Zehner in 10 Einer zerfällt, und daß wir die zehnmal so kleine Zahl schreiben, wenn wir die Ziffer eine Stelle nach rechts rücken. Dies letztere wird nochmals geübt an Aufgaben, wie: Schreibe 700 ℳ, 70 ℳ, 7 ℳ; oder 100 ℳ, 10 ℳ, 1 ℳ. Die Größe, welche 10 mal so klein als 1 ℳ ist, heißt Zehntelmark. Wir müßten also die Ziffer, welche 10 mal so wenig als eine Mark, also Zehntelmark bedeuten soll, noch eine Stelle nach rechts rücken, sie kommt also rechts von der Einerstelle zu stehen. Das alles wird mit den Kindern durch bezügliche Fragen festgestellt. Wir bedürfen eines Zeichens, um zu erkennen, welches die Einerstelle ist, darum setzen wir hinter die Einer ein Komma. Schreibe 7 ℳ und 4 Zehntelmark! Ähnliche Übungsaufgaben. Festgestellt wird nun: Die Zehntelmark stehen in der 1. Stelle rechts vom Komma.

Der Pfennig ist der hundertste Teil der Mark, also $\frac{1}{100}$ Mark. (Aus der Beziehung des Pfennigs zur Mark wird der Name desselben hergeleitet.) Zu einem Zehnpfenniger gehören 10 Pfennige. Zu einer Zehntelmark gehören also 10 Hundertstelmark. (Aus der Beziehung des Pfennigs zum Zehnpfenniger wird die Schreibweise des Pfennigs hergeleitet.) Das Verhältnis des Pfennigs zum Zehnpfenniger wird durch Verwandlungsaufgaben befestigt. Mit Leichtigkeit wird festgestellt, daß die Hundertstelmark in der 2. Stelle rechts vom

Komma stehen müssen, und vielfache Übung befestigt das Verstandene. Die Kinder gewöhnen sich, die rechts vom Komma stehenden Ziffern als Zehntel- und Hundertstelmark aufzufassen, und der Hinweis auf Zehnpfenniger und Pfennige genügt, die in der ersten Zeit etwa wieder unklar werdenden Vorstellungen sofort wieder aufzufrischen.

Später verwandelt das Kind Zehnpfenniger und Pfennige in Pfennige, d. h. Zehntelmark und Hundertstelmark in Hundertstelmark, und liest alles als Hundertstelmark, bzw. Pfennige, wie es die Vorschrift der Behörde und wie es das Leben fordert. — Die Überleitung auf hl und l ist nun leicht, desgleichen auf m und cm. Hieran kann dann auch der Begriff Tausendstelmeter angeschlossen werden, wenn das Millimeter als Teil des Meters betrachtet wird, während die Schreibweise aus der Vergleichung des Millimeters und des Centimeters folgt. Durch die Verwandlung der Centimeter in Millimeter und dieser in Tausendstelmeter lernen wir 23 cm und 5 mm als 0,235 m auffassen, lesen und schreiben. Nun lassen sich auch die Gramm als Teile des Kilogramms und die Meter als Teile des Kilometers schreiben und lesen.

Ist so die Klarheit der Auffassung und die Sicherheit des Verständnisses vollständig erzielt, dann werden auch die vier Grundrechnungsarten keine Schwierigkeiten mehr bereiten. Ich lasse schriftlich rechnen: 5 Hundertstelmark und 7 Hundertstelmark sind 12 Hundertstelmark, das sind 1 Zehntelmark und 2 Hundertstelmark, die 2 Hundertstelmark schreibe ich hin, und die Zehntelmark zähle ich zu den Zehntelmark usw. Dies ist ebensowenig zu schwer, als wenn $\frac{49}{7}$ in Ganze sollen verwandelt werden. Sollte aber das pädagogische Gewissen sich immer noch hieran stoßen, so mag der Betreffende ruhig mit Pfennigen und Zehnpfennigen rechnen lassen, nur sind die Mark keine Hundertpfenniger, sondern sie sind und bleiben die Einer, d. h. Mark.

Die Dezimalbruchrechnung hat durch das sogenannte neue Maß und Gewicht sich eine Heimat in der Schule erworben und sie wird diese ihre Stellung nicht wieder verlieren. Dazu brauchen wir keine Gesetze über periodische und nichtperiodische Dezimalbrüche, sondern nur eine kleine Erweiterung resp. Vertiefung der oben angeführten Vorbereitung. Aber gerade ihre Wichtigkeit verlangt auch diese Vorbereitung. Man mag sich sträuben, wie man will, die Zehntel und Hundertstel sind notwendig geworden und werden es bleiben, so lange unsere Umgebung noch 10 und 100 Einheiten zu einer neuen Einheit zusammenfaßt.

24. Die vier Grundrechnungsarten mit mehrfach benannten Zahlen.

Der Einführung der mehrfach benannten Zahlen folgt die Verwertung derselben in den vier Grundrechnungsarten. Die Aufgaben führen uns mitten in das Leben hinein und es ist deshalb besonders darauf zu achten, daß die Aufgaben auch dem Leben, d. i. dem Anschauungskreise der Kinder entnommen sind. Zusammenzählen, Abziehen, Vervielfachen und Teilen werden nacheinander behandelt. Kopf- und Tafelrechnen sind von einander geschieden, doch schließt das Tafelrechnen sich eng an das Kopfrechnen an.

...führung (Darbietung) einer neuen Grundrechnungsart er-
...ten Aufgaben; zur Übung (Vertiefung) werden viele
...benannten Zahlen ohne Berücksichtigung von Sach-
...eres Gewicht aber ist auf die Anwendung
... ...gt worden, daß diese angewandten Auf-
...g entlasten, daß einfache Formen der sogenannten
...arten hier schon gelöst werden. So werden Tara-
...nung und Zinsrechnung in ihrer einfachsten Gestalt,
...stimmung, herangezogen. Hierdurch werden nicht nur
... die einfacheren Verhältnisse des praktischen Lebens einge-
... die zukünftige Behandlung der schwierigen Formen dieser
...arten wird wesentlich erleichtert. Dabei ist darauf zu achten,
...einer Gruppe nicht die verschiedensten Sachverhältnisse bunt durch-
...er auftreten, sondern ein Sachgebiet wird eingeführt, dies aber
... an einer ausreichenden Anzahl von Aufgaben zur unbedingten Klar-
... und Sicherheit gebracht. Dagegen wird es bei Wiederholungen an-
...acht sein, ab und zu einmal Aufgaben aus verschiedenen Sachgebieten
...heinander zu geben, damit das Beurteilungsvermögen der Kinder ge-
...tigt wird.

Dem Kopfrechnen werden die leichten, dem Tafelrechnen die schwereren Aufgaben zugewiesen. Die Aufgaben werden innerhalb jeder Grundrechnungsart nach dezimal- und nichtdezimal-geteilten Größen gegliedert, und innerhalb jeder Unterabteilung sind selbstverständlich die leichtesten Aufgaben voran zu stellen. Die im praktischen Leben am häufigsten vorkommenden Arten der mehrfach benannten Zahlen, z. B. Mark und Pfennige, sind vorwiegend zu berücksichtigen. Heranzuziehen sind auch die Bruchteile der Größen, die sich in niederen Einheiten darstellen lassen, wie z. B.: Zähle zusammen $3\frac{3}{4}$ ℳ und $1\frac{1}{5}$ ℳ. Der Schüler rechnet $3\frac{3}{4}$ ℳ sind 3 ℳ 75 Pf., $1\frac{1}{5}$ ℳ sind 1 ℳ 20 Pf. und zählt nun diese Zahlen in der bekannten Weise zusammen. Bei dem Abziehen gibt man gern Aufgaben, bei denen die Vollzahl eine größere Münze ist. So läßt man Mark und Pfennige von einem Zehn- oder Zwanzigmarkstück, von einem Fünfzig- oder Hundertmarkschein abziehen. Bei dem Vervielfachen und Teilen werden auch hier die Zahlenfamilien der Einerzahlen ganz besonders berücksichtigt.

Die schulgemäßen Lösungsformen gleichen denen bei dem Rechnen mit unbenannten Zahlen. Die Kinder lösen Aufgaben der vier Grundrechnungsarten in folgender Weise:

1. Die Aufgabe heißt: Zähle zusammen 6 ℳ 45 Pf. und 7 ℳ 83 Pf.! 7 ℳ 83 Pf. sind 7 ℳ, 80 Pf. und 3 Pf.; 6 ℳ 45 Pf. und 7 ℳ sind 13 ℳ 45 Pf., und 80 Pf. sind 14 ℳ 25 Pf., und 3 Pf. sind 14 ℳ 28 Pf.; also sind 6 ℳ 45 Pf. und 7 ℳ 83 Pf. 14 ℳ 28 Pf.

2. Die Aufgabe heißt: Wieviel sind 100 ℳ weniger 43 ℳ 58 Pf.? 43 ℳ 58 Pf. sind 40 ℳ, 3 ℳ, 50 Pf. und 8 Pf.; 100 ℳ weniger 40 ℳ sind 60 ℳ, weniger 3 ℳ sind 57 ℳ, weniger 50 Pf. sind 56 ℳ 50 Pf., weniger 8 Pf. sind 56 ℳ 42 Pf.; also sind 100 ℳ weniger 43 ℳ 58 Pf. 56 ℳ 42 Pf.

3. Die Aufgabe heißt: Wieviel sind 8mal 4 hl 36 l? 4 hl 36 l sind 4 hl, 30 l und 6 l; 8mal 4 hl sind 32 hl; 8mal 30 l sind 240 l oder 2 hl 40 l, zu 32 hl sind 34 hl 40 l; 8mal 6 l sind 48 l, zu 34 hl 40 l sind 34 hl 88 l; also sind 8mal 4 hl 36 l 34 hl 88 l.

4. Die Aufgabe heißt: Wie groß ist der 5. Teil von 416 ℳ 95 Pf.? 416 ℳ 95 Pf. sind 400 ℳ, 15 ℳ, 1 ℳ 50 Pf. oder 150 Pf. und 45 Pf.; der 5. Teil von 400 ℳ ist 80 ℳ; der 5. Teil von 15 ℳ ist 3 ℳ, zu 80 ℳ ist 83 ℳ; der 5. Teil von 150 Pf. ist 30 Pf., zu 83 ℳ ist 83 ℳ 30 Pf.; der 5. Teil von 45 Pf. ist 9 Pf., zu 83 ℳ 30 Pf. ist 83 ℳ 39 Pf.; also ist der 5. Teil von 416 ℳ 95 Pf. 83 ℳ 39 Pf.

Wenn auch bei dem Tafelrechnen die Ansatzformen die Übersicht erleichtern, so hüte man sich doch, zu schwere und unpraktische Aufgaben, d. h. zu große Zahlen und zu vielsortige Größen zu geben. Mehr als zweisortige Zahlen sollten bei den dezimal geteilten Größen überhaupt nie vorkommen. Erstens entstehen dadurch Rechenaufgaben mit sovielstelligen Zahlen, daß ihre Lösung nicht zum Volksschulrechnen gehört, und dann sind derartige Aufgaben direkt unpraktisch; denn wenn z. B. nach km gemessen wird, sind cm unpraktisch, und wenn Längen andrerseits nach cm bestimmt werden, dürften km zu den großen Ausnahmen gehören. Bei dem schriftlichen Teilen können zum Schluß Aufgaben auftreten, bei denen sich selbst nach der Verwandlung in die kleinsten Sorten Reste ergeben. Man gewöhne den Schüler hier schon daran, daß er durch nochmaliges Teilen festzustellen versucht, ob der Teil $\frac{1}{2}$ der kleinsten Größe und mehr, oder ob er weniger als $\frac{1}{2}$ derselben beträgt. Die Schüler lernen, daß im ersten Falle der Anteil um eine Einheit der kleinsten berechneten Größe erhöht wird und daß im zweiten Falle der Anteil gestrichen wird. Dies ist die praktische Vorbereitung der später so wichtigen Abkürzung der Dezimalbrüche. Reihenaufgaben werden bei dem Kopf- und bei dem Tafelrechnen verwertet, bei dem letzteren werden sie vorwiegend als Kopfrechnen auf der Tafel geübt werden.

25. Teilen und Enthaltensein.

Das Dividieren ist die Umkehrung der Multiplikation. Aus dem Produkt und einem der Faktoren ist der andere zu suchen. Könnten die beiden Faktoren als gleichwertig angesehen werden, wie es meistens bei der Vervielfachung algebraischer Größen geschieht, so würde sich dieselbe Rechnungsart ergeben, ob ich das Vielfache durch den einen oder durch den andern Faktor teilte ($ab : a = b$ und $ab : b = a$). Dasselbe würde auch eintreten, wenn wir nur mit unbenannten Zahlen rechneten ($3 . 4 = 12$, $12 : 3 = 4$ und $12 : 4 = 3$); wir erhalten also 2 Aufgaben gleicher Art. Anders ist es bei dem Vervielfachen benannter Zahlen. Die Wiederholungszahl muß stets eine unbenannte Zahl sein (Zusammenhang des Vervielfachens mit dem Zusammenzählen), die Grundzahl ist eine benannte Zahl. Hier sind die Faktoren nicht gleichwertig, es müssen sich demnach als Umkehrungen des Vervielfachens auch zwei Aufgaben, aber verschiedener Art, ergeben. 5 . 4 ℳ = 20 ℳ. Diese 20 ℳ sind aus

5.4 ℳ zusammengesetzt worden. (5 Haufen, auf jedem 4 ℳ, sind zusammengeschoben worden.) Es liegt nahe, 20 ℳ in derselben Weise wieder zu zerlegen, dann zerfallen sie in 5 gleiche Teile, jeder Teil beträgt 4 ℳ. ($\frac{1}{5}$ von 20 ℳ = 4 ℳ.) Würden wir anderseits 4 ℳ mit 20 ℳ dahin vergleichen, wie oft wir die ersten von den letzen wegnehmen könnten, so würde sich ergeben, daß 4 ℳ von 20 ℳ 5 mal weggenommen werden können (4 ℳ sind in 20 ℳ 5 mal enthalten). Wären 20 ℳ aus 2.10 ℳ entstanden, so würde die angeschlossene Zerlegung 2 gleiche Teile zu je 10 ℳ ergeben ($\frac{1}{2}$ von 20 ℳ = 10 ℳ) und bei der Vergleichung der Mark würden wir finden, daß 10 ℳ in 20 ℳ 2 mal enthalten sind. So auch mit ähnlichen Aufgaben. Die Beziehung des Vielfachen zur Wiederholungszahl führt auf eine Zerlegungs- oder Teilungsaufgabe, die zur Grundzahl auf ein Messen der Zahlen, auf eine Vergleichungs- oder Enthaltenseins-Aufgabe.

Beide Arten der Division kommen in der Praxis vor. Wenn 5 m Band 75 Pf. kosten, so kostet 1 m den 5. Teil von 75 Pf. = 15 Pf.; wüßte ich aber, daß 1 m Band 15 Pf. kostet, so würde ich für 75 Pf. so viel mal 1 m kaufen können, als 15 Pf. in 75 Pf. enthalten sind. Eine Vergleichung dieser beiden Aufgaben ergibt, daß 75 Pf. bei beiden die Teilungszahl ist, während der Teiler bei der Teilungsaufgabe 5 und die Maßzahl bei der Enthaltenseinsaufgabe 15 Pf. heißt. Da ich nun umgekehrt die 5 nicht von Pfennigen wegnehmen und ebenso den 15 Pfennigsten Teil nicht nehmen kann, so bedingt die unbenannte Zahl (der Teiler) also die Teilungsaufgabe, die benannte Zahl (Maßzahl) aber die Enthaltenseinsaufgabe. Wenn nun der Lehrer bei allen seinen Aufgaben streng auf die richtige Lösungsform hält, und die Kinder an vielen Aufgaben die betreffende Rechnungsart erkannt oder bestimmt haben, so wird der so häufig vorkommde Fehler der Verwechslung dieser beiden Divisionsformen auch für die Zukunft vermieden werden. Mehr bedarf unsere Volksschule nicht.

Wann und in welcher Ausdehnung soll nun dieser Unterschied zwischen Teilen und Enthaltensein eingeführt werden? — Schon früher ist darauf hingewiesen worden, daß in den Zahlenkreisen bis 10, bis 20, bis 100, bis 1000 und in dem höheren Zahlenkreise nur eine Divisionsform, und zwar das Teilen, als besondere Rechnungsart geübt werden soll. Alle Aufgaben, die der Lehrer stellt, müssen also zunächst Teilungsaufgaben sein. Dies führt zu keiner unlogischen Umkehrung der Multiplikationsform, da den Schülern die Gleichwertigkeit der Faktoren bekannt ist und sie 56 mit derselben Sicherheit und Geläufigkeit sowohl durch 8 als durch 7 teilen. Wie aber bei den andern Rechnungsarten nach den Hauptfragen auch Aufgaben in anderer Ausdrucksform gestellt werden müssen, so kann auch ab und zu, wenn das Teilen genügend befestigt ist, eine auf Enthaltensein hinausgehende Aufgabe gelöst werden; eine Vergleichung z. B. von 6 und 12, 6 und 18 usw. soll also keineswegs ausgeschlossen sein, doch sollen diese Aufgaben nicht die Bedeutung einer besonderen Rechnungsart beanspruchen. — Im höheren Zahlenkreise könnte als Vorbereitung für das beim Rechnen mit mehrfach benannten Zahlen einzuführende Enthaltensein auch ganz kurz das Enthaltensein erwähnt werden, doch nicht mit zwei un-

benannten Faktoren, sondern als Umkehrung einer Vervielfachungsaufgabe, bei der der eine Faktor eine benannte Zahl ist. Die Kinder beantworten unter Leitung des Lehrers die direkt gestellten Aufgaben, ohne daß sie zum Bewußtsein des Unterschiedes beider Formen kommen. Diese Klarheit wird aber angestrebt bei dem Rechnen mit mehrfach benannten Zahlen, wie oben ausgeführt worden ist, doch gebührt der Vorrang immer dem praktischen Teilen. Das Teilen ist die schulgemäße Lösung, das Messen ist die besondere Auflösungsweise.

Zu weit würde es führen, wenn wir in der Volksschule die selbständige Anwendung der sogenannten drei Teilungs- und drei Enthaltenseinsfragen und ein klares Verständnis der Beziehungen derselben zu einander verlangen wollten. Der formale Zweck des Rechenunterrichts kann auch ohne systematische Behandlung dieser 6 Fragen erreicht werden, während durch diese Behandlung die Gefahr entstehen würde, daß wir vor lauter Theorie das eigentliche Rechnen versäumen könnten. Die beiden Hauptfragen sind: Wie groß ist der 3. Teil von 18 ℳ, und wie oft sind 6 ℳ in 18 ℳ enthalten. Die andern Fragen: Von welcher Anzahl von ℳ sind 6 ℳ der 3. Teil? Der wievielte Teil sind 6 ℳ von 18 ℳ? und: Welche Anzahl von ℳ sind in 18 ℳ 3mal enthalten? In welcher Anzahl von ℳ sind 6 ℳ 3mal enthalten? sind nicht direkte Aufgaben, sondern sie müssen erst durch mehrfache Schlüsse in Enthaltenseins-, Teilungs- und Vervielfachungsaufgaben umgewandelt werden. Sie haben für die Volksschule denselben Wert, wie algebraische Aufgaben, und als solche können sie auch behandelt werden.

Auch hier ist es der klare und bestimmte Lehrer, der die Schüler auf den richtigen Weg leiten und sie auf demselben erhalten muß. Leider findet man diese Klarheit und Bestimmtheit nicht überall; mit tadelnswerter Lauheit begnügt man sich, bei der Division die Lösung in verschwommener Form und in unlogischer Weise geben zu lassen und das „Hineindividieren“ hört man noch oft genug; kg läßt man ohne Anstoß in ℳ enthalten sein, und 78 ℳ : 13 ist 6mal; man meint eben, wenn nur das Resultat richtig ist, der Weg mag unklar und unlogisch sein. Der gerade Weg ist auch hier nicht nur der nächste, sondern auch der leichteste und erfolgreichste.

Über die schriftliche Verwendung des Enthaltenseins vergleiche III, Abschnitt 17.

26. Die Durchschnittsrechnung.

In den allgemeinen Bestimmungen vom 15. Oktober 1872 sind dem Pensum der Mittelstufe „angewandte Aufgaben aus der Durchschnittsrechnung“ zugewiesen worden. Die früher nur gebräuchliche Regeldetri verbindet das Vervielfachen mit dem Teilen, die einfachen Aufgaben der Durchschnittsrechnung tun dasselbe mit dem Zusammenzählen und dem Teilen. Wie die Regeldetri-Aufgaben in den sachlichen Verhältnissen begründet sind, so auch die Aufgaben der Durchschnittsrechnung; sie sind daher auch diesen Sachgebieten zu entnehmen. — Die Einführung

ann vor und nach der einfachen Regeldetri im
mehrfach benannten Zahlen erfolgen.
n Entwicklung ab, so wird es sich
der Regeldetri zu nehmen. Die
der alte Grundsatz für die
ren, dieses Voranstellen verlangt.
zunächst der Begriff „Durchschnitts=
spiel wird vielleicht gegeben: Auf
Tage 4,80 ℳ, am 2. Tage 3,20 ℳ aus.
viel hat er an beiden Tagen ausgegeben?
Tage ausgegeben haben, wenn er an einem
als am anderen Tage? Mehrere solcher
Sachgebiete werden gegeben und in gleicher
Kinder werden durch die Fragen des Lehrers ge=
beiden Tagen geleisteten Ausgaben zusammenzuzählen
Summe die Hälfte zu suchen. Hand in Hand mit
nnen auch Vorübungen zur Entwicklung des Begriffs
" an kleinen Zahlen angestellt werden. Man schreibt
die Zahlen von 11 bis 17 hin = 11, 12, 13, 14, 15, 16,
erste und die letzte Zahl werden gestrichen, so daß 12 und 16
en Zahlen sind; hierauf werden diese beiden gestrichen, dann
15, so daß 14 übrig bleibt. 14 steht in der Mitte zwischen 11
ist also die Mittelzahl beider Zahlen, d. h., sie ist um 3 größer
und um 3 kleiner als 17. Es werden noch mehrere Mittelzahlen
t. Für Mittelzahl sagt man auch Durchschnittszahl. Durch
leichung mehrerer Durchschnittszahlen mit der Summe der ersten und
ten Zahl ergibt sich, daß die Durchschnittszahl zweier Zahlen gleich der
fte der Summe beider Zahlen ist. An vielen Beispielen wird dies geübt.
ie wird man also die Durchschnittsausgabe bei einer zweitägigen Reise
halten? Auch einfache Brüche dürfen sich in den Resultaten ergeben.

Soll die Durchschnittszahl zwischen mehr als 2 Zahlen gesucht werden, so werden wir das soeben Gelernte verwenden und zunächst nicht zwei, sondern drei Zahlen zusammenzählen und durch 3 teilen. Auch hier sind die Aufgaben, welche die Durchschnittsausgabe eines Tages bei einer dreitägigen (oder später auch mehrtägigen) Reise aufsuchen lassen, sehr zu empfehlen. Wenn z. B. bei einer dreitägigen Reise B am 1. Tage 6,40 ℳ, am 2. Tage 5,20 ℳ und am 3. Tage 7 ℳ ausgegeben hat, so hat er im ganzen 18,60 ℳ ausgegeben. Wenn diese 18,60 ℳ zu gleichen Teilen auf die 3 Tage verteilt würden, so würde auf einen Tag die durchschnittliche Ausgabe kommen. Diese wird also gefunden, wenn die Summe von 6,40 ℳ + 5,20 ℳ + 7 ℳ = 18,60 ℳ durch 3 geteilt wird. 18,60 ℳ : 3 = 6,20 ℳ. Aus vielen Beispielen wird sich die Regel ergeben: **Wir finden die Durchschnittszahl von mehreren Größen, wenn wir die Summe derselben durch die Anzahl der Größen teilen.**

Diese Regel wird auch ihre Anwendung finden, wenn bei zusammengesetzteren Aufgaben das Vervielfachen mit herangezogen wird. Beispiel:

Eine Bauersfrau verkauft am Mittwoch 7 Stück Butter zu je 0,70 ℳ und 5 Stück zu 0,58 ℳ das Stück. Wie viel hat sie im Durchschnitt für 1 Stück Butter gelöst? 7 Stück Butter zu 0,70 ℳ das Stück kosten 4,90 ℳ, 5 Stück zu 0,58 ℳ kosten 2,90 ℳ. 12 Stück Butter kosten also 4,90 ℳ + 2,90 ℳ = 7,80 ℳ; folglich kostet 1 Stück Butter im Durchschnitt 0,65 ℳ. Das Vervielfachen ist auch hier das verkürzte Zusammenzählen gleicher Posten.

Die Durchschnittsrechnung ist nun nicht nur auf diese Rechenstufe beschränkt. So werden die praktischen Aufgaben zur Bruchrechnung auf der Anwendungsstufe derselben außer Regelbetri-Aufgaben auch Aufgaben aus der Durchschnittsrechnung bringen. Die Lösung dieser Aufgaben geschieht auch dort in der soeben angegebenen Form.

Auch bei den späteren sogenannten bürgerlichen Rechnungsarten findet die Durchschnittsrechnung vielfache Verwendung. Wenn z. B. ein Kaufmann 100 kg von einer Ware einkauft und von diesen $\frac{1}{4}$ mit 15%, $\frac{1}{5}$ mit 25%, $\frac{1}{2}$ mit 18% und den Rest mit 12% Gewinn verkauft, so wird er sich seinen Durchschnittsgewinn berechnen wollen. — 1. Lösung. Wir nehmen einen Gesamtpreis, vielleicht 100 ℳ an. Er gewinnt also an $\frac{1}{4}$ von 100 ℳ, d. i. an 25 ℳ, 15%, also 3,75 ℳ; an $\frac{1}{5}$ von 100 ℳ, also an 20 ℳ, gewinnt er 25%, also 5 ℳ; an $\frac{1}{2}$ von 100 ℳ, d. i. an 50 ℳ, gewinnt er 18%, also 9 ℳ, und an dem Reste, also an $\frac{1}{20}$ von 100 ℳ, an 5 ℳ, gewinnt er 12% = 0,60 ℳ. Der Gewinn an 100 ℳ setzt sich also zusammen aus 3,75 ℳ + 5 ℳ + 9 ℳ + 0,60 ℳ, er beträgt demnach 18,35 ℳ. Folglich gewinnt er im Durchschnitt 18,35% ($18\frac{7}{20}$%). 2. Lösung. Gewinnt er an $\frac{1}{4}$ der Ware 15%, so würde derselbe Gewinn, auf die ganze Ware bezogen, nur $3\frac{3}{4}$% ausmachen. (An Zahlen-Beispielen leicht klar zu machen.) Gewinnt er an $\frac{1}{5}$ der Ware 25%, so entspricht dies einem Gewinn von 5% an der ganzen Ware, desgleichen entsprechen 18% auf $\frac{1}{2}$ der Ware 9% auf die ganze Ware, und 12% an $\frac{1}{20}$ der Ware sind gleich $\frac{3}{5}$% an der ganzen Ware; folglich gewinnt er beim Verkauf der ganzen Ware $3\frac{3}{4}$% + 5% + 9% + $\frac{3}{5}$% = $18\frac{7}{20}$%. — Für die meisten unserer Volksschulen ist nur der 1. Weg anzuraten; nur ausnahmsweise dürfte in den mehrklassigen Schulen die viel abstraktere 2. Form gewählt werden.

Auch bei der Zinsrechnung könnten der Durchschnittsprozentsatz, die Durchschnittszinsen auf ein Vierteljahr usw. und bei der Rabattrechnung der Durchschnittsbetrag vom Rabatt gesucht werden. Wenn bei der Terminrechnung der mittlere Zahlungstermin gesucht wird, so ist dies Durchschnittsrechnung, und ein großer Teil der Mischungsrechnungsaufgaben gehört ebenfalls zur Durchschnittsrechnung.

27. Die einfache Regelbetri.

Bei dem Rechnen mit mehrfach benannten Zahlen folgt in fast allen Rechenlehrbüchern auf die vier Grundrechnungsarten die einfache Regelbetri. Ebenso allgemein ist die Gliederung dieser in 3 Hauptabteilungen: 1. Schluß von der Einheit auf die Mehrheit; 2. Schluß von der Mehrheit auf die

Mehrheit auf die Mehrheit. Bei jeder dieser
wieder unterschieden das direkte (gerade)
— Bei der Anordnung der Auf-
ten Zahlen aber ergibt sich, daß
r genommen werden können und
wollen z. B. vervielfachen! Da aber
nicht mehr allein die Zahlenkraft und
, wie bei dem Rechnen mit unbenannten
erlangte Fertigkeit in den Dienst des Lebens
Aufgaben, wie 3mal 1 ℳ 95 Pf., nicht am
biete muß sich die Notwenigkeit des Ver-
mit 3 ergeben. 3 Kinder sollen je 1 kg Kaffee
die 3 Kinder zu bezahlen, wenn 1 kg Kaffee 1,95 ℳ
ung ergibt sehr bald, daß 3 . 1,95 ℳ bezahlt werden
chen Beispielen folgen die Regeln: Je mehr Ware, desto
vielmal soviel Ware, sovielmal soviel Geld. Aus anderen
ergeben sich die andern bei den Regelbetri-Aufgaben zu
Verhältnisse zwischen Arbeitern und Arbeit, Arbeitern und
Alle diese Aufgaben sind Vervielfachungsaufgaben. Wir geben
abstrakte, sondern angewandte Vervielfachungsaufgaben, oder
Aufgaben mit geradem Verhältnis, bei denen von einer Einheit
Mehrheit geschlossen wird. Es soll auch an dieser Stelle er-
werden, daß wir diese zum Vervielfachen führenden Sachgebiete
in einer Stunde neben- oder miteinander, sondern langsam nach
der einführen und jede einzelne Erkenntnis durch Übung und An-
dung befestigen und vertiefen. Die betreffenden Aufgaben ergeben sich
leicht durch kleine Veränderungen an einem oder dem andern Faktor.
Auch Aufgaben, bei denen nicht die Eins die Einheit ist, sind heran-
zuziehen. Die Schüler lernen sehr bald von 5 ℳ auf 15 ℳ oder von
1 l auf 20 l direkt schließen, und sie erzielen hierdurch keinen kleinen Gewinn
für ihr praktisches Rechnen. Dagegen wird kaum Zeit sein, hier beim
Vervielfachen den Schluß von der Mehrheit auf die Einheit, der zum
Vervielfachen führt (umgekehrtes Verhältnis), heranzuziehen und genügend
zu üben.

In derselben Weise sind die Teilungsaufgaben dieser Stufe aus den Regelbetri-Aufgaben herzuleiten. Bei geradem Verhältnisse ist es der Schluß von der Mehrheit zunächst auf die Eins, dann auf die Einheit, der zur Teilungsaufgabe führt; der zu derselben Grundrechnungsart führende Schluß von der Einheit auf die Mehrheit bei umgekehrtem Verhältnis wird hier ebenfalls nicht berührt.

Der Einwand, daß diese Einführung verfrüht sei, ist hinfällig. Zunächst würde ohne die Verwendung dieser Sachverhältnisse keine angewandte Vervielfachungs- oder Teilungsaufgabe möglich sein; auch sind schon auf den früheren Stufen bei allen angewandten Aufgaben dieser Grundrechnungsarten derartige Schlußformen geübt werden; dann handelt es sich nur um wenige Monate, daß diese Einführung früher geschieht, als es sonst wohl üblich war, und endlich sind die herangezogenen

Verhältnisse so einfache und dem Kindesgeiste naheliegende, daß Schwierigkeiten sich überhaupt nicht ergeben, dagegen sind die Vorteile nicht zu verkennen. Die abstrakten Aufgaben werden ersetzt durch dem Leben entnommene Aufgaben, es ist also Heranziehung von berechtigtem Stoffe; daneben wird Zeit erspart; denn es bleiben nun als Regeldetri-Aufgaben nur noch die aus der Verbindung der beiden behandelten Arten entstandenen Aufgaben (Schluß von der Mehrheit auf die Mehrheit) und die Regeldetri mit umgekehrtem Verhältnis übrig. Die selbständige Auffassung und Verwertung der verschiedenen Regeldetrischlußformen stellt eine recht bedeutende Aufgabe an unsere Schüler, und der Rechenlehrer, der hierin Klarheit und Sicherheit erzielt hat, gibt den Schülern nicht nur Rechenfertigkeit mit auf den Lebensweg. Jede Aufgabe zerfällt in zwei bekannte Aufgaben, so daß auch hier sich Verständnis und Fertigkeit sehr leicht erreichen lassen. (Über die Auswahl von Aufgaben vergleiche noch II, Abschnitt 2.)

In den Tafelrechenheften des Verfassers ist den Regeldetri-Aufgaben ein recht knapper Raum zugemessen worden. Nachdem wenige Wiederholungsaufgaben aus dem Vervielfachen und Teilen gegeben sind und hierbei besonders das umgekehrte Verhältnis berücksichtigt wurde, kommt nur eine Gruppe von Aufgaben, in denen von der Mehrheit auf eine Mehrheit geschlossen wird. Diese Aufgaben finden die Berechtigung ihres Auftretens weniger in den Anforderungen des Lebens, als in den Anforderungen, die die Schule an die geistige Bildung der Schüler stellen muß. Im Leben wird meistens von der Einheit auf eine Mehrheit geschlossen; weniger oft kommt schon der Schluß von der Mehrheit auf die Einheit vor; am seltensten aber wird verlangt, von der Mehrheit auf die Mehrheit zu schließen. Andernfalls sind die letzteren Aufgaben ganz prächtige Wiederholungsaufgaben für Vervielfachen und Teilen, sie stellen an die Selbständigkeit der Schüler höhere Ansprüche, und deshalb möchte ich sie wohl beschränken, aber nicht entbehren.

Als schriftliche Lösungsform dieser Regeldetri-Aufgaben ist jetzt wohl allgemein die des Bruchsatzes angenommen worden. Der Proportionssatz, der sich mit großer Zähigkeit zu behaupten suchte und wohl hier und da noch in unserer Volksschule auftritt, führte zum Mechanisieren, während der Bruchsatz stets logische Folgerungen verlangt. Die Nebeneinanderstellung der Faktoren wird bei dem Vervielfachen eingeführt, desgl. die Unterstellung des Teilers unter den Strich bei dem Teilen. Wenn 6 kg 7,50 ℳ kosten, so kostet 1 kg $\frac{7{,}50\ ℳ}{6}$ (gelesen und gerechnet 7,50 ℳ geteilt durch 6). Beides wird nun bei dem Schluß von der Mehrheit auf die Mehrheit vereinigt. Es ergeben sich dann folgende Teile der ausführlichen Lösung:

1. Aufgabe: Wieviel kosten 15 l Milch, wenn 8 l mit 1,28 ℳ bezahlt werden?

2. Ansatz:

8 l	kosten	1,28 ℳ
15 „	kosten	? „

3. Auflösung:

8 l k. 1,28 ℳ . 15
1 = = 8
15 =

4. Ausrechnung:

1,28 ℳ
15
640
128
19,20 ℳ : 8 = 2,40 ℳ
16
32
32

Da die Lösungsform vorbereitet ist, braucht das Resultat $\frac{1,28\ ℳ}{8}$ nicht erst ausgerechnet zu werden. **Beachtet muß vielmehr die schon früher gestellte Forderung werden, daß bei der Schlußvereinigung stets zuerst vervielfacht und dann erst geteilt wird.** Zur Abkürzung des Verfahrens dient bald die Zusammenziehung des Ansatzes mit der Auflösung, auch wird die durch das östreichische Subtrahieren verkürzte Divisionsform angewendet werden. Die schulgemäße Lösung der obenstehenden Aufgabe würde dann folgende sein:

1. Aufgabe: Wieviel usw.

2. Ansatz und Auflösung:

8 l k. 1,28 ℳ . 15
1 = = 8
15 = =

3. Ausrechnung:

1,28 ℳ
15
640
128
19,20 ℳ : 8 = 2,40 ℳ
32

Das hier gelöste Beispiel gibt Veranlassung, einer weiteren Abkürzung bei dem praktischen Vervielfachen zu gedenken. Es handelt sich hierbei um das schriftliche Vervielfachen mit zweistelliger Wiederholungszahl, die entweder in der Einer- oder in der Zehnerstelle eine „Eins" hat. Man erspart den Ansatz und eine Reihe, wenn man die Grundzahl als Einfaches oder Zehnfaches von sich selbst ansieht und im 1. Falle das durch die Zehnerzahl erhaltene Vielfache durch Einrücken, im 2. Falle das durch die Einerzahl bedingte Vielfache durch Hinausrücken darunter schreibt. Bei dem oben berechneten Beispiele würde die abgekürzte Lösungsform sein

128
640
19,20 ℳ

Verhältnisse so einfache und dem Kindesgeiste naheliegende, daß Schwierigkeiten sich überhaupt nicht ergeben, dagegen sind die Vorteile nicht zu verkennen. Die abstrakten Aufgaben werden ersetzt durch dem Leben entnommene Aufgaben, es ist also Heranziehung von berechtigtem Stoffe; daneben wird Zeit erspart; denn es bleiben nun als Regeldetri-Aufgaben nur noch die aus der Verbindung der beiden behandelten Arten entstandenen Aufgaben (Schluß von der Mehrheit auf die Mehrheit) und die Regeldetri mit umgekehrtem Verhältnis übrig. Die selbständige Auffassung und Verwertung der verschiedenen Regeldetrischlußformen stellt eine recht bedeutende Aufgabe an unsere Schüler, und der Rechenlehrer, der hierin Klarheit und Sicherheit erzielt hat, gibt den Schülern nicht nur Rechen fertigkeit mit auf den Lebensweg. Jede Aufgabe zerfällt in zwei b kannte Aufgaben, so daß auch hier sich Verständnis und Fertigkeit se leicht erreichen lassen. (Über die Auswahl von Aufgaben vergleiche m II, Abschnitt 2.)

In den Tafelrechenheften des Verfassers ist den Regeldetri-Aufga ein recht knapper Raum zugemessen worden. Nachdem wenige Wie holungsaufgaben aus dem Vervielfachen und Teilen gegeben sind hierbei besonders das umgekehrte Verhältnis berücksichtigt wurde, fo nur eine Gruppe von Aufgaben, in denen von der Mehrheit auf Mehrheit geschlossen wird. Diese Aufgaben finden die Berechtigung Auftretens weniger in den Anforderungen des Lebens, als in den forderungen, die die Schule an die geistige Bildung der Schüler muß. Im Leben wird meistens von der Einheit auf eine Mehrh schlossen; weniger oft kommt schon der Schluß von der Mehrheit Einheit vor; am seltensten aber wird verlangt, von der Mehrh die Mehrheit zu schließen. Andernfalls sind die letzteren Aufgab prächtige Wiederholungsaufgaben für Vervielfachen und Teilen, si an die Selbständigkeit der Schüler höhere Ansprüche, und deshal ich sie wohl beschränken, aber nicht entbehren.

Als schriftliche Lösungsform dieser Regeldetri-Aufgaben ist allgemein die des Bruchsatzes angenommen worden. Der Propo der sich mit großer Zähigkeit zu behaupten suchte und wohl hi noch in unserer Volksschule auftritt, führte zum Mechanisieren, der Bruchsatz stets logische Folgerungen verlangt. Die Neb stellung der Faktoren wird bei dem Vervielfachen eingeführt, Unterstellung des Teilers unter den Strich bei dem Teilen.

7,50 ℳ kosten, so kostet 1 kg $\frac{7{,}50\ ℳ}{6}$ (gelesen und gerechnet 7, durch 6). Beides wird nun bei dem Schluß von der Meh Mehrheit vereinigt. Es ergeben sich dann folgende Teile lichen Lösung:

1. Aufgabe: Wieviel kosten 15 l Milch, wenn 8 l mit zahlt werden?

2. Ansatz: 8 l kosten 1,28 ℳ
15 „ kosten ? „

3. **Zusammenzählen.**
 a) Leichte Einführungsaufgaben (Gr. 26).
 b) Übungsaufgaben (Gr. 27).
 c) Abgekürztes Zusammenzählen (Gr. 27a).
4. **Abziehen.**
 a) Leichte Einführungsaufgaben (Gr. 28).
 b) Übungsaufgaben (Gr. 29).
 c) Abgekürztes Abziehen (Gr. 29a).
5. **Vervielfachen.**
 a) Leichte Einführungsaufgaben (Gr. 30).
 b) Die Wiederholungszahl ist eine ganze Zahl (Gr. 31).
 c) Die Wiederholungszahl ist eine Dezimalzahl (Gr. 32).
 d) Abgekürztes Vervielfachen (Gr. 32a).
6. **Teilen.**
 a) Leichte Einführungsaufgaben (Gr. 33).
 b) Ganze Zahl durch ganze Zahl (Arten der Dezimalbrüche) (Gr. 34).
 c) Dezimalbruch durch ganze Zahl (Gr. 35).
 d) Dezimalzahl durch Dezimalzahl (Gr. 36).
 e) Enthaltensein (Gr. 37).
 f) Verwandlung der gemeinen Brüche in Dezimalbrüche und der Dezimalbrüche in gemeine Brüche (Gr. 38).

Bemerkung. Das 4. Heft bietet in einem Anhang noch Raumberechnungsaufgaben, die in der Raumlehrstunde gelöst werden sollen.

II. Anwendung der Bruchrechnung auf Regeldetri und Durchschnittsrechnung; erweiterte Regeldetri; Zeitrechnung; Kranken-, Unfall- und Invalidenversicherung; Verhältnis- und Prozentbestimmungen; Aufgaben aus der Flächen- und Körperberechnung.

Der Stoff ist trotz seiner Mannigfaltigkeit und seiner Verschiedenheit sehr wichtig, teils als Abschluß, teils als Einführung. Manche Gebiete eignen sich kaum für das Kopfrechnen (z. B. erweiterte Regeldetri u. a.), bei anderen wieder ist das Rechnen nur zur vertiefenden Einprägung der Sachgebiete da (z. B. bei der Invalidenversicherung u. a.). Die Bewältigung des umfangreichen Stoffes verlangt angestrengte Arbeit und genaue Zeiteinteilung. Schade ist es, wenn der instruktive Stoff deswegen gekürzt werden muß, weil die beiden obersten Schuljahre nur eine Rechenabteilung bilden.

Gliederung der Aufgaben.

(Schroeter, Tafelrechnen, Ausgabe A, 5. Heft.)

Auf sieben Seiten finden sich unter A zahlreiche Wiederholungsaufgaben aus früher behandelten Gebieten.

1a. **Regeldetri.**
 a) Einfache Wiederholungsaufgaben und leichte Tafelrechenaufgaben (Schluß von der „Eins" auf die Mehrheit) (Gr. 1).

b) Dasselbe mit dem Schluß von der Mehrheit auf die „Eins“ (Gr. 2).
c) Unsere Tabaksindustrie (Gr. 3).
d) Von unserer Landwirtschaft (Gr. 4).
e) Schluß von der Mehrheit auf die Mehrheit (Gr. 5).

b. Durchschnittsrechnung.
a) Wiederholung und Verwendung der Brüche (Gr. 6).
b) Durchschnittszahl von mehr als zwei Zahlen (Gr. 7).

2. Erweiterte Regelbetri (Gr. 8).
Anwendung derselben auf unser Verkehrswesen (Gr. 9).

3. Zeitrechnung (Gr. 10 und 11).

4. Kranken-, Unfall- und Invalidenversicherung.
a) Krankenversicherung (Gr. 12).
b) Unfallversicherung (Gr. 13).
c) Invalidenversicherung (Gr. 14).

5. Verhältnisrechnung.
a) Bestimmung der Verhältnisse.
aa) aus ganzen Zahlen (Gr. 15).
ab) aus Bruchzahlen (Gr. 16).
b) Anwendung der Verhältnisbestimmungen (Gr. 17).
c) Bestimmung der Gleichung (Gr. 18.)
d) Anwendung der Gleichung (Gr. 19).

6. Prozentbestimmungen.
a) Bestimmung der Prozente (Gr. 20 und 21).
b) Anwendung der Prozentbestimmungen.
aa) Steuern (Gr. 22).
ab) Zölle (Gr. 23).
ac) Allgemeine Haushaltungsaufgaben (Gr. 24).
ad) Gewinn- und Verlustrechnung (Gr. 25 und 26).
ae) Rabattrechnung (Gr. 27).
af) Besondere Haushaltungsaufgaben (Gr. 28).
ag) Durchschnittsrechnung (Gr. 29).
c) Verhältnisbestimmung auf 1000 (Gr. 30).

7. Flächen- und Körperberechnungsaufgaben (Gr. 31—37).

III. **Die bürgerlichen Rechnungsarten** (Zins-, Rabatt-, Gesellschafts- und Mischungsrechnung). **Vermischte Aufgaben aus verschiedenen Gebieten.**

Die bürgerlichen Rechnungsarten sind die Krone des Rechnens. Zur Lösung dieser Aufgaben gehören nicht nur Fertigkeit und Sicherheit in allen Rechengebieten, sondern es wird auch ein hoher Grad von Selbständigkeit in der Beurteilung der Aufgaben als vorhanden vorausgesetzt.

Alles, was je im Rechnen geübt und gelernt worden ist, findet hier seine Anwendung. Die vier Grundrechnungsarten mit ganzen Zahlen und Brüchen, das größte gemeinschaftliche Maß und das kleinste gemeinschaftliche Vielfache, Regeldetrischluß und Regeldetriansatz, Verhältnis- und Prozentbestimmungen, alles wird bald hier, bald dort gebraucht und verwendet. Hier rächt sich jede Versäumnis auf irgendeinem Rechengebiete. An den Früchten erkennt man den Unterricht. Häufiges Verrechnen deckt früher begangene Fehler auf. — Aber nicht die mechanische Fertigkeit allein ist es, die zur Lösung der Aufgaben verlangt wird. Trotz der vollendetsten technischen Fertigkeit wird doch ein großer Teil der Aufgaben ungelöst bleiben, wenn die Schüler nicht gelernt haben, selbständig zu arbeiten, selbst zu urteilen, selbst zu schließen. Die Fähigkeit, die Aufgaben zu erfassen und zu beurteilen, also das Verständnis der Aufgaben, fehlt noch viel häufiger, als die äußere mechanische Fertigkeit. Kann der Schüler keine Aufgabe lösen ohne besondere erklärende Leitung des Lehrers, verliert er sofort den Gang der Lösung, wenn er sich allein überlassen ist, und ist er unfähig, sich wieder zurecht zu finden, so ist dies ein deutliches und unantastbares Urteil über den Rechenunterricht, den der Schüler bisher empfangen hat. Der Lehrer hat versäumt, den Schüler zum Denken anzuhalten; er hat sich begnügt, wenn die Aufgaben auf mechanische Weise richtig gelöst wurden; er hat die Geisteskräfte der Schüler nicht entwickelt. Aus wie vielen ungezählten Spuren setzt sich die Geistesbildung zusammen! Wird eine derselben versäumt, so entsteht eine Lücke, die sich nur schwer schließen läßt; fortwährende Versäumnis läßt sich nie wieder gut machen. Hat das Kind in den ersten sieben Schuljahren im Rechnen nicht denken gelernt, so ist der Rechenlehrer der Oberstufe ein bedauernswerter Mann. Besser wäre es dann, zurückzugehen auf die Elemente und an diesen und an anzuschließende angewandte Aufgaben einfachster Art das Denkvermögen zu entwickeln, als sich vergeblich zu bemühen mit der Durcharbeitung des dem letzten Schuljahre zugewiesenen Rechenstoffes.

Gliederung der Aufgaben.

(Schroeter, Tafelrechnen, Ausgabe A, 6. Heft.)

Das 6. Heft bringt unter A auf fünf Seiten Wiederholungsaufgaben aus den früher behandelten Gebieten.

I. Die Zinsrechnung.

A. Einfache Zinsrechnung.

1. Kapital und Zinsen getrennt.
   a) Die Zinsen werden gesucht (Gr. 1 bis 3).
   b) Das Kapital wird gesucht (Gr. 4 und 5).
   c) Die Zeit wird gesucht (Gr. 6).
   d) Der Prozentsatz wird gesucht (Gr. 7).
2. Kapital und Zins zusammengezogen.
   a) Die Summe von Kapital und Zins wird gesucht (Gr. 8).
   b) Das Kapital wird gesucht (Gr. 9).
   c) Die Zeit und der Prozentsatz werden gesucht (Gr. 10).

B. Die Zinseszinsrechnung.

a) Zinseszins in Beziehung auf ein Kapital (Gr. 11).
b) Zinseszins in Beziehung auf gleiche jährliche Einlagen (Gr. 12).
c) Vermischte Aufgaben zur Zinsrechnung (Gr. 13).

C. Staatspapiere und Aktien.

a) Berechnung von Bar- und Kurswert (Gr. 14).
b) Verkauf der Papiere und erzielter Prozentsatz (Gr. 15).

II. Die Rabattrechnung.

A. Ohne Berücksichtigung der Zeit.

a) Bestimmung des Rabatts und der Barzahlung (Gr. 16).
b) Bestimmung des Prozentsatzes (Gr. 17).
c) Bestimmung der Rechnungssumme (Gr. 18).

B. Mit Berücksichtigung der Zeit.

a) Die Rechnungssumme ist gleich dem Kapital (Wechselrabatt oder Rabatt in 100) (Gr. 19 und 20).
b) Die Rechnungssumme ist die Summe aus Kapital und Zins (Rabatt auf 100) (Gr. 21).

III. Die Gesellschaftsrechnung.

a) Die Verteilung erfolgt nach geometrischem Verhältnis (Gr. 22).
b) Die Verteilung erfolgt nach arithmetischem Verhältnis (Gr. 23).
c) Die Verteilung erfolgt nach gemischtem Verhältnis (Gr. 24).
d) Vermischte Aufgaben (Gr. 25).

IV. Die Mischungsrechnung.

a) Einführende Durchschnittsrechnungsaufgaben (Gr. 26).
b) Die Mischung wird bestimmt (Gr. 27).
c) Das Mischungsverhältnis wird bestimmt (Gr. 28).
d) Vermischte Aufgaben (Gr. 29).

V. Vermischte Aufgaben aus verschiedenen Gebieten.

1. Zusammensetzung der Kräfte (Gr. 30).
2. Physikalische Aufgaben.
   a) Fall; schiefe Ebene; Hebel; Rolle; Pendel und Wasserdruck (Gr. 31).
   b) Spezifisches Gewicht, Luftdruck und Schall (Gr. 32).
3. Raumberechnungen (Gr. 33 bis 35).
4. Zusammengesetzte Warenberechnungen (Gr. 36).

5. Versicherungen.
   a) Lebensversicherungen (Gr. 37).
   b) Kapitalversicherung und Begräbnisgeldversicherung (Gr. 38).
   c) Unfallversicherung (Gr. 39).
   d) Feuerversicherung (Gr. 40).
6. Aus dem Haushalt der Familie und der Gemeinde.
   a) Familie (Gr. 41).
   b) Gemeinde (Gr. 42).
7. Allgemeine Haushaltungsaufgaben (Gr. 43).
8. Der Nahrungswert einiger Nahrungsmittel (Gr. 44).
9. Landwirtschaftliche Aufgaben.
   a) Bearbeitung des Ackers (Gr. 45).
   b) Düngung des Ackers (Gr. 46).
   c) Aussaat und Ernte (Gr. 47).

29. Die Sachgebiete der Oberstufe.

Fast alle bisher behandelten Sachgebiete lassen sich durch Verwendung der Brüche, besonders der Dezimalbrüche, erweitern; sie werden deshalb bei der Bruchrechnung im 6. Schuljahr herangezogen. Für die Schulen, in denen der Raumlehrunterricht im 6. Schuljahre als Raumformenlehre gegeben wird, treten die Raumberechnungen der einfacheren Flächen und Körper (vom Quadrat und Würfel bis zum Trapez und Pyramidenstumpf) hinzu.

Bei der Anwendung der Bruchrechnung auf Regeldetri und Durchschnittsrechnung im 7. Schuljahre sind die bei diesen Gebieten natürlichen Lohn- und Preisberechnungen heranzuziehen. Hierher gehören vielleicht auch andere allgemeine Sachgebiete, die zusammengesetzte Verhältnisse bieten und an irgend einer Stelle rechnerisch verwertet werden müssen. So haben die meisten Städte einen eigenartigen Erwerbszweig, der irgendwo im Rechenunterricht verwertet werden muß. Dem Lehrer wird es nicht schwer werden, die notwendigen sicheren Zahlen zu erhalten und auch in seinem Ortsrechenheft zu fixieren. Ich habe für meine Heimat die Tabaksindustrie herausgenommen; mögen die im 5. Heft über dieses Gebiet gestellten Aufgaben die Form angeben, die auf andere ähnliche Gebiete leicht übertragen werden können. Landwirtschaftliche Aufgaben haben nicht nur für das Land und für kleine ackerbautreibende Städte, sondern für jeden Volksschüler Interesse. Der Lehrer wird den Stoff in den Aufgaben selbst finden. Von allgemeinem Interesse ist die Heranziehung unserer Verkehrsverhältnisse, wenn wir uns nur auf die allgemein geltenden Bestimmungen, nicht auf minutiöse Abweichungen einlassen. Die Preisberechnung der Fahrkarten aus Klasse und Entfernung, die Berechnung der Kosten von Eil- und von Frachtgutsendungen dürften für den Eisenbahnverkehr genügen. Die Post steht uns näher, sie verlangt deshalb ungleich mehr Erklärungen und Berechnungen. Den

Stoff findet der Lehrer im Rechenhefte, vermehren und ergänzen kann er denselben durch Benutzung von Kalendern, Reklamen usw. Nicht zu unterschätzen ist besonders hier die neben der Berechnung und durch dieselbe zu erzielende Kenntnis der einfachsten Bestimmungen. Lernt ein Schüler hierbei berechnen, auf welche Weise man am vorteilhaftesten 14 kg von Hamburg nach Breslau (87 Meilen) auf der Post sendet, so hat er sicher eine anerkennenswerte Selbständigkeit erreicht. Telegraphie und Telephon werden sich auch ohne besonders gestellte Buchaufgaben leicht anschließen lassen. Zeitrechnung und Invalidenversicherung bilden eigene abgeschlossene Gebiete, während die neueinzuführenden Verhältnis- und Prozentbestimmungen eine so reiche Fülle von Sachgebieten erschließen, daß diese in dem laufenden Schuljahre gar nicht alle herangezogen werden können. Für das 7. Schuljahr ist eine kleine, vielleicht unvollkommene Auswahl getroffen worden. Im Anschluß an die Verhältnisbestimmungen behandeln wir die fremden Münzen und Maße, soweit sie für unsere deutschen Verhältnisse von Bedeutung sind. Die wechselseitigen Umrechnungen sind eine vortreffliche und nützliche Übung. Als besondere Sachgebiete treten Steuern und Zölle auf. Die wesentlichsten Belehrungen hierüber finden sich im Rechenheft. Es lassen sich ungezählte praktische Aufgaben anschließen, von denen jede den Schüler zum selbständigen Urteil anleitet. Im Anschluß an die Prozentrechnung werden die schon früher erwähnten Sachgebiete, wie Allgemeine Haushaltungsaufgaben, Gewinn- und Verlustrechnung, Rabattrechnung, Durchschnittsrechnung u. a. herangezogen und erweitert. Auch hier schließen sich an die Raumformenlehre Raumberechnungsaufgaben, die die im 6. Schuljahre gegebenen ergänzen und bis zur Kreisberechnung erweitern.

Die im 8. Schuljahre bisher schon behandelten Stoffe, die sogenannten bürgerlichen Rechnungsarten, sind Sachgebiete; im letzten Schuljahre also ist das Sachrechnen nichts Neues. Ausgeschieden aus der Reihe der bekannten Rechnungsarten sind die Termin- und die Tararechnung, weil die erste gänzlich unpraktisch ist und die zweite an anderer Stelle schon behandelt worden ist. Übriggeblieben sind die Zinsrechnung, die Rabattrechnung, die Gesellschaftsrechnung und die Mischungsrechnung, neu hinzugekommen sind die Versicherungsaufgaben, die Haushaltungsaufgaben aus Familie, Gemeinde und Staat, die Aufgaben über den Nährwert der Nahrungsmittel, landwirtschaftliche Aufgaben, physikalische und Raumberechnungsaufgaben. Sämtliche Sachgebiete, mit Ausnahme der drei zuletzt genannten, sind in besonderen Abschnitten in diesem Buche behandelt. Die landwirtschaftlichen Aufgaben werden häufig als nicht passend ausgeschieden werden, und wenn sie behandelt werden, finden Lehrer und Schüler die notwendigen Angaben in den einzelnen Aufgaben. Die physikalischen Aufgaben werden ebenso wie die Raumberechnungsaufgaben in den drei letzten Heften wohl besser in der Physik- und Raumlehrstunde, als in der Rechenstunde gelöst. Das Ineinandergreifen der einzelnen Fächer tritt immer deutlicher hervor, es wird zu einer gewissen Vollkommenheit zunächst in den Schulen ausgebaut werden

können, in denen ein Lehrer sämtlichen Unterricht erteilt, doch auch in anderen Schulen mit mehr oder minder ausgeprägtem Fachsystem läßt sich vieles erreichen. Es ist also nicht ausgeschlossen, daß der Rechenlehrer in der Rechenstunde die bezeichneten Sachgebiete behandelt, vielleicht empfiehlt es sich dann auch, vorher auf einige Augenblicke ein physikalisches Lehrbuch oder ein Raumlehrbuch aufzuschlagen.

Geographische Aufgaben habe ich an diesem Orte nicht behandelt. An verschiedenen Stellen der Rechenhefte treten Gruppen von geographischen Aufgaben auf; so werden z. B. im 4. Heft bei den Wiederholungsaufgaben Größe und Einwohnerzahlen deutscher Länder, Schutzgebiete und Städte miteinander verglichen, im 5. Heft werden bei dem Abschnitt „Verkehrswesen" Entfernungen herangezogen usw. Ein weiteres Eingehen dürfte nicht notwendig, ja vielleicht schädlich sein, da bei der Behandlung dieses Unterrichtsgebietes nichts verderbenbringender wirkt als allzugroße Gründlichkeit. Vor dieser hüte sich der Lehrer, besonders der fleißige Lehrer; er beobachte seine Schüler, und bald wird er die Wirkung übergroßer Gründlichkeit ebenso spüren, als die Folgen übergroßer Zurückhaltung.

30. Die Stellung der Dezimal-Bruchrechnung zu dem Rechnen mit gemeinen Brüchen.

Es ist eine viel umstrittene Frage, welche Stellung die Dezimal-Bruchrechnung zu der Rechnung mit gemeinen Brüchen einnehmen soll. Wenn die einen von Dezimal-Bruchrechnung überhaupt nichts wissen wollen und sie möglichst spät und möglichst kurz behandeln, dann meinen andere, man könne dieselbe nicht zeitig genug bringen und geben schon im 3. oder 4. Schuljahre eine wenn auch kurze, so doch systematische Einführung in dieselbe, und noch andere verlangen, daß die Dezimal-Brüche neben den gemeinen Brüchen behandelt werden sollen. Wir sehen also, daß in diesem „nach-", „vor-" und „nebeneinander" nicht der wesentliche Unterschied der Ansichten liegt, sondern daß diese Differenz sich auf den heftig entbrannten Kampf über die Ausdehnung der Dezimal-Bruchrechnung und ihre Bedeutung für unsere Volksschule gründet. Der eine verwirft jeden Einfluß und jede Bedeutung der Dezimal-Bruchrechnung. Er beweist, daß das Kind sich Dezimalbrüche überhaupt nicht vorstellen kann, daß die einfachen gemeinen Brüche in ihrer Bedeutung für die formale Bildung des Schülers sowohl wie für seine praktische Bildung die Dezimalbrüche bei weitem überragen; er möchte deshalb die Dezimal-Bruchrechnung aus dem Stoffplan unserer Volksschulen entweder streichen oder sie doch nach Möglichkeit beschränken. Natürlich stimmt er für eine gekürzte Behandlung der Dezimalbrüche nach den gemeinen Brüchen. — Ein zweiter sieht die Zeit nicht fern, in der die Rechnung mit gemeinen Brüchen aus unserer Volksschule verschwunden sein und diese nur noch mit Dezimalbrüchen rechnen wird. Die Dezimalteilung der Münzen, Maße und Gewichte verleitet ihn zu dieser Ansicht. Er möchte das Rechnen mit gemeinen Brüchen möglichst beschränken und will natürlich die Dezimal-Bruchrechnung vor der

gemeinen Bruchrechnung, möglichst im Anschluß an das dekadische Zahlensystem, also an das Rechnen im erweiterten Zahlenraume behandelt wissen. — Ein dritter gibt wohl jeder Bruchrechnungsart ihr Recht, wird aber dadurch verleitet, beide in einen Topf zu werfen und nebeneinander zu behandeln.

Wir meinen, daß auch hier die Wahrheit, wie so oft, in der Mitte liegt, daß jede dieser drei Meinungen nicht vollständig zu verwerfen ist, daß man aber der extremen Ausartung derselben nicht bis zum Schluß folgen darf.

Daß das Kind von Zehntausendsteln und Millionsteln nicht eine auf äußerer Wahrnehmung gegründete Vorstellung hat, kann nicht geleugnet werden; diese fehlt ihm aber auch für Zehn- und Hunderttausender. Trotzdem wird das Kind, wenn es das Wesen der Zehnerordnung erfaßt hat, wohl imstande sein, sich über die Bedeutung der fraglichen Größen Rechenschaft zu geben. Die im kleineren Kreise gewonnenen Anschauungen befähigen es dazu. Aber Zehntel und Hundertstel werden mit derselben Sicherheit und Klarheit veranschaulicht werden können wie Fünftel, Siebentel u. dgl.; man denke an die Fülle von Anschauungsmaterial, die uns unser Münz-, Maß- und Gewichtssystem liefert. Die unmittelbare Anschauung von gemeinen Brüchen mit größerem Nenner, z. B. von $\frac{7}{36}$ 2c. wird ebenfalls fehlen, auch hier wird abstrahiert. Und wie das Rechnen mit Hunderttausendern und Sechsunddreißigsteln, so wird auch das Rechnen mit Hunderttausendsteln nicht zu der täglichen Aufgabe der Volksschule gehören. Häufig weist man die Dezimal-Bruchrechnung nur dem Tafelrechnen zu; man vergißt, welche vielfache Verwendung vor allem die dezimalen Teile der Mark, des Meters usw. im täglichen Verkehr finden, wie notwendig es demnach ist, die leichten Lösungsformen im Kopfe ausführen zu lassen. Wenn aber selbst die Dezimal-Bruchrechnung vom Kopfrechnen ausgeschlossen wäre, so dürfte es doch schwer fallen, zu beweisen, daß der formale Zweck des Rechenunterrichts nicht trotzdem durch sie mit erreicht werden könnte, da es nicht der Rechenstoff, sondern in erster Linie die Behandlung desselben ist, die hier in Frage kommt.

Andrerseits werden wir ein Rechnen mit gemeinen Brüchen nicht missen können. Zunächst treten nicht alle Sachverhältnisse uns in dezimaler Form entgegen, und selbst wenn dies der Fall wäre, würde das Leben doch eine andere Teilung als die Dezimalteilung häufig verlangen. Es dürfte also weder das eine noch das andere, d. h. weder eine Ausscheidung des Dezimal-Bruchrechnens, noch ein Ausscheiden des Rechnens mit gemeinen Brüchen in der Praxis eintreten, beide Arten der Bruchrechnung behalten ihre eigenartige Bedeutung; denn wenn sie auch in vielen Punkten, und zwar in den wesentlichen, sich berühren und vieles gemeinschaftlich haben, so sind sie doch in andern Punkten, und zwar in meist äußern Formen, so weit voneinander verschieden, daß eine gemeinsame nebeneinander herlaufende Behandlung derselben auch nicht empfohlen werden kann.

Somit bleibt die Frage über Vor- und Nachbehandlung noch eine offene. Ich halte dafür, daß auch wirklich darauf wenig ankommt, ob ich die Dezimalbrüche vor oder nach den gemeinen Brüchen behandle. Wir ver-

rennen uns dabei in Theorien, denen häufig der praktische Hintergrund fehlt. Wenn stets darauf gehalten ist, daß sowohl die gemeine Bruchrechnung als auch die Dezimal-Bruchrechnung auf den früheren Stufen des Rechenunterrichts gehörig vorbereitet worden ist, wenn dann der Begriff „Bruch", der ja beiden Bruchartern gemeinsam zugrunde liegt, in verständiger Weise entwickelt ist und die Grundoperationen, nämlich das Zusammenzählen und Abziehen gleichnamiger Brüche und das Vervielfachen und Teilen von Zähler und Nenner durch ganze Zahlen zum gesicherten Eigentum der Schüler gemacht worden sind, so kann die eine oder die andere der Bruchrechnungsarten mit gleichem Erfolge behandelt werden. Das Kind wird mit gemeinen Brüchen rechnen lernen, ohne Dezimal-Bruchrechnung zu verstehen, es wird aber auch die Dezimal-Bruchrechnung treiben lernen, ohne daß es sich dabei auf die bei den gemeinen Brüchen schon entwickelten Regeln stützt. So kann man das Vervielfachen der Dezimalbrüche direkt auf die bei dem Vervielfachen von gemeinen Brüchen gewohnheitsmäßig gewonnene Regel gründen, also Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner vervielfachen lassen, und hieraus würde sich die bekannte Regel für das Vervielfachen von Dezimalbrüchen bzw. Dezimalzahlen leicht ableiten lassen. Würde es aber nicht besser sein, wir behalten auch bei der Dezimal-Bruchrechnung die wesentliche Entwicklungsform bei, die verlangt, daß wir beim Vervielfachen zuerst durch den Zähler vervielfachen und dann durch den Nenner teilen! Dies wenden wir ebenso bei $\frac{3}{7} \cdot \frac{5}{8} = \frac{3 \cdot 5}{8} : 7 = \frac{15}{56}$ als bei $0{,}7 \cdot 4{,}8 = 7 \cdot 4{,}8 : 10 = 3{,}36$ an. Auch hier kommen wir zu der vorhin erwähnten Regel. Dasselbe würde sich beim Teilen ergeben.

Welche von beiden Formen wir zuerst nehmen, sollte doch wahrlich nicht zu hitzigem Kampfe Veranlassung geben.

Stelle ich das Rechnen mit gemeinen Brüchen in den Vordergrund, so ist durch die dabei gewonnenen Vorstellungen und Fertigkeiten die Behandlung der nachfolgenden Dezimalbrüche sehr erleichtert; umgekehrt aber wird aus demselben Grunde die Behandlung der gemeinen Brüche weit weniger Schwierigkeiten machen, wenn ich die Dezimal-Bruchrechnung vorweggenommen habe. Der mechanische Vorteil ist auch hier gleich dem mechanischen Nachteil.

Wenn wir uns der Einheit wegen an die gebräuchlichste Form anschließen und dem Rechnen mit gemeinen Brüchen den Vorrang lassen, so berücksichtigen wir dabei zunächst, daß die der gesamten Bruchrechnung zugrunde liegenden Regeln über die Wertveränderungen der Brüche sich leicht, vollkommen und sicher an gemeinen Brüchen entwickeln lassen, während die Nenner der Dezimalbrüche bei einer allseitigen Verwertung durch Multiplikation und Division leicht die dezimale Form verlieren. Da nun außerdem auch die Vorbereitung der gemeinen Brüche eher auftritt, als die Vorbereitung der Dezimalbrüche, und letztere ihrer größeren Zahlen wegen vornehmlich auf das Tafelrechnen hinweisen, während die kleineren Zahlen der gemeinen Brüche sich vorzüglich für das Kopfrechnen eignen, so glaube ich keinen methodischen Fehler zu begehen, wenn ich von den beiden gangbaren Wegen den hier gewählten einschlage, nämlich das Rechnen mit Dezimalbrüchen dem Rechnen mit gemeinen Brüchen folgen lasse. Wir haben außerdem nebenbei

den einen nicht zu verkennenden praktischen Vorteil, daß nach genauer Behandlung der gemeinen Brüche das Dezimalbruchrechnen spielend leicht zu lehren ist.

Es gibt noch einen dritten Weg zur Behandlung dieser auf dezimaler Teilung beruhenden Größen. Man sieht die Größen, die von uns „Dezimalbrüche" genannt werden, gar nicht als Brüche an, sondern als Zahlen, die Einheiten enthalten, welche kleiner als „Eins" sind. Das allgemeine Zehnergesetz läßt eine Erweiterung der Zahlenordnung nach unten zu und wie Zehner und Hunderter, so sind auch Zehntel und Hundertstel u. a. als Einheiten der Zehnerordnung anzusehen.

Es ist nicht zu leugnen, daß auch auf diesem Wege gute Ergebnisse des Rechenunterrichts erzielt werden können; denn es führen „viele Wege nach Rom". Zusammenzählen und Abziehen schließen sich eng an die bei den sonst gebräuchlichen Zahlen geübten Formen an; schwieriger aber wird es bei dem Vervielfachen und Teilen. — Ein Hauptbedenken gegen diese Erweiterung der dekadischen Zahlenreihe finden wir darin, daß diese Erweiterung nach unten naturgemäß an die Erweiterung nach oben angeschlossen werden muß, und daß der hierdurch hinzukommende neue Stoff eine für Kinder dieses Alters schwer verdauliche Stoffmenge schaffen würde.

Jede der hier erwähnten Richtungen hat ihre berufenen Vertreter und ihre begeisterten Anhänger; eine Übereinstimmung der Meinungen wird schwer zu erzielen sein.

31. Die Einführung und Einteilung der Brüche.

Durch die Vorbereitung der Bruchrechnung ist das Wesen des Bruches bekannt, und auf die dort gewonnenen Vorstellungen gehen wir bei der Einführung der Brüche zurück. Wir beginnen also nicht mit der Pestalozzischen Quadrattabelle, als ob wir etwas unbedingt Neues den Schülern bieten wollten, sondern benutzen das in gleiche Teile geteilte Quadrat oder den in gleiche Teile geteilten Strich nur dann, wenn wir eine gesunkene Vorstellung heben wollen und uns eins der früher gebrauchten geeigneten Anschauungsmittel nicht zur Hand ist.

Das Kind hat den Einer (das Ganze) in gleiche Teile geteilt und einen Teil davon genommen; das Kind weiß ferner, daß der Name dieser Teile sich aus der Anzahl der gleichen Teile, in die das Ganze geteilt worden ist, ergibt. Diese Teilung des Ganzen in gleiche Teile wird nun an einem der früher gebrauchten Veranschaulichungsmittel noch einmal ausgeführt, ein Stäbchen wird vielleicht in gleiche Teile geteilt (gebrochen) und der Name Bruch gegeben. Hiernach wird das Kind bestimmen können, wie $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{10}$ usw. entstehen. Früher ist aber auch geübt worden, 2 oder mehrere restbleibende Einer in gleiche Teile zu teilen. Auch diese Erkenntnis wird hier sofort verwertet, und der Schüler wird bald feststellen, daß $\frac{2}{7}$ entstehen, wenn 2 gleiche Ganze in je 7 gleiche Teile geteilt werden und von jedem Ganzen ein Teil genommen wird. *Ein Bruch ist also je 1 Teil von einem oder mehreren gleichen in gleiche Teile geteilten Ganzen.* (Diese häufig als zweite Art der

Entstehung des Bruches gebrauchte Form schließt sich unmittelbar an das früher Erkannte an und rückt deshalb naturgemäß in die erste Stelle. Unsere Behandlung der Bruchrechnung wird auch lehren, daß diese Erklärung des Bruchs die wichtigste ist. Es würde entschieden falsch sein, wenn ich bei dem Vervielfachen mit einem Bruche oder beim Teilen durch einen Bruch eine andere Auffassung gelten lassen wollte. [Vgl. die betreffenden Abschnitte.] Hier wird durch einfache von den Kindern anzustellende Vergleichung gefunden werden müssen, daß die zu teilenden Ganzen gleich sein müssen, wie es bei den Zahlengrößen, die Rest blieben, immer der Fall war.) Auch die Schreibweise dieser Teile ist den Kindern bekannt. Bei verschiedenen Brüchen wird nun die Anzahl der Teile festgestellt und die Zahl angegeben, durch die diese Anzahl der Teile erkannt wird. Diese Zahl heißt Zähler. Die andere Zahl gibt den Namen der Teile (des Bruchs) an und heißt deshalb Nenner. Vielfache Übungen im Aufsuchen und Bestimmen von Zähler und Nenner sind anzuschließen. Jetzt wird gezeigt, daß $\frac{3}{4}$ z. B. auch aus einem Ganzen entstehen können; damit ergibt sich die zweite Erklärung für Bruch, daß nämlich derselbe auch einer oder mehrere von den gleichen Teilen eines Ganzen sein kann. Die Zusammenfassung beider Erklärungen erfolgt durch entweder — oder, sonst wird die Definition schwülstig.

Aus der Vergleichung der Brüche, die aus einem Ganzen entstehen mit den Brüchen, die aus mehreren Ganzen abgeleitet worden sind, folgt die Gruppierung der Brüche in Stamm- und abgeleitete Brüche. (Woran erkennt man den Stammbruch, woran den abgeleiteten Bruch?) — Wir haben ferner gefunden, daß ein Bruch aus mehreren oder aus einem Ganzen entstehen kann. Im ersteren Falle ist es möglich, daß wir mehr Teile erhalten, als die Anzahl der Teile eines Ganzen beträgt. Hieraus folgt die Einteilung der Brüche in echte und unechte Brüche. (Woran erkennt man den echten und woran den unechten Bruch?) Hieran schließt sich die Verwandlung von ganzen und gemischten Zahlen in Brüche und umgekehrt. — Wenn die gleichen Ganzen in eine gleiche Anzahl von Teilen geteilt worden sind, so haben diese Teile alle gleichen Namen, ist die Anzahl der Teile ungleich, so sind die Namen auch ungleich; demnach gibt es auch gleichnamige und ungleichnamige Brüche. (Woran erkennt man den gleichnamigen und woran den ungleichnamigen Bruch?) — Bei den Mark und Pfennigen haben wir noch gleiche Teile der Mark kennen gelernt, die anders geschrieben wurden, wie es bis jetzt geübt worden ist. Diese Brüche haben eine Einheit der Zehnerordnung zum Nenner, man nennt sie deshalb Dezimalbrüche, während alle die andern Brüche gemeine Brüche heißen. (Eine weitergehende Unterweisung über Dezimalbrüche wird hier nicht gegeben, es werden vielmehr die hier vorkommenden Dezimalbrüche als gemeine Brüche geschrieben.)

In vorstehendem dürfte der Stoff gegeben sein, der in allen Schulen behandelt werden kann. Diese vierfache Einteilung der Brüche könnte als zuweit gehend erscheinen; sie ergibt sich aber so ungesucht und dient dabei so zielbewußt zur Einführung in ein tieferes Verständnis, daß wir auch in der einklassigen Schule von den Schülern diese Arten der Brüche bestimmen

lassen. Die Kinder suchen gern passende Beispiele, und so ist auch Stoff für eine erste schriftliche Beschäftigung gegeben. Zu beachten ist, daß wir bei den Erklärungen der einzelnen Gruppen nicht das Wesentliche mit dem äußeren Erkennungsmerkmal verwechseln. Bei den Stammbrüchen ist der eine Teil das Wesentliche, die „Eins“ als Zähler das auf dem Wesentlichen beruhende äußere Erkennungszeichen. Weniger Teile, als das Ganze hat, ist das Wesentliche für den echten Bruch, der kleinere Zähler das äußere Erkennungszeichen; ebenso geben die gleichen Teile des Ganzen und die gleichen Nenner das Wesentliche und das äußere Erkennungszeichen für gleichnamige Brüche. Falsch würde es natürlich sein, wollte man von den Schülern ein auswendig gelerntes mechanisches Aufsagen der Arten der Brüche verlangen.

Von Doppelbrüchen kann abgesehen werden. Diese finden sich ungesucht von selbst bei dem Teilen, und der schriftliche Ansatz ergibt sogar die äußere Form derselben. Nicht nur die Größe muß als ein Doppelbruch angesehen werden, die im Zähler einen Bruch oder eine gemischte Zahl hat, sondern auch der Bruch resp. die gemischte Zahl im Nenner wird den Doppelbruch bedingen. Das ist aber nichts anders als Teilen durch eine ganze Zahl oder durch einen Bruch, und dort, an geeigneter Stelle, finden diese sogenannten Doppelbrüche ihre Erklärung. Die Versetzung des Nenners vom Zähler in den Nenner als Faktor und umgekehrt, wie man häufig hört, würde hier nur mechanisch eingeprägt werden können, dort folgt das Verständnis mit Leichtigkeit.

32. Die Wertveränderungen der Brüche.

(Sechs Grundregeln für das Rechnen mit Brüchen.)

Früher unterschied man gern bei der Bruchrechnung einen Vorkursus und einen Hauptkursus. Dies ist jetzt unnötig, da der Vorkursus durch die Vorbereitung der Bruchrechnung auf den unteren Stufen überflüssig geworden ist. Bei dieser Vorbereitung der Bruchrechnung wurden gleiche Teile der Ganzen (Bruchgrößen) durch Zusammenzählen und Abziehen vereinigt, sie wurden durch ganze Zahlen vervielfacht und geteilt. Im wesentlichen war dies alles ein Operieren mit gleichnamigen Brüchen. Da nun der größte Teil des Stoffes, der einem solchen Vorkursus zugewiesen werden könnte, in dem früher geübten Rechnen gefunden wird, so wird die Wiederholung dieses Stoffes sowie der noch übrigbleibende kleinere Teil des Vorkursus mit dem sogenannten Hauptkursus verbunden. Den Kindern der mehrklassigen Schule wird somit die Bruchrechnung einheitlich und hintereinander geboten; das wird die Stoffverteilung auf die einzelnen Klassen beziehungsweise Abteilungen wesentlich erleichtern, und die Kinder der einklassigen Schule erhalten in den für diese Schulen bestimmten Heften eine Auswahl der Aufgaben, wie sie dieselben brauchen können. Diese Auswahl wird der Lehrer auch selbst treffen können; muß er es doch auch in dem übrigen Rechenstoffe, besonders auch bei den sogenannten bürgerlichen Rechnungsarten, ja in jedem anderen Unterrichtsfache.

Dem gesamten Bruchrechnen liegen sechs einfache, auf den vier Grundrechnungsarten beruhende Operationen zugrunde, von denen jede den Wert des Bruchs verändert und die zu sechs Regeln führen, die wir die sechs Grundregeln für das Rechnen mit Brüchen oder die sechs Grundregeln für die Wertveränderungen der Brüche nennen. Nur zwei von diesen sechs Grundregeln dürften den Kindern auch ihrem Inhalt nach neu sein, die übrigen vier sind von den Kindern inhaltlich schon bei der Vorbereitung der Brüche angewendet worden, doch sollen auch diese hier der Vollständigkeit wegen in aller Kürze wiederholend eingeführt und festgestellt werden.

Wenn die Kinder die erwähnten Grundoperationen recht verstanden und aufgefaßt haben, so sind die Hauptschwierigkeiten überwunden, da das Neue, was die Bruchrechnung verlangt, im wesentlichen in diesen Grundregeln gegeben wird. Ist das Kind mit diesen neugewonnenen Vorstellungen sicher ausgerüstet, so ist es befähigt, alles, was ihm im Bruchrechnen noch geboten wird, mit Leichtigkeit zu erfassen und zu behalten.

2 Äpfel und 3 Äpfel sind 5 Äpfel; 2 Bohnen und 3 Bohnen sind 5 Bohnen, $\frac{2}{7}$ und $\frac{3}{7} = \frac{5}{7}$ usw. Aus wenigen ähnlichen Beispielen wird dann die erste Regel festgestellt: *Gleichnamige Brüche zählt man zusammen, wenn man die Zähler der Brüche zusammenzählt und den Nenner beibehält.* In derselben Weise entwickeln wir als zweite Regel: *Gleichnamige Brüche werden voneinander abgezogen, wenn man den Zähler der Abzugszahl von dem Zähler der Vollzahl abzieht und den Nenner beibehält.*

Wenn bei diesen beiden Regeln gleichnamige Brüche angenommen wurden, so geben uns die Operationen, die zu den übrigen vier Grundregeln für das Rechnen mit Brüchen führen, den Weg an, wie wir später zu gleichnamigen Brüchen kommen können. Es wird festgestellt werden müssen, welche Veränderungen zeigen sich an einem Bruche, wenn der Zähler oder der Nenner desselben durch eine ganze Zahl vervielfacht oder geteilt wird.

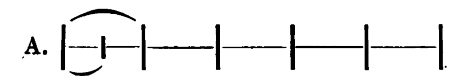
2 Bohnen, 2 Erbsen, 2 Fenster usw. werden mit 3 vervielfacht, desgleichen auch 2 Siebentel, 2 Fünftel, 2 Elftel usw. Ebenso an ähnlichen Aufgaben, bei denen eine gleiche Anzahl von Größen mit gleicher Wiederholungszahl vervielfacht wird, worauf dann die Übertragung auf Brüche, deren Zähler gleich der Anzahl der betreffenden Größen sind, erfolgt. Die richtigen Antworten werden selten ausbleiben, da die Übertragung auf Brüche zu unmittelbar ist, und das Kind schon früher daran gewöhnt worden ist, den Nenner auch als Sach- oder Artbezeichnung aufzufassen. Die rückwärtsschließende Vergleichung ergibt nochmals, daß $\frac{6}{7}$ 3mal so groß als $\frac{2}{7}$ sind. $\frac{2}{7}$ werden nun der Reihe nach 2, 3, 4, 5 usw. mal genommen. Die Vergleichung ergibt, daß die Nenner gleich geblieben sind, während die Zähler mit der betreffenden Zahl vervielfacht wurden. Es folgt daraus: Ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl vervielfacht, wenn der Zähler desselben mit der Zahl vervielfacht wird; oder kürzer: *Vervielfachen des Zählers ist Vervielfachen des Bruchs.* Aufgaben zur Anwendung dieser Regel befestigen dieselbe und

machen sie zum unverlierbaren, stets zu verwendendem freien Eigentum der Kinder.

In ganz derselben Weise verfahren wir bei der Entwicklung der vierten Regel. Benannte Zahlen, dann Brüche, werden geteilt (die Anzahl [Zähler] der auszuwählenden Größen muß durch die betreffende Zahl ohne Rest teilbar sein). Die Vergleichung ergibt auch hier, daß die Nenner dieselben geblieben sind und nur die betreffenden Zähler geteilt wurden, deshalb: Ein Bruch wird durch eine Zahl geteilt, wenn der Zähler desselben durch die Zahl geteilt wird, oder kurz: Teilen des Zählers ist Teilen des Bruchs.

Bei der Übung bezw. Anwendung der letzten Regel werden die Schüler veranlaßt, selbst Aufgaben zu geben, und bald zeigt es sich, daß der Zähler des genannten Bruchs nicht immer durch die gegebene Zahl ohne Rest geteilt werden kann. Angenommen, diese Aufgabe hieße $\frac{3}{5} : 2$. Wir nehmen der Übersicht und Einfachheit wegen zuerst die Hälfte von $\frac{1}{5}$, und zwar von $\frac{1}{5}$ ℳ. Die Kinder antworten auf geeignete Fragen des Lehrers: $\frac{1}{5}$ ℳ sind 20 Pfennige; die Hälfte von 20 Pfennigen (20 Pf. : 2) sind 10 Pfennige; 10 Pfennige sind $\frac{1}{10}$ ℳ, und sie fassen zusammen, folglich ist $\frac{1}{5}$ ℳ $: 2 = \frac{1}{10}$ ℳ. Nun lösen die Kinder unter Leitung des Lehrers noch einige ähnliche Beispiele, stets wird ein Teil einer benannten Größe in niedere Einheiten verwandelt, diese werden geteilt und die Ergebnisse in Teile der ersten Größen verwandelt, z. B. $\frac{1}{4}$ Tg. : 3, $\frac{1}{5}$ Std. : 6 usw. Zur weiteren und vollkommeneren Erschließung des Verständnisses dürfte hier die Strichveranschaulichung gute Dienste tun, obgleich nur das dargestellt wird, was das Kind schon erkannt und sprachlich richtig wiedergegeben hat.

Ein Strich wird in fünf gleiche Teile geteilt und eins dieser Fünftel wird durch einen Bogen vor den anderen herausgehoben. Die Aufgabe verlangt, daß dieses Fünftel in 2 gleiche Teile geteilt werden soll. Dies wird ausgeführt und ein Teil eingeklammert.



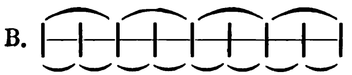
Wir haben nun einen Teil, dessen Namen wir nicht kennen. (Seminaristen stellten hier, um auf den Namen des Teiles hinzuleiten, die Frage: In wie viele Teile ist das Ganze jetzt geteilt und erhielten prompt die durch die Anschauung unterstützte Antwort: In 6 Teile.) Der Name des Teiles hängt aber von der Anzahl der gleichen Teile des Ganzen ab. Wenn jedes Fünftel in 2 gleiche Teile geteilt wird, so erhalten wir aus dem Ganzen 10 gleiche Teile, 1 Teil heißt ein Zehntel, folglich ist die Hälfte von einem Fünftel ein Zehntel ($\frac{1}{5} : 2 = \frac{1}{10}$). Wird nun gleich hierauf das Fünftel in 3 gleiche Teile geteilt, so ergibt sich auf genau demselben Wege, daß $\frac{1}{5} : 3 = \frac{1}{15}$ ist. Dasselbe noch durch andere Teiler. — Jetzt wird es möglich sein, auf die Aufgabe $\frac{3}{5} : 2$ zurückzugehen. Die Kinder verstehen, daß wir die Hälfte von $\frac{3}{5}$ nehmen, wenn wir jedes der $\frac{3}{5}$ durch 2 teilen und von jedem einen Teil nehmen. Wir

erhalten also drei Teile, von denen jeder $\frac{1}{10}$ ist, folglich ist die Hälfte von $\frac{3}{5} = \frac{3}{10}$. Dasselbe wird an anderen Aufgaben geübt.

Die Überleitung auf einen abgeleiteten Bruch könnte auch dadurch geschehen, daß das Kind schließt: die Hälfte von $\frac{1}{5}$ ist $\frac{1}{10}$, von $3 \cdot \frac{1}{5}$ auch 3mal so viel, also $\frac{3}{10}$ usw. Der ausführlich dargelegte erste Weg bietet aber den Vorteil, daß die grundlegende Anschauung (äußere wie innere) wiederholt geboten und dadurch befestigt wird.

Nun kann zum Zweck der Zusammenfassung die Vergleichung angestellt werden. Bei allen Resultaten ist der Zähler der Teilungszahl unverändert geblieben, der Nenner aber ist mit dem Teiler vervielfacht worden. Man kann also einen Bruch auch teilen, wenn der Nenner desselben vervielfacht wird, oder: Vervielfachen des Nenners ist Teilen des Bruchs. Notwendig ist nun die häufige Anwendung der beiden Regeln über Teilen des Bruches, so daß die Schüler dieselben nicht nur verstehen, sondern frei beherrschen und anwenden lernen. Sind die Kinder fähig, bei jeder Bruchdivision durch ganze Zahlen selbständig den einzuschlagenden Weg anzugeben und richtig anzuwenden, oder richtig anzuwenden und zu begründen, dann ist nicht nur das formale Ziel des Rechenunterrichts gefördert, sondern die Erziehung zur Willenstätigkeit und Willensfestigkeit hat einen nicht unbedeutenden Schritt vorwärts getan.

Die Aufgabe heißt: $2 \cdot \frac{1}{8}$. Allgemeine Bedingung ist, daß die Wiederholungszahl ein Faktor des Nenners der Grundzahl und besondere Bedingung für die ersten Aufgaben, daß der Bruch ein Stammbruch ist. Der Schüler rechnet, wie er es gelernt hat: $2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{2}{8}$. Nun wird ein Strich in 8 gleiche Teile geteilt und zwei davon zusammengezogen:



Der Schüler versucht nun, wievielmal er 2 solche Achtel in gleicher Weise zusammenziehen kann. Es ergeben sich 4 Bogen, welche gleiche Teile einschließen; ein solcher Teil ist der 4. Teil des Ganzen oder $\frac{1}{4}$; also ist $2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$. Dasselbe sofort bei gleicher Darbietung mit $4 \cdot \frac{1}{8}$, sodann in gleicher Weise an anderen Aufgaben, wie $3 \cdot \frac{1}{12}$, $4 \cdot \frac{1}{12}$, $6 \cdot \frac{1}{12}$. Hierauf würde die nicht durch direkte nachträgliche Anschauung unterstützte Folgerung möglich geworden sein, daß wenn $2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$ ist, $2 \cdot \frac{2}{8}$ (das Doppelte) auch doppelt so viel ergeben muß, also $\frac{2}{4}$. Dasselbe an anderen Aufgaben. Endlich ergibt sich durch Vergleichung, daß die Zähler unverändert geblieben sind, während die Nenner geteilt wurden, daß man also einen Bruch vervielfachen kann, wenn der Nenner desselben geteilt wird, also Teilen des Nenners ist Vervielfachen des Bruchs. Vielfache Anwendung wird die so erzielte Klarheit befestigen. Da die Strichveranschaulichung bei der Entwicklung der vorigen Regel an zweiter Stelle geboten worden ist, so kann man bei der Einführung dieser Regel von derselben ausgehen, wie soeben geschehen ist. Andererseits aber kann auch diese Regel im Anschluß an mehrfach benannte Zahlen zum Verständnis gebracht werden. Die Aufgabe: wieviel ist 3mal $\frac{1}{6}$ Std.? wird unter Führung des Lehrers folgendermaßen gerechnet werden: $\frac{1}{6}$ St. = 10 Min., 3mal 10 Min. =

30 Min., 30 Min. sind $\frac{1}{2}$ Std., folglich ist 3mal $\frac{1}{6}$ Std. = $\frac{1}{2}$ Std. Jede dieser beiden Einführungsformen unterstützt die andere, und es dürfte schwer sein, einer vor der andern den Vorzug zu geben. Vielleicht dürfte unter Berücksichtigung des Prinzips der konkreten Veranschaulichung zu empfehlen sein, die beiden letzten Regeln zuerst an mehrfach benannten Zahlen zu entwickeln und dann die gewonnenen Vorstellungen an den Strichen zu sichern.

Man versäume ja nicht, hier recht gründlich vorzugehen. Nachdem das Wesen des Bruchs klar erkannt ist, ist nichts in der ganzen Bruchrechnung so wichtig, als das gesicherte, klare Verständnis dieser sechs Grundregeln und die Befähigung der Schüler, dieselben zu jeder Zeit und mit Verständnis anzuwenden.

Dürfen denn nun in der Volksschule solche Regeln überhaupt eingeführt werden? führen sie nicht zu totem Formelwesen, und erdrücken sie das Kind nicht mit unverstandenem und unverwertbarem Wissen? — Aus dem Vorstehenden dürfte sich ergeben, daß der Lehrer ohne Überanstrengung der Kinder das Verständnis derselben für die behandelten Stoffe erschließen kann; die folgenden Abschnitte werden zeigen, daß eine vernünftige Anwendung dieser Regeln überall, bei dem Erweitern wie bei dem Kürzen und Gleichnamigmachen, bei dem Vervielfachen wie bei dem Teilen, mit Notwendigkeit eintreten muß. Es könnte somit nur eine Scheu vor dem Begriff „Regel" zurückbleiben. Diese Scheu muß aber überwunden werden. Eine erkannte Wahrheit wird behufs der leichteren und bequemeren Aneignung und späteren Anwendung in eine bestimmte Form gebracht; dies finden wir nicht nur beim Rechnen, sondern in allen Unterrichtsfächern. Viele der Rechenregeln bezwecken nichts anderes als ein schnelleres Auffinden des Resultates; wie wichtig sind dagegen diese sechs Regeln, deren Hauptzweck doch wesentlich der ist, die weitere Erschließung des Verständnisses zu unterstützen und zu fördern.

33. Die Formveränderungen der Brüche.

(Das Erweitern, Kürzen und Gleichnamigmachen.)

Da die sechs Grundregeln auf unmittelbare Anschauungen gegründet sind, so wird man hier bei den Formveränderungen wieder mit den gewonnenen Vorstellungen rechnen können; eine direkte Veranschaulichung an Strichen wird also nur dann eintreten, wenn sich bei einzelnen Kindern Schwierigkeiten im Erfassen des neuen Stoffes zeigen sollten. Dagegen kann es empfohlen werden, daß die Kinder hier das Erkannte in Strichen anzeichnen, da die selbsttätige Darstellung immer einen höheren Grad des Verständnisses bedingt als die bloße theoretische Angabe.

Ein Bruch, vielleicht $\frac{2}{5}$, wird mit 3 vervielfacht. $\frac{6}{5}$ ist 3mal so groß wie $\frac{2}{5}$. Um wieder $\frac{2}{5}$ zu erhalten, muß ich $\frac{6}{5}$ durch 3 teilen. (An ganzen Zahlen ist die Notwendigkeit dieses Teilens durch 3 längst erkannt, z. B. $3 . 6 = 18$; $18 : 3 = 6$.) Das Kind wird den Zähler des Bruches durch 3 teilen. Das wird zunächst zugelassen und das Ergebnis $\frac{2}{5}$ festgestellt. Jetzt aber muß das Kind sich daran erinnern, daß $\frac{6}{5}$ auch durch

Vervielfachen des Nenners geteilt werden kann. Der 3. Teil von $\frac{6}{5}$ heißt dann $\frac{6}{15}$. Daß beide Werte, $\frac{2}{5}$ und $\frac{6}{15}$, gleich sein müssen, kann vielleicht außerdem noch an Münzen klar gemacht werden, da die allgemeine mathematische Regel: „Sind zwei Größen einer dritten gleich, so usw." selbstverständlich hier nicht als bekannt oder frei anwendbar vorausgesetzt werden kann. Also $\frac{1}{5}$ von 1 *M* ist ein Zwanzigpfenniger, $\frac{1}{5}$ von 1 *M* sind aber auch zwanzig einzelne Pfennige usw. Beide Werte sind gleich. Die Übertragung auf die Zahlenbeispiele ist nun leicht. $\frac{2}{5}$ war der 3. Teil von $\frac{6}{5}$. $\frac{6}{15}$ ist auch der 3. Teil von $\frac{6}{5}$, folglich ist $\frac{6}{15}$ gleich $\frac{2}{5}$ usw. Durch die Wiederholung des Vorganges ergibt sich, daß zuerst der Zähler und dann der Nenner mit derselben Zahl vervielfacht worden ist. Zur Befestigung des eben Erkannten werden Darstellungen vonseiten der Schüler und vielfache Aufgaben angeschlossen. Ferner wird erkannt: Die Teile sind kleiner geworden (3mal so klein), die Anzahl derselben ist größer geworden (3mal so groß). Dieser Vorgang heißt *Erweitern des Bruchs*. Endlich wird festgestellt: *Ein Bruch wird erweitert, wenn Zähler und Nenner mit derselben Zahl vervielfacht werden.*

Viele Beispiele zur Übung.

In gleicher Weise können wir bei dem *Kürzen* vorgehen. Wir können aber auch direkt den Rückschluß bilden lassen. $\frac{2}{5} = \frac{6}{15}$, folglich müssen auch $\frac{6}{15} = \frac{2}{5}$ sein. Durch Vergleichung der Zahlen in Zähler und Nenner kommt man darauf, daß beide durch dieselbe Zahl (3) geteilt worden sind; durch Vergleichung der beiden Operationen wird festgestellt, daß die Größe des Bruches unverändert geblieben ist (daher Form- und nicht Wertveränderung), und daß, während die Teile größer wurden, die Anzahl derselben kleiner geworden ist. Jeder Bruch kann durch jede Zahl erweitert werden; aber ein Bruch kann nur dann gekürzt werden, wenn Zähler und Nenner des Bruchs durch dieselbe Zahl ohne Rest geteilt werden können. Festgelegt wird: *Ein Bruch wird gekürzt, wenn Zähler und Nenner durch dieselbe Zahl geteilt werden.*

Das Erweitern der Brüche ist notwendig zum Gleichnamigmachen, folglich wird es gebraucht bei allen Rechnungsarten, bei denen Brüche gleichnamig gemacht werden; das Kürzen der Brüche dient vornehmlich dazu, kleinere, übersichtlichere und bequemere Zahlen zu finden. Notwendig ist ein schnelles und sicheres Erkennen der Zahl, durch welche sich Zähler und Nenner eines Bruchs ohne Rest teilen lassen. Vergleiche hierzu den nächsten Abschnitt.

Für viele Grundoperationen mit Brüchen ist das *Gleichnamigmachen* der Brüche Vorbedingung, ausgenommen sind Vervielfachen und Teilen. Die einfachste Aufgabe, in der Bruchzahlen zusammengezählt werden sollen, wird auf die Notwendigkeit des Gleichnamigmachens führen. Das Gleichnamigmachen selbst kann nur geschehen durch Erweitern, nicht durch Kürzen; denn nicht gekürzte Brüche dürfen in keiner Aufgabe vorkommen. Es wird vorteilhaft sein, wenn die Schüler zuerst bei den einzelnen Aufgaben durch stete Beziehung auf das Erweitern den Hauptnenner finden lernen, um dann die erreichte Fertigkeit zu vertiefen und abzurunden durch die Heranziehung der Lehre vom kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen.

Sobald die Schüler die Hauptschwierigkeiten des Gleichnamigmachens überwunden haben, wird bei der ferneren Übung die gewonnene Kenntnis bei leichten Aufgaben aus den beiden ersten Grundrechnungsarten angewendet. So wird das Gleichnamigmachen von $\frac{3}{4}$ und $\frac{2}{3}$ verbunden mit dem Zusammenzählen der neuen Zähler; es tritt also zu dem neu Eingeführten das längst bekannte Vereinigen gleichnamiger Brüche (vergl. Abschnitt 35). Die Stufenfolge der Aufgaben ist dieselbe wie bei dem Aufsuchen des kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen. Es sind drei Gruppen zu unterscheiden: a) der eine Nenner ist ein Vielfaches des anderen Nenners (nah verwandte Zahlen; Beispiele: $_{4}$ und $_{2}$, $_{15}$ und $_{3}$. b) Die Nenner sind prim unter sich (nicht verwandte Zahlen); Beispiele: $_{3}$ und $_{5}$, $_{11}$ und $_{7}$; c) die Nenner haben einen gemeinschaftlichen Faktor (verwandte Zahlen); Beispiele: $_{6}$ und $_{8}$, $_{14}$ und $_{21}$.

a) Mache Halbe und Viertel gleichnamig! Halbe werden erweitert durch 2 und werden dadurch zu Vierteln. (Nur in den seltensten Fällen und nur bei den schwächsten Kindern wird eine Strichveranschaulichung notwendig werden.) Vier ist der **Hauptnenner** für Halbe und Viertel. — Ähnliche Aufgaben, in denen der eine Nenner ein Vielfaches des anderen Nenners ist, führen bald zur Sicherheit.

b) Mache Drittel und Fünftel gleichnamig! Drittel können weder in Fünftel, noch Fünftel in Drittel verwandelt werden. Das Kind stellt fest, worin man Drittel und auch Fünftel durch Erweitern verwandeln kann, es findet, daß beide in Fünfzehntel verwandelt werden können (übereinkommen). Die Fünfzehn ist das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von drei und fünf. Die Zahlen sind nicht verwandte Zahlen, bei denen das Vielfache aus den Zahlen das kleinste gemeinschaftiche Vielfache ist. Das Vielfache beider Nenner ist der Hauptnenner (15 ist der Hauptnenner für $_{3}$ und $_{5}$).

c) Nach der notwendigen Übung kommt man zur neuen Aufgabe: Mache gleichnamig Viertel und Sechstel! Auf dem vorhin eingeschlagenen Wege finden wir, daß beide in Zwölfteln übereinkommen. Die Vergleichung ergibt, daß auch hier bei den verwandten Zahlen das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Hauptnenner ist, und daß dies gefunden wird durch das Ausscheiden des größten gemeinschaftlichen Maßes aus einem der Nenner. Vielfache Übung befestigt das Gelernte. Sollten mehr als zwei Brüche von verschiedenem Nenner vorkommen, so macht man erst zwei derselben gleichnamig und diesen neuen Bruch mit dem dritten. Das Gleichnamigmachen von mehr als zwei Brüchen mit nicht ganz bequemen Nennern wird gewöhnlich dem schriftlichen Rechnen zugewiesen; denn das schriftliche Rechnen gibt auch hier gewisse Ansätze und Formen, durch welche die sonst zu schwierigen Operationen erleichtert werden.

Es soll schon hier darauf hingewiesen werden, daß Aufgaben, in denen mehr als 3 oder 4 Brüche gleichnamig gemacht werden sollen, in der Regel als unpraktisch zu verwerfen sind. Auch diese Beschränkung ist eine Vereinfachung des Rechenunterrichts.

Zur Vorbereitung auf die schriftliche Form des Gleichnamigmachens dient die Vergleichung von Zahlen mit einem gemeinschaftlichen Vielfachen. 4 ist der Hauptnenner für 4 und 2, 8 aber für 8 und 4, folglich auch

für 2 usw. Es ergibt sich, daß von mehreren Nennern, von denen je der eine ein reiner Teil des andern ist (die ineinander aufgehen), die kleineren dem größeren folgen, d. h., daß in jedem Vielfachen des größten dieser Nenner auch jeder der kleineren Nenner ohne Rest enthalten ist. Von 4 und 6 wurde der gemeinschaftliche Faktor 2 aus einer der Zahlen ausgeschieden; zu diesen Nennern tritt noch 10. Der Hauptnenner zwischen 4 und 6 heißt 12; 12 und 10 haben auch den gemeinschaftlichen Faktor 2, dieser wird in bekannter Weise auch aus der 10 ausgeschieden, so daß 5 $\times$ 12 der Hauptnenner ist. Vergleichen wir nun 4, 6 und 10, so finden wir, daß diese drei Zahlen den Faktor 2 gemeinsam haben; dieser wird nur in einer Zahl behalten, aus den andern aber ausgeschieden, oder er wird aus allen Zahlen ausgeschieden, dafür aber einmal an bestimmter Stelle vermerkt. In ähnlicher Weise werden andere Zahlenbeispiele herangezogen, auch in ererweiterter Form, so z. B. das Angeführte durch Hinzufügen der Zahl 15, dessen 3 und 5 schon in 6 und 10 vorkommen. Es folgt daraus, daß mehrmals vorkommende Faktoren aus allen diesen Zahlen ausgeschieden werden, daß sie aber an bestimmter Stelle zu fernerem Gebrauch einmal vermerkt werden müssen, da jeder der Faktoren doch für den Hauptnenner nötig ist. Die schriftliche Form wird nun keine Schwierigkeiten mehr bereiten. Die Nenner werden nebeneinander gesetzt; die Nenner, die in einem der andern Nenner ohne Rest enthalten sind, werden gestrichen; hierauf wird zugesehen, ob mehrere der Nenner gemeinschaftliche Faktoren haben; diese (man beginnt gewöhnlich mit dem kleinsten gemeinschaftlichen Faktor) werden einmal vornan gestellt und dann aus jeder der Zahlen durch Kürzung ausgeschieden; nach jeder Kürzung wird der Vergleich, ob nicht ein Nenner ein Maß eines andern geworden ist, von neuem vorgenommen. Die endlich übrig bleibenden Faktoren bilden mit den vorn stehenden den Hauptnenner. Beispiel: Mache gleichnamig $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{7}{15}$. Die Nenner heißen:

(: 2)	~~6~~, 8, 12, 15,	Die 6 ist ein Maß der 12, deshalb gestrichen.
(: 2)	4, 6, 15,	Zwei gekürzt, wo es möglich ist!
	2, ~~3~~, 15,	Nochmalige Kürzung durch 2. 3 ein Maß der 15, deshalb gestrichen.

Die übrig bleibenden Faktoren sind 2 . 2 . 2 . 15 = 120. Die Kinder weisen nach, daß in den Faktoren der 120 die Faktoren jedes einzelnen Nenners enthalten sind.

Die weitere Form, die zugleich zum Zusammenzählen führt, ist leicht verständlich. Man bilde eine senkrechte Reihe, schreibe den Hauptnenner darüber, lasse dann feststellen, wie viele 120stel eine Einheit jedes Bruches hat und diese mit der Anzahl der Einheiten vervielfachen. Das Zusammenzählen ist auch hier nun leicht ausgeführt.

	120	
$\frac{5}{6}$	20	100
$\frac{3}{8}$	15	45
$\frac{5}{12}$	10	50
$\frac{7}{15}$	8	56

Ist aber die trotz der Vereinfachung immerhin zusammengesetzte Einführung dieser Form für unsere einklassige (und auch für die mehrklassige) Volksschule ohne jeden Vorbehalt zu empfehlen? Die Aufgaben, die das Leben bietet, gehen über 3 verschiedene Brüche selten hinaus. Da es unpraktisch und deshalb zu verwerfen ist, Brüche mit großem Nenner in den Aufgaben zu bieten, so werden die Kinder imstande sein, durch Vergleichung der Nenner dreier Brüche den Hauptnenner ohne schriftliche Form zu finden. Auch hier gilt das schon früher Gesagte: Es fördert mehr, drei einfache, praktische Aufgaben schnell und richtig zu lösen, als sich an einer unpraktischen, zusammengesetzten Aufgabe vergeblich abzumühen. Fehlt es also irgendwie an Zeit, so beschränke man sich beim Gleichnamigmachen, wie ja auch beim Zusammenzählen und Abziehen, auf das Notwendigste. Können die Kinder zwei Brüche sicher und schnell gleichnamig machen, so genügt das; hieraus ergibt sich erforderlichenfalls das weitere.

34. Regeln über die Teilbarkeit der Zahlen.

Im vorigen Abschnitt ist gesagt, daß es bei dem Kürzen der Brüche darauf ankommt, schnell zu beurteilen, ob Zähler und Nenner des Bruches sich durch eine Zahl ohne Rest teilen lassen und welche Zahl das ist. Dies Aufsuchen von dem gemeinschaftlichen Maße oder Teiler beider Zahlen kann nicht nur in der zeitraubenden Form vorkommen, wie sie bei der Einführung des Begriffs dieses Maßes in III., Abschnitt 21 ausgeführt worden ist, nämlich durch jedesmalige Zerlegung der Zahlen in die Grundfaktoren, Ausscheidung der gemeinschaftlichen usw., sondern es muß möglichst direkt geschehen, wenn der Zweck des Kürzens, schnell zu einer übersichtlichen Darstellung der Bruchzahl zu gelangen, nicht verloren gehen soll. Deshalb ist in dem angeführten Abschnitt auch besonderer Wert auf schnelle Bestimmung des größten gemeinschaftlichen Maßes oder Teilers durch das Kopfrechnen gelegt worden. Um nun diese Schnelligkeit der Bestimmung des gemeinschaftlichen Teilers zu erhöhen, oder auch um den gemeinschaftlichen Teiler überhaupt kennen zu lernen, werden die Kinder angehalten, auf gewisse Merkmale der Zahlen zu achten, an denen man die Teilbarkeit der Zahlen durch die eine oder die andere Zahl erkennen kann. Diese Merkmale soll das Kind schnell und sicher erkennen und die Erkennungszeichen auch sprachlich feststellen lernen. Dies führt zu den Regeln über die Teilbarkeit der Zahlen.

Zur Vorbereitung auf die Einführung dieser Regeln dienen eine Reihe von Übungen. — Die Kinder müssen zwei Zahlen nennen, die sich durch eine Zahl ohne Rest teilen lassen; sie müssen diese Zahlen zusammenzählen und die gefundene Summe prüfen, ob sie sich durch dieselbe Zahl auch ohne Rest teilen läßt. Viele Beispiele ergeben die von den Kindern festzustellende Regel: *Sind zwei Zahlen durch dieselbe Zahl ohne Rest teilbar, so ist es auch die Summe derselben.*

Eine zweite, auf gleiche Weise zu entwickelnde Regel, daß auch der Unterschied dieser beiden Zahlen durch dieselbe Zahl ohne Rest teilbar ist, mag erwähnt werden; doch ist ihre Festlegung und Einprägung nicht nötig,

da sie nichts zur Erreichung des hier aufgestellten Hauptzieles beiträgt. Dagegen erhalten wir durch die Vergleichung der Teilbarkeit einer Zahl und jedes Vielfachen derselben durch dieselbe Zahl die wichtige Regel: Ist eine Zahl durch eine andere ohne Rest teilbar, so ist es auch jedes Vielfache derselben.

Die Kinder kennen die 2 als eine Zahl, durch die sich 10 ohne Rest teilen läßt; sie finden, daß dann auch jede andere Zehnerzahl sich als Vielfaches der 10 durch 2 ohne Rest teilen lassen muß, also auch 100, als 10faches der 10, also auch jedes Vielfache der 100 usw. Das Ergebnis ist: Jede Zahl, die in der Einerstelle eine Null hat, läßt sich durch 2 ohne Rest teilen, denn sie ist ein Vielfaches der 10. Die Kinder nennen jetzt die Einerzahlen, welche sich durch 2 ohne Rest teilen lassen; sie wissen, daß die Summe aus den durch 2 ohne Rest teilbaren Vielfachen der 10 und aus den ebenfalls durch 2 ohne Rest teilbaren Einern sich durch 2 ohne Rest teilen läßt. Es ergibt sich mithin die Regel: Zahlen sind durch 2 ohne Rest teilbar, wenn in der Einerstelle eine durch 2 ohne Rest teilbare Zahl (also eine 2, 4, 6, 8) oder eine Null steht, oder kurz, wenn sich die Einerstelle durch 2 ohne Rest teilen läßt. Die Begründung liegt hier, wie meistens in diesem Abschnitt, in der Entwicklung. Überall müssen zahlreiche Übungen angeschlossen werden, und die Kinder sind anzuhalten, Zahlen und Brüche anzugeben, die durch die betreffenden Zahlen sich teilen bezw. kürzen lassen. Da die „Fünf" ebenfalls ein Teiler der Zehn ist, so wird eine gleiche Entwicklung dahin führen, daß die Kinder feststellen: Zahlen sind durch 5 ohne Rest teilbar, wenn die Einerstelle durch 5 ohne Rest teilbar ist.

Da Zehn nur 2 und 5 als Teiler hat, so wenden wir uns zur nächsten Einheit der Zehnerordnung, also zur 100 und suchen neue Zahlen (also nicht 2 und 5), durch die 100 ohne Rest teilbar ist. Die erste und kleinste derselben ist die 4. Da alle vorkommenden Hunderter, Tausender usw. Vielfache der 100 sind, ist 4 ein Teiler aller dieser Zahlen. Wenn nun auch die Einer und Zehner durch 4 ohne Rest teilbar sind, so erhalten wir eine durch 4 ohne Rest teilbare Summe. Zahlen sind also durch 4 ohne Rest teilbar, wenn die Einer und Zehner derselben durch 4 ohne Rest teilbar sind (Schaltjahre). Dasselbe läßt sich auch auf die Teilbarkeit der Zahlen durch 20, 25 und 50 anwenden. Bei diesen Zahlen ist, wie bei der Fünf in Beziehung auf die 10, die Auswahl der in den betreffenden Stellen stehenden Zahlen so gering, daß bei Angabe der Regel die einzelnen Zahlen auch genannt werden können, so z. B.: Zahlen sind durch 25 ohne Rest teilbar, wenn in der Zehner- und Einerstelle 2 Nullen oder die Zahlen 25, 50 oder 75 stehen. — Eine weitere Fortführung würde zur 1000 und ihren Teilern gelangen und Regeln über die Teilbarkeit der Zahlen durch 8, 40, 125, 250 und 500 bilden lehren; doch siehe hierüber weiter unten.

Alle die bisher angeführten Regeln faßt man zusammen zu der ersten Hauptgruppe der Regeln über die Teilbarkeit der Zahlen, das sind die Regeln über die Teilbarkeit der Zahlen durch Zahlen, durch welche die Einheiten der Zehnerordnung ohne Rest teilbar sind.

Es ist nur eine kleine Anzahl der Zahlen, deren Verwendung als gemeinschaftlicher Teiler durch das Vorstehende möglich ist, vor allem ist die Zahl der Einerzahlen zu klein. Wir müssen demnach versuchen, ob sich nicht auch Regeln über die Teilbarkeit der Zahlen durch andere Zahlen, vornehmlich Einerzahlen, bilden lassen. Die nächste Einerzahl ist die 3, doch ist durch 3 keine Einheit einer Zehnerordnung ohne Rest teilbar. Zehn gibt, durch 3 geteilt, den Rest 1; 2 . 10 gibt 2 . 1, 3 . 10 gibt 3 . 1 als Rest usw. So viele Zehner vorhanden sind, sovielmal 1 erhalten wir als Rest. Steht nun in der Einerstelle eine Null, und ist der von den Zehnern stammende Rest durch 3 ohne Rest teilbar, oder tritt zu diesen von den Zehnern stammenden Resten eine Einerzahl, die ihn zu einem Vielfachen der 3 ergänzt, so ist die ganze Zahl, als Summe von zwei durch 3 ohne Rest teilbaren Zahlen durch 3 ohne Rest teilbar. Beispiel 72. Die in der Zehnerstelle stehenden Einheiten (Ziffern) geben die Anzahl der bei dem Teilen durch 3 bleibenden Reste an; dies sind hier 7, hierzu kommt die in der Einerstelle stehende Zahl; folglich beträgt die Summe 9, und da diese Zahl durch 3 ohne Rest teilbar ist, kann auch 72 durch 3 ohne Rest geteilt werden. Auch 100 gibt bei dem Teilen durch 3 den Rest 1. 200 gibt demnach 2, 500 5 usw. Die Anzahl der Hunderter einer Zahl (die in der Hunderterstelle stehende Ziffer) entspricht dem Reste, der bei dem Teilen durch 3 sich ergibt. Dasselbe ist bei den Tausendern usw. der Fall. Ist nun die Summe sämtlicher Reste einschließlich der Einerzahlen durch 3 ohne Rest teilbar, so ist auch die ganze Zahl, als Summe aus den schon durch 3 geteilten Zahlen und den durch 3 teilbaren Resten, durch 3 ohne Rest teilbar. Die Summe der Reste, die wir durch Zusammenzählen der in den einzelnen Stellen stehenden Einheiten erhalten, wird Quersumme genannt. Eine Zahl ist daher durch 3 ohne Rest teilbar, wenn ihre Quersumme durch 3 ohne Rest teilbar ist. — Zu genau denselben Resultaten kommen wir, wenn 9 als Teiler angenommen wird. Hieraus folgt die Regel: Ist die Quersumme einer Zahl durch 9 ohne Rest teilbar, so ist die ganze Zahl durch 9 ohne Rest teilbar.

Diese beiden Regeln sind die in der Volksschule verwendbaren Regeln der zweiten Hauptgruppe der Teilbarkeitsregeln, nämlich der Regeln über die Teilbarkeit der Zahlen durch Zahlen, durch die Einheiten der Zehnerordnung mit stetigem Reste teilbar sind.

Ein Versuch, ähnliches in ebenso einfacher Weise durch andere Zahlen zu erreichen, muß mißlingen, da die Reste, die die einzelnen Potenzen von Zehn ergeben, nicht gleich sind. So gibt 10 : 7 den Rest 3, 100 : 7 aber den Rest 2 usw. Zwar läßt sich das letztere, nämlich der bei 100 vorkommende Rest von 2, verwerten, wenn man die Zahlen in lauter Hunderter, und Hunderter von den Hundertern gliedert; es wird aber der leichte, schnelle und sichere Überblick fehlen, so daß diese Regeln für die Volksschule unverwendbar sind. Hierzu gehören auch die Regeln über Teilbarkeit der Zahlen durch die sich auf 1000 beziehenden Teiler, überhaupt alle die, deren Gebrauch so zusammengesetzt ist, daß eine später zu erwähnende schriftliche Form schneller zum erwünschten Ziele führt.

Für unsere Volksschule und deshalb auch für das Seminar ergibt sich also eine sehr übersichtliche Gruppierung dieser Regeln über Teilbarkeit der Zahlen in zwei große Gruppen, nämlich die in praktische und in unpraktische, oder in verwendbare und in nicht verwendbare. Nur die praktischen Regeln sind einzuführen und durch zahlreiche Übungen zum sicheren, jederzeit frei verwendbaren Eigentum der Schüler zu machen. — Zu diesen praktischen Regeln kann man noch die Regeln über die Teilbarkeit der Zahlen durch 6, 12, 15 und 18 rechnen. Sechs ist 2 . 3. Jede Zahl, die die Faktoren 2 und 3 besitzt, muß durch 6 ohne Rest teilbar sein. Also ist durch 6 jede Zahl ohne Rest teilbar, die durch 2 und durch 3 ohne Rest teilbar ist. Die Übertragung auf 12, 15 und 18 ist leicht und auch praktisch. Ab und zu ist mir aber bei dieser Übertragung der Fehler entgegengetreten, daß als die die Teilbarkeit bestimmenden Faktoren bei 12 2 und 6 und bei 18 3 und 6 genannt wurden. Leicht wird es sein, die Schüler auf das Verkehrte hinzuweisen, und ein Zahlenbeispiel befestigt die Erkenntnis des verkehrten Schlusses.

Diese letzten Regeln würden die dritte Gruppe der in der Volksschule verwendbaren Regeln über die Teilbarkeit der Zahlen bilden, nämlich die Regeln über die Teilbarkeit der Zahlen durch zusammengesetzte Zahlen.

Das tiefergehende Zahlenverständnis und die größere Zahlenkraft der Präparanden veranlassen uns aber die Grenze zwischen den verwendbaren und nichtverwendbaren Regeln über die Teilbarkeit der Zahlen etwas weiter hinausschieben, als dies in der Volksschule geschah. 8 und besonders auch 125 sind dem Präparanden geläufige Zahlen, deren Beziehung zu 1000 er kennt; deshalb mag er auch die Regeln über die Teilbarkeit der Zahlen durch 8 und 125 anzuwenden wissen. Der Präparand wird auch mit Interesse und nicht ohne Nutzen die Regeln über Teilbarkeit der Zahlen erfassen, die sich auf Hundertergruppen gründen. — Wir sahen, daß 100 durch 7 geteilt den Rest 2 gibt. 200 wird 2 . 2, 600 demnach 6 . 2 als Rest ergeben. So viele Hunderter vorhanden sind, sovielmal 2 wird der Rest bei der Teilung derselben durch 7 betragen. Jedes Hundert der Hunderter gibt 2 Hundert als Rest, soviel solche Hunderter von den Hundertern durch 7 geteilt werden, sovielmal 2 Hunderter bleiben als Rest usw. Es wird also notwendig sein, daß die Zahl, deren Teilbarkeit durch 7 untersucht werden soll, in lauter Hundertergruppen geteilt wird. Die erste Gruppe wird sovielmal 2 als Rest ergeben, als Hunderter vorhanden sind; dieser Rest muß zur nächsten Gruppe gezählt werden; die erhaltene Summe wird Hunderter darstellen, von denen jeder 2 als Rest ergibt. Wir bemerken, daß diese Restzahlen mit großer Geschwindigkeit uns über den Kopf wachsen werden und versuchen eine Abkürzung anzuwenden. Die erste Gruppe, sie mag 25 heißen, wird 25 . 2 = 50 als Rest ergeben. Wird nun aus diesem Reste die durch 7 ohne Rest teilbare 49 ausgeschieden, so ist die ganze Hunderterzahl als Summe von 2 durch 7 teilbaren Zahlen durch 7 ohne Rest teilbar, nur die von der 50 übrigbleibende 1 bleibt als Rest, der nun zur nächsten Gruppe gezählt werden muß. Zu diesem Reste „Eins“ werden wir noch auf einem andern Wege kommen, der den Vorteil der noch kleineren

Zahlen gewährt. Von den vorhandenen 25 Hundertern sind 21 Hunderter durch 7 ohne Rest teilbar. Es bleiben 4 Hunderter übrig, von denen jedes 2 als Rest ergibt; der Rest beträgt also 4 . 2 = 8; auch dieser Rest faßt noch eine durch 7 teilbare Zahl in sich, so daß als letzter Rest der Gruppe wieder die 1 übrig bleibt. — Ein Zahlenbeispiel möge das weitere zeigen. Ist 25786495 durch 7 ohne Rest teilbar? Die Gruppierung in Hunderter ergibt 25|78|64|95. 25 durch 7 gibt 4 . 2 = 8, 8 : 7 = 1 Rest; 78 + 1 = 79, 79 : 7 = 2 . 2 = 4 Rest; 64 + 4 = 68, 68 : 7 = 5 . 2 = 10, 10 : 7 = 3 Rest; 95 + 3 = 98, 98 : 7 = 0 Rest. Also: Um zu erfahren, ob eine Zahl durch 7 ohne Rest teilbar ist, teile ich die Zahl von den Einern ab in Gruppen zu je 2, teile die erste Gruppe durch 7, verdoppele den Rest, teile wieder durch 7 und zähle den nun bleibenden Rest zur nächsten Gruppe und fahre in derselben Weise fort, bis zur letzten Gruppe. Ist diese mit Hinzunahme des letzten Restes durch 7 ohne Rest teilbar, so ist es die ganze Zahl.

In gleicher Weise können wir bei der 11 verfahren. Auch hier geben die Hunderter einen stetigen, und zwar den bequemen Rest 1. Die Verdoppelung wird also hier fortfallen. Nach der Gruppeneinteilung wird jede Gruppe durch 11 geteilt und der Rest zur nächsten Gruppe gezählt, ist dann die letzte Gruppe mit Hinzunahme des letzten Restes durch 11 ohne Rest teilbar, so ist es auch die Zahl. — Bei der „Elf" führt auch noch ein anderer Weg zum Ziel. Es wird gefunden, daß sowohl die Hunderter, als die Zehntausender, Millioner usw., d. h. alle die in den ungeraden Stellen der Zahl stehenden Größen bei dem Teilen durch 11 sovielmal 1 als Rest geben, so viele Einheiten derselben vorhanden sind. Ferner wird festgestellt, daß 10 sich nur nach Hinzufügung von 1 durch 11 ohne Rest teilen läßt, bei 20 müssen 2, bei 50 5 hinzugefügt werden; ebenso ist es bei den Tausendern, Hunderttausendern usw., d. h. bei den Größen, die in den geraden Stellen der Zahl stehen; jede in den geraden Stellen einer Zahl stehende Größe verlangt je 1 für jede Einheit als Ergänzung, damit durch 11 ohne Rest geteilt werden kann. Wenn nun die Quersummen der geraden und ungeraden Stellen sich decken oder einen durch 11 teilbaren Unterschied ergeben, so ist die Zahl durch 11 ohne Rest teilbar. (Der noch fehlende Teil der Begründung ist selbstverständlich.)

Weitere Regeln über die Teilbarkeit durch andere Zahlen werden selbst in Lehrerbildungsanstalten zu weit führen. Vielleicht regt aber folgende kurze Ausführung zu weiteren Untersuchungen über interessante Zahlenbeziehungen an.

1000 würde sich durch 13 ohne Rest teilen lassen, wenn eine Eins dazugefügt würde. So viel Tausender vorhanden sind, soviel Einsen fehlen. Bei der Zahl 379392 fehlen den 379 Tauserndern 379, damit die Division durch 13 ohne Rest aufgeht; diese fehlenden können durch die in den drei letzten Stellen stehenden 392 gedeckt werden, es bleiben noch 13 übrig, folglich ist die Zahl 379392 durch 13 ohne Rest teilbar. 1000000 gibt durch 13 geteilt den Rest 1, so viel Millionen vorhanden sind, so viel mal Eins ist bei der Division durch 13 Rest usw.

Hieraus folgt: **Ob eine Zahl durch 13 ohne Rest teilbar ist, können wir feststellen, wenn wir die Zahlen von rechts nach links in Gruppen zu je drei Stellen teilen und die Summe der ersten, dritten, fünften usw. Gruppe mit der Summe der zweiten, vierten usw. Gruppe vergleichen. Ist der Unterschied beider Summen durch 13 ohne Rest teilbar, dann auch die ganze Zahl.** Beispiel: Ist 75709348 durch 13 ohne Rest teilbar? 75|709|348. $348 + 75 = 423$; $709 - 423 = 286$; $286 : 13 = 22$; folglich ist 75709348 durch 13 ohne Rest teilbar.

Fassen wir nach dieser kurzen Abschweifung zusammen, was bis jetzt in diesem Abschnitt entwickelt worden ist. Für die Volksschule zerfallen die Regeln über die Teilbarkeit der Zahlen in praktische und unpraktische; die praktischen Regeln werden des besseren Verständnisses wegen in drei Gruppen geteilt; diese sind 1. Regeln über die Teilbarkeit der Zahlen durch Zahlen, durch die Einheiten der Zehnerordnung **ohne** Rest teilbar sind, z. B. durch 2, 5, 4, 20, 25, 50; 2. Regeln über die Teilbarkeit der Zahlen durch Zahlen, durch die Einheiten der Zehnerordnung **mit stetigem** Reste teilbar sind, z. B. durch 3 und 9; 3. Regeln über die Teilbarkeit der Zahlen durch zusammengesetzte Zahlen, z. B. durch 6, 12, 15 und 18. Die Unterabteilungen der beiden ersten Gruppen werden nach den aufsteigenden Einheiten der Zehnerordnung gebildet werden.

Die sogenannten praktischen oder verwendbaren Regeln über die Teilbarkeit der Zahlen durch 2, 3, 4, 5, 6, 9, auch 12, 15, 18, 20, 25, 50 werden genügen, um die wenigen Brüche, die mit größerem Zähler und Nenner in der Volksschule vorkommen, so weit zu kürzen, daß auch sonstige in den vorstehenden Zahlen nicht mit aufgeführte Teiler leicht erkannt und berücksichtigt werden können. Z. B. $\frac{208}{312}$ a) gekürzt durch 4 gibt $\frac{52}{78}$, b) gekürzt durch $2 = \frac{26}{39}$. Daß beide Zahlen nun noch durch 13 ohne Rest teilbar sind, überblickt jeder Schüler. Sehr selten nur werden Brüche auftreten, bei denen die Frage, ob zu kürzen oder nicht, ohne richtige Antwort bleiben wird. Da aber die Möglichkeit des Irrtums nicht ausgeschlossen ist, so kennt auch unsere Volksschule ein Verfahren, das endgültig entscheidet, ob zwei Zahlen sich kürzen lassen oder nicht, und welche Zahl der größte gemeinschaftliche Teiler ist. Zur Erklärung dieses Verfahrens sind nur die in der Vorbereitung zu diesem Abschnitt entwickelten Sätze nötig. Beispiel: $\frac{123}{533}$. Wenige unserer Schüler würden das gemeinschaftliche Maß beider Zahlen direkt erkennen. Deshalb teilen wir den Nenner durch den Zähler, den Teiler durch den Rest uff. bis die Teilung aufgeht. Der letzte Teiler ist die Zahl, durch die beide gegebenen Zahlen ohne Rest teilbar sind. Ausführung und Begründung:

$$\begin{array}{r} 533 : 123 = 4 \\ \underline{492} \\ 123 : 41 = 3 \\ \underline{123} \end{array}$$

123 ist durch 41 ohne Rest teilbar, folglich auch $4 \cdot 123 = 492$, folglich auch die Summe von $492 + 41 = 533$.

35. Die vier Grundrechnnngsarten mit gemeinen Brüchen.

Das Kennzeichen eines guten Unterrichts ist in allen Unterrichts-[…]chern, also auch im Rechnen, daß in jedem neuen Unterrichtsjahre jeder […]e und auch schwierigere Stoff doch immer leichter von den Kindern […]nden wird. Die Kinder sollen jenen Bäumen gleichen, die zu gleicher […]unen, blühen und auch Früchte tragen; sie sollen ein Garten sein, […] zu gleicher Zeit gesäet und geerntet wird. — In jeder Stunde […] gesäet; jede Stunde zeitigt aber auch Begriffe, und die so heran-[…]ildete geistige Kraft der Schüler ist fähig, schwierigere Gebiete immer leichter zu durchdringen und zu verstehen. — Die Früchte des plan-mäßigen Unterrichts werden sich auch im Bruchrechnen bei der Behandlung der vier Grundrechnungsarten zeigen. Sind die Schüler vertraut mit der Entstehung des Bruchs, mit den sechs Grundregeln für das Rechnen mit Brüchen und mit den sich darauf gründenden Formveränderungen der Brüche, so werden die vier Grundrechnungsarten ihnen keine Schwierig-keiten mehr bereiten; das Neue derselben schließt sich an das gesicherte Alte an und entsprießt dem innersten Wesen desselben.

Auf das Zusammenzählen wurden wir schon beim Gleichnamig-machen vielfach hingewiesen; es wird sich eng mit demselben verknüpfen. Die Reihenfolge der Aufgaben, wie sie beim Gleichnamigmachen inne gehalten wurde, ist demnach auch zunächst für das Zusammenzählen der Brüche maßgebend. Erst später werden die Aufgaben ohne Rücksicht auf diese drei Gruppen gegeben, und dann treten Aufgaben mit gemischten Zahlen auf. Die Zerlegung der gemischten Zahlen schließt sich der früher bei den schulgemäßen Lösungen geübten Zerlegung der Zahlen an. Die zweite (hinzuzuzählende) Zahl wird in Ganze und Brüche zerlegt, hierauf werden die Ganzen und dann die Brüche, nachdem sie gleichnamig gemacht sind, zugezählt. Die Aufgabenübersicht findet sich am Schluß des Ab-schnittes.

Das Abziehen hängt mit dem Gleichnamigmachen und dem Zusammen-zählen zusammen. Auf der Übungsstufe des Gleichnamigmachens werden nebeneinander Aufgaben aus den beiden ersten Grundrechnungsarten gegeben. Jetzt wird die erzielte Summe zur Vollzahl, die Abzugszahl entspricht einem der früheren Posten. Später werden die Aufgaben auch frei gegeben. Auch hier bietet die schulgemäße Lösung nichts Neues. Zerlegung der Abzugszahl in Ganze und Brüche, Abziehen der Ganzen und dann der Brüche und hierbei Verwandlung eines Ganzen der Vollzahl, wenn der abzuziehende Bruch größer ist, als der der Vollzahl.

Zur Klarstellung der Verbindung des Gleichnamigmachens mit dem Zusammenzählen und beider mit dem Abziehen mögen hier noch einige Bemerkungen folgen. Diese Verbindung kann nicht in der Weise geschehen, daß die Aufgaben planlos durcheinander gegeben werden. Die Notwendig-keit des Gleichnamigmachens ergibt sich, wie bekannt ist, an einfachen Aufgaben für Zusammenzählen und Abziehen; dann werden diese Brüche gleichnamig gemacht, z. B. Brüche, bei denen der größte Nenner der Haupt-nenner ist, und die erzielte Fertigkeit wird nun an Aufgaben aus den

Hieraus folgt: Ob eine Zahl durch 13 ohne Rest teilb
können wir feststellen, wenn wir die Zahlen von rec
links in Gruppen zu je drei Stellen teilen und die S
ersten, dritten, fünften usw. Gruppe mit der Summe
vierten usw. Gruppe vergleichen. Ist der Unter
Summen durch 13 ohne Rest teilbar, dann auch
Beispiel: Ist 75709348 durch 13 ohne Rest tei
348 + 75 = 423; 709 — 423 = 286; 286 : 13 = 22;
durch 13 ohne Rest teilbar.

Fassen wir nach dieser kurzen Abschweifung
in diesem Abschnitt entwickelt worden ist. Für
die Regeln über die Teilbarkeit der Zahlen in
die praktischen Regeln werden des besseren V
Gruppen geteilt; diese sind 1. Regeln über
durch Zahlen, durch die Einheiten der
bar sind, z. B. durch 2, 5, 4, 20, 25, 5
der Zahlen durch Zahlen, durch die E
stetigem Reste teilbar sind, z. B. du ... wird.
Teilbarkeit der Zahlen durch zusamm ... igen Klar-
15 und 18. Die Unterabteilungen ... Brüchen genügend
nach den aufsteigenden Einheiten ... mit einer ganzen Zahl

Die sogenannten praktischen ... fachen also eine ganze Zahl
barkeit der Zahlen durch 2, 3 ... n Bruch mit einem Bruche. Die
werden genügen, um die n ... maßen gestalten: Wieviel ist 3 . 7?
und Nenner in der Volksch ... n! Wieviel mal so klein als 3 mußte
sonstige in den vorstehen ... ie nicht 21, sondern $\frac{21}{5}$ als Vielfaches
erkannt und berücksichtigt ... ist also vervielfacht worden? — Das
4 gibt $\frac{52}{78}$, b) gekürzt ... fache 7 mit 3! Welche Zahl ist 5mal
13 ohne Rest teilbar ... o klein muß das Vielfache werden, wenn
werden Brüche auftr ... Wiederholungszahl vervielfachen? usw. Ebenso
ohne richtige Antw ... mit Bruch vervielfacht werden soll. Z. B.
nicht ausgeschlosse ... chen des Zählers ist Vervielfachen des Bruchs.
das endgültig ... Teil von 5? Wieviel mal so klein muß das Viel-
und welche Z ... vervielfacht werden soll? Wie finden wir den
dieses Verfah ... ist der 6. Teil von $\frac{35}{8} = \frac{35}{48}$? (Vervielfachen
entwickelten ... des Bruchs). — Bald werden die Kinder finden,
das gemein ... fachen mit einem Bruch zuerst mit dem Zähler
wir den ... vielfachen und dann durch den Nenner (weil die
bis die ... groß genommen war) teilen müssen. Das Teilen
gegeben ... durch Vervielfachen des Nenners; die Aufgaben
... ahlen. Die schulgemäße Lösungsform, die die Kinder
... lautet: Die Aufgabe heißt $\frac{4}{5} \cdot \frac{7}{9}$! Ich nehme
... denn Vervielfachen des Zählers ist Vervielfachen des
... mit $\frac{1}{5}$, also mit einer 5mal so kleinen Zahl vervielfachen
... Vielfache 5mal so klein gemacht werden. Der 5. Teil
... vielfachen des Nenners ist Teilen des Bruchs;
... er wird diese ausführliche Form gekürzt, wir

... $\frac{28}{9}$, $\frac{28}{9}$ geteilt durch 5 ist $\frac{28}{45}$, also usw. An vielen
...aben wird vollständige Sicherheit erzielt. Eine Reihe von
...mit den Resultaten an die Tafel geschrieben, und es
...der Vielfachen mit den Zahlen der Faktoren verglichen;
...on Vorgang beim Rechnen hingewiesen. Die Kinder
...Regel finden: Brüche werden miteinander ver-
...mit dem Zähler und der Nenner mit dem
...tzt kann die erkannte Regel angewendet
...heit und Schnelligkeit der Lösung.
... in ihrer Anwendung einen etwas
...unangenehmer auftritt, je weniger
... gelegt hat. Ich habe deshalb
... und glaube durch die neue
...eben zu haben. Im engsten
...meine Kinder: Wir ver-
... wir mit dem Zähler ver-
...r teilen. Diese kurze Regel ent-
...erall, auch für die in dem Nachfolgenden
...vielfachens und für das Tafelrechnen an-

...r Befestigung des bisher Gebotenen können in den
...en Aufgaben gegeben werden wie $\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{10}$. Die Kinder
...n $2 \cdot \frac{9}{10}$ nicht nur durch Vervielfachen des Zählers, sondern
...eilen des Nenners bekommt, und daß man den 3. Teil von
... nur durch Vervielfachen des Nenners, sondern auch durch Teilen
...Zählers erhält. Hierdurch rechnen wir bei Anwendung der 2. Regel
...n bewußter Weise, was man häufig auf halb oder ganz mechanische Weise als „Kürzen über Kreuz" rechnen ließ. Schwieriger ist es, wenn die Zahlen der Wiederholungzahl nicht reine Teile von den entsprechenden Zahlen der Grundzahl sind. Schüler, die bis hierher gefolgt sind, werden vielleicht verstehen, daß, wenn Zähler und Nenner verwandte Zahlen sind, wir durch gemeinschaftliche Faktoren kürzen können; denn sie werden finden, daß das Ausscheiden eines Faktors aus dem Zähler der Wiederholungszahl ein zu kleines Vielfache bedingt, und daß dies ausgeglichen wird durch das Ausscheiden desselben Faktors aus dem Nenner der Grundzahl, da dadurch diese, also auch das Vielfache, ebensoviel mal so groß wird usw. Ob aber auch selbst unsere besten Schüler eine Rechenfertigkeit und Sicherheit bei der Lösung derartiger Kopfrechenaufgaben erlangen würden, bezweifle ich.

Deshalb wird dem „Kürzen über Kreuz" auch in der mehrklassigen Schule nur die Bedeutung der besonderen Auflösungsform zugemessen, da die praktische Bedeutung dieser Lösungsform eine sehr geringe ist. Ehe nämlich der Schüler bei dem Kopfrechnen sich darüber klar wird, ob, wie und in welcher Weise dieses Kürzen erfolgen kann, hat er meistens mehr als eine Aufgabe in gewohnter Form gelöst und die Vielfachen dann gekürzt. Bei dem Tafelrechnen geschieht das Vervielfachen mit Brüchen so wie so an dem Bruchstrich, d. h. der Zähler wird als Faktor

beiden ersten Grundrechnungsarten angewendet. So auf jeder Stufe des Gleichnamigmachens. Da nun auch die gesonderten Aufgaben für Zusammenzählen und Abziehen auf das Gleichnamigmachen zurückgehen, so ist die Verbindung doch wirklich eine naturgemäße. Hierauf folgt noch bei der Übung und der Anwendung eine Verbindung von beiden Rechnungsarten.

Bei den Aufgaben, die Zusammenzählen und Abziehen verbinden, ist ein Zurückgehen auf die drei Stufen des Gleichnamigmachens nicht mehr nötig, der Schüler muß verwandte und nichtverwandte Zahlen mit gleicher Sicherheit behandeln können. Die Aufgabenübersicht ist am Schluß des Abschnittes zu finden.

Bei dem *Vervielfachen* gelangen die beiden durch Vervielfachen auszuführenden Grundregeln für das Rechnen mit Brüchen direkt zur Verwendung, auch die bei dem Vervielfachen größerer Zahlen schon eingeführten Regeln über die Beziehungen der Wiederholungszahl zum Vielfachen bei gleicher Grundzahl (vgl. Abschn. 16) werden hier auf der Stufe der Vorbereitung des Vervielfachens wiederholt und erweitert, so daß der Schüler verstanden hat und auch aussprechen kann, daß, so viel mal so *klein* die Wiederholungszahl ist, so viel mal so klein auch das Vielfache wird. Geeignete Beispiele werden auf dieser Stufe zur nochmaligen Klarstellung notwendig sein. Jetzt ist das Vervielfachen mit Brüchen genügend vorbereitet. — Das Vervielfachen eines Bruchs mit einer ganzen Zahl ist in den Grundregeln enthalten. Wir vervielfachen also eine ganze Zahl mit einem Bruche oder auch sofort einen Bruch mit einem Bruche. Die Darbietung dürfte sich etwa folgendermaßen gestalten: Wieviel ist 3 . 7? Mache das Vielfache 21 5mal so klein! Wieviel mal so klein als 3 mußte die Wiederholungszahl sein, wenn sie nicht 21, sondern $\frac{21}{5}$ als Vielfaches ergeben sollte? Mit welcher Zahl ist also vervielfacht worden? — Dasselbe auch in der Form: Vervielfache 7 mit 3! Welche Zahl ist 5mal so klein als 3? Wieviel mal so klein muß das Vielfache werden, wenn wir mit einer 5mal so kleinen Wiederholungszahl vervielfachen? usw. Ebenso entwickeln wir, wenn Bruch mit Bruch vervielfacht werden soll. Z. B. $5 \cdot \frac{7}{8} = \frac{35}{8}$; denn Vervielfachen des Zählers ist Vervielfachen des Bruchs. Welche Zahl beträgt den 6. Teil von 5? Wieviel mal so klein muß das Vielfache werden, wenn mit $\frac{5}{6}$ vervielfacht werden soll? Wie finden wir den 6. Teil von $\frac{35}{8}$? Weshalb ist der 6. Teil von $\frac{35}{8} = \frac{35}{48}$? (Vervielfachen des Nenners ist Teilen des Bruchs). — Bald werden die Kinder finden, daß wir bei dem Vervielfachen mit einem Bruch zuerst mit dem Zähler (als ganze Zahl) vervielfachen und dann durch den Nenner (weil die Wiederholungszahl zu groß genommen war) teilen müssen. Das Teilen geschieht jetzt noch stets durch Vervielfachen des Nenners; die Aufgaben sind hiernach auszuwählen. Die schulgemäße Lösungsform, die die Kinder selbst feststellen müssen, lautet: Die Aufgabe heißt $\frac{4}{5} \cdot \frac{7}{9}$! Ich nehme zuerst $4 \cdot \frac{7}{9} = \frac{28}{9}$; denn Vervielfachen des Zählers ist Vervielfachen des Bruchs. Da ich mit $\frac{4}{5}$, also mit einer 5mal so kleinen Zahl vervielfachen sollte, muß das Vielfache 5mal so klein gemacht werden. Der 5. Teil von $\frac{28}{9}$ ist $\frac{28}{45}$; denn Vervielfachen des Nenners ist Teilen des Bruchs; also ist $\frac{4}{5} \cdot \frac{7}{9} = \frac{28}{45}$. Später wird diese ausführliche Form gekürzt, wir

sagen: 4mal $\frac{7}{9} = \frac{28}{9}$, $\frac{28}{9}$ geteilt durch 5 ist $\frac{28}{45}$, also usw. An vielen einfachen Aufgaben wird vollständige Sicherheit erzielt. Eine Reihe von Aufgaben wird mit den Resultaten an die Tafel geschrieben, und es werden die Zahlen der Vielfachen mit den Zahlen der Faktoren verglichen; dabei wird stets auf den Vorgang beim Rechnen hingewiesen. Die Kinder können nun die bekannte Regel finden: Brüche werden miteinander vervielfacht, wenn der Zähler mit dem Zähler und der Nenner mit dem Nenner vervielfacht wird. Jetzt kann die erkannte Regel angewendet werden; sie unterstützt die Sicherheit und Schnelligkeit der Lösung.

Die eben erkannte Regel hat in ihrer Anwendung einen etwas mechanischen Beigeschmack, der um so unangenehmer auftritt, je weniger Gewicht der Lehrer auf die Entwicklung gelegt hat. Ich habe deshalb seit Jahren diese Regel anders formuliert und glaube durch die neue Fassung dem Verständnis kräftige Stützen gegeben zu haben. Im engsten Anschluß an die obige Entwicklung folgern meine Kinder: *Wir vervielfachen mit einem Bruch, wenn wir mit dem Zähler vervielfachen und durch den Nenner teilen.* Diese kurze Regel entspricht der Entwicklung und ist überall, auch für die in dem Nachfolgenden gebotene zweite Form des Vervielfachens und für das Tafelrechnen anzuwenden.

Nach vollständiger Befestigung des bisher Gebotenen können in den mehrklassigen Schulen Aufgaben gegeben werden wie $\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{10}$. Die Kinder finden, daß man $2 \cdot \frac{9}{10}$ nicht nur durch Vervielfachen des Zählers, sondern auch durch Teilen des Nenners bekommt, und daß man den 3. Teil von $\frac{9}{5}$ nicht nur durch Vervielfachen des Nenners, sondern auch durch Teilen des Zählers erhält. Hierdurch rechnen wir bei Anwendung der 2. Regel in bewußter Weise, was man häufig auf halb oder ganz mechanische Weise als „*Kürzen über Kreuz*" rechnen ließ. Schwieriger ist es, wenn die Zahlen der Wiederholungzahl nicht reine Teile von den entsprechenden Zahlen der Grundzahl sind. Schüler, die bis hierher gefolgt sind, werden vielleicht verstehen, daß, wenn Zähler und Nenner verwandte Zahlen sind, wir durch gemeinschaftliche Faktoren kürzen können; denn sie werden finden, daß das Ausscheiden eines Faktors aus dem Zähler der Wiederholungszahl ein zu kleines Vielfache bedingt, und daß dies ausgeglichen wird durch das Ausscheiden desselben Faktors aus dem Nenner der Grundzahl, da dadurch diese, also auch das Vielfache, ebensoviel mal so groß wird usw. Ob aber auch selbst unsere besten Schüler eine Rechenfertigkeit und Sicherheit bei der Lösung derartiger Kopfrechenaufgaben erlangen würden, bezweifle ich.

Deshalb wird dem „Kürzen über Kreuz" auch in der mehrklassigen Schule nur die Bedeutung der besonderen Auflösungsform zugemessen, da die praktische Bedeutung dieser Lösungsform eine sehr geringe ist. Ehe nämlich der Schüler bei dem *Kopfrechnen* sich darüber klar wird, ob, wie und in welcher Weise dieses Kürzen erfolgen kann, hat er meistens mehr als eine Aufgabe in gewohnter Form gelöst und die Vielfachen dann gekürzt. Bei dem *Tafelrechnen* geschieht das Vervielfachen mit Brüchen so wie so an dem Bruchstrich, d. h. der Zähler wird als Faktor

über den Bruchstrich und der Nenner als solcher unter den Bruchstrich gesetzt. Das Kürzen der Glieder geschieht dann, wie es früher schon bei dem Regelbetriansatz geübt worden ist.

Unsere einklassigen Schulen werden mit der einfachen Einführung und Übung der schulgemäßen Lösungsform ihr Ziel erreicht haben, um so mehr, da den Aufgaben mit echten Brüchen Aufgaben mit gemischten Zahlen angeschlossen werden. Die schulgemäße Lösungsform ist in allen Fällen dieselbe. Die Aufgabenübersichten stehen am Schluß des Abschnitts.

Dem vielfach eingeschlagenen Wege, die Wiederholungszahl $\frac{3}{5}$ nicht als den 5. Teil von 3, sondern als $3 \cdot \frac{1}{5}$ aufzufassen, vermögen wir nicht zu folgen. Bei diesem Verfahren soll das Vervielfachen mit Brüchen auf dem Vervielfachen mit Stammbrüchen beruhen. Da heißt es: Ich nehme zuerst $\frac{1}{5} \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{40}$; daß aber dieses $\frac{1}{5}$ mal auch nur verstanden werden kann als 1 mal geteilt durch 5, und daß dieser 5. Teil vom Einfachen gerade so schwer und so leicht zu nehmen und zu verstehen ist, als der 5. Teil vom 3 fachen, wird nicht beachtet. Auch der Vertauschung des Begriffs: „$\frac{1}{5}$ mal" in „$\frac{1}{5}$ von" folgen wir nicht. „$\frac{1}{5}$ von" ist der Divisor 5, wie er schon seit der Unterstufe gebraucht worden ist. Dort geben wir die Aufgabe: $\frac{1}{5}$ von 35, d. h. teile 35 in 5 gleiche Teile. Solche Verwechslungen sind höchst bedauerlich, da sie in den Kindern die Klarheit der rechnerischen Begriffe zerstören. Es ist mit diesem Zopf wie mit manchem alten Zopf; man glaubt ihn nicht entbehren zu können, und doch fühlt man sich sehr wohl, wenn er endlich abgeschnitten ist. — Demgegenüber halten wir um so mehr fest an der Erklärung des Bruchs als je 1 Teil von gleichen Ganzen und führen diese Bruchanschauung bei dem Vervielfachen und bei dem Teilen auch einheitlich durch. Oftmals habe ich mit tiefem Bedauern den Einwurf gehört: Die Resultate sind ja gleich, ob ich sage $\frac{1}{5}$ mal oder $\frac{1}{5}$ von. Wer solchen Einwurf machen kann, mit dem ist freilich nicht zu rechten. Zum Schluß will ich noch auf einen nebensächlichen Übelstand aufmerksam machen, nämlich daran erinnern, wie oft diese Form „von" zur Verwechslung mit Teilen und Abziehen führt.

Dem Vervielfachen entspricht das Teilen. Das Teilen des Bruchs durch eine ganze Zahl ist bereits bei den Grundregeln eingeführt und beim Vervielfachen angewendet worden. Sollten die ungünstigen Verhältnisse einer Schule eine Weiterführung des Stoffes nicht zulassen, so übe man dieses recht tüchtig, und das Kind wird sich später im Leben auch zurechtfinden lernen. Von hohem, besonders auch formalem Werte, und deshalb für mehrklassige Schulen zu empfehlen ist das Teilen durch einen Bruch. — Einfache Zahlenvergleichungen lehren uns, daß bei gleicher Teilungszahl der Anteil sich mit dem Teiler verändert, und zwar, daß der kleinere Teiler einen größeren Anteil und umgekehrt und der sovielmal so kleine Teiler einen sovielmal so großen Anteil bedingt und auch umgekehrt. Zahlenbeispiele hierfür sind: 60 : 3, 60 : 2; — 60 : 12, 60 : 4, 60 : 2 usw. Diese auch für Erzielung eines tieferen Zahlenverständnisses recht nützliche Übung ist die Vorbereitung für das Teilen durch einen Bruch. — Die Kinder finden auf geeignete Fragen des Lehrers:

$3:5 = \frac{3}{5}$; wenn ich durch einen 7mal so kleinen Teiler als 5 (also durch $\frac{5}{7}$) geteilt hätte, würde ich einen 7mal so großen Anteil, also $\frac{21}{5}$, erhalten müssen. Dasselbe an andern Beispielen, auch an Brüchen, wie: $\frac{4}{5}:3 = \frac{4}{15}$; $\frac{3}{8}$ ist der 8. Teil von dem Teiler 3, der Anteil muß also 8mal so groß werden; $8 \cdot \frac{4}{15} = \frac{32}{15}$. Es wird zusammengefaßt, daß wir durch einen Bruch teilen, wenn wir durch den Zähler teilen und mit dem Nenner vervielfachen. Die schulgemäße Lösung hierfür wird lauten: Die Aufgabe heißt: $\frac{4}{7}:\frac{3}{5}$! Der 3. Teil von $\frac{4}{7} = \frac{4}{21}$; denn Vervielfachen des Nenners ist Teilen des Bruchs; da ich durch $\frac{3}{5}$, also eine 5mal so kleine Zahl teilen sollte, muß der Anteil 5mal so groß werden; $5 \cdot \frac{4}{21} = \frac{20}{21}$. Oder kürzer: Die Anfgabe heißt: $\frac{4}{7}:\frac{3}{5}$! $\frac{4}{7}:3$ ist $\frac{4}{21}$, mal 5 ist $\frac{20}{21}$; also ist $\frac{4}{7}:\frac{3}{5} = \frac{20}{21}$. Auch hier ergibt die Vergleichung der Zahlen der Ergebnisse mit den Zahlen der Aufgaben, daß man den Nenner der Teilungszahl mit dem Zähler des Teilers und den Zähler der Teilungszahl mit dem Nenner des Teilers vervielfacht hat, und so könnte man die Regel über das „Umdrehen" des Teilers erkennen lassen. Von praktischem Werte ist diese Regel nicht, es geht ihr wie den meisten Formeln, die selten angewendet werden; man besinnt sich nicht zur rechten Zeit auf dieselben und man verwechselt die Zahlen. Außerdem ist der formale Wert dieser Regel gleich Null, ja noch mehr, eine häufige Anwendung dieser Regel wird zum toten Mechanismus führen. Wir kommen auf die eingeführte Art durch lebendige Verstandesschlüsse ebenso schnell zu dem richtigen Resultat. Deshalb verwerfen wir jede Erwähnung und jede Benutzung der Regel. — Wie es möglich gewesen ist, aus den obigen Ausführungen mir den Vorwurf zu machen, daß ich beim Teilen der Brüche die mechanische Form des „Umdrehens" des Divisors lehre, ist mir unverständlich.

Das Kürzen von Zähler und Zähler oder Nenner und Nenner wird nur im Anschluß an unsere Lösungsform geübt werden. Wenn z. B. bei dem Kopfrechnen die Aufgabe: $\frac{4}{7}:\frac{2}{3}$ gelöst werden sollte, so wird der Schüler $\frac{4}{7}:2$ nicht durch Vervielfachen des Nenners, sondern durch Teilen des Zählers berechnen. Daß hierzu der Schüler befähigt ist, wird durch fortwährende Betonung der Grundregeln über das Rechnen mit Brüchen erreicht. Nicht ganz so leicht ist die unmittelbare Anwendung, wenn die Aufgabe $\frac{5}{8}:\frac{3}{4}$ gelöst werden soll; schwer aber ist sie, wenn die Zahlen nicht reine Teile voneinander sind, sondern nur ein gemeinschaftliches Maß haben, wie bei der Aufgabe $\frac{8}{9}:\frac{4}{15}$. — Doch solche Aufgaben fallen dem Tafelrechnen zu, das auch hier die Zahlen der Aufgabe an dem Bruchstrich gruppiert und dann die festgestellten Zahlen in aller Bequemlichkeit kürzt.

Soll die Enthaltenseinsform genommen werden, so erinnern wir uns, daß nur gleichnamige Größen ineinander enthalten sein können. Die Grundlage für die Lösung jeder Enthaltenseinsaufgabe ist also das Gleichnamigmachen. Will man die Brüche hernach als gleichbenannte Zahlen auffassen, so ist dies der nächste und bequemste Weg zur Lösung. Eine Verwandlung der Bruchzahlen in ganze Zahlen durch Vervielfachen mit dem gleichen Nenner ist unnötig und führt uns von dem Wesen des Ent-

haltenseins ab. $\frac{3}{16}$ und $\frac{12}{16}$ sind gleichbenannte Zahlen, 3 und 12, d. i. die Zahlen, welche wir durch Vervielfachen beider Zahlen mit 16 erhalten haben, sind unbenannte Zahlen, und ein Enthaltensein von unbenannten Zahlen ist von uns verworfen worden. (Vgl. Abschnitt 25.)

Auf die schriftliche Form des Enthaltenseins werden wir verzichten (vgl. Abschnitt 17).

Die selbständige Herleitung der Teilungs- und Enthaltenseinsaufgabe aus der Vervielfachungsaufgabe würde für unsere Volksschüler eine zu schwere und zeitraubende, auch die formale Seite des Rechenunterrichts zu sehr betonende Aufgabe sein, desgl. auch der freie Gebrauch der einzelnen Divisionsfragen. Dadurch ist nicht ausgeschlossen, daß die Schüler unter Leitung des Lehrers sich auch in verschiedenen Formen bewegen lernen, sofern Zeit dazu vorhanden ist. — Der Seminarist aber muß alle Formen frei beherrschen; er muß aus einer Vervielfachungsaufgabe, z. B. $\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{7}$ nicht nur die Teilungs- und Enthaltenseinsaufgaben, sondern auch die andern entweder auf Vervielfachen oder die betreffende andere Divisionsform führenden Fragen herleiten und lösen können. (Vgl. die Divisionsfragen in Abschnitt 25.) Interessant ist vor allem die zum Teilen führende Enthaltenseinsfrage. Welche Zahl ist $\frac{3}{5}$ mal in $\frac{12}{35}$ enthalten? Die Seminaristen werden finden, wie schwer der Ausdruck, $\frac{3}{5}$ mal enthalten, zu erklären bzw. zu veranschaulichen ist, und wie leicht dagegen die Lösung der dasselbe bedeutenden reinen Teilungsaufgabe $\frac{12}{35} : \frac{3}{5}$ verstanden wird.

Gruppierung der Aufgaben (Schroeter, Tafelrechenhefte Ausg. A, Heft 4, Gruppe 9—22; Ausg. B, Heft 3, Gruppe 9—22).

I. Zusammenzählen.

1. $\frac{1}{2} + \frac{3}{4}$; $\frac{5}{9} + \frac{3}{7}$; $\frac{5}{6} + \frac{3}{8}$ (Brüche zu Brüchen);
2. $1\frac{1}{5} + 3\frac{3}{8}$ (gemischte Zahlen zu gemischten Zahlen);
3. Zähle zu $1\frac{1}{2}$ fortgesetzt $\frac{5}{6}$ (Reihenaufgaben).

II. Abziehen.

1. $\frac{5}{8} - \frac{1}{4}$; $\frac{7}{10} - \frac{1}{3}$; $\frac{5}{8} - \frac{5}{12}$ (Brüche von Brüchen);
2. $9\frac{1}{2} - 5\frac{1}{3}$ (gemischte Zahlen von gemischten Zahlen);
3. Ziehe von 25 fortgesetzt $1\frac{3}{5}$ ab (Reihenaufgaben).

III. Vervielfachen.

1. $\frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3}$; $\frac{5}{7} \cdot \frac{7}{10}$ (Brüche mit Brüchen);
2. $\frac{7}{9} \cdot 2\frac{1}{4}$; $1\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{3}$ (gemischte Zahlen mit Brüchen und gemischten Zahlen).

IV. Teilen.

1. $5 : \frac{3}{8}$; $\frac{3}{4} : \frac{2}{3}$ (Ganze oder Brüche durch Brüche);
2. $4 : 1\frac{1}{2}$; $\frac{3}{8} : 1\frac{1}{3}$; $4\frac{1}{2} : 2\frac{1}{4}$ (Ganze, Brüche oder gemischte Zahlen durch gemischte Zahlen).

36. Die Dezimalbruchrechnung.

Bei der Einführung und Einteilung der Brüche (vgl. Abschnitt 31) sind auch die Dezimalbrüche erwähnt worden; es sind Brüche, deren Nenner Einheiten der Zehnerordnung sind. Diese außerordentlich enge Beschränkung im Nenner, die Unmöglichkeit ihrer praktischen Verwendung, vielleicht auch die Größe der Nenner, hatte den Dezimalbrüchen bis vor nicht langer Zeit die Volksschulen verschlossen; man behandelte Zehntel und Hundertstel als gemeine Brüche; Dezimalbruchrechnung als solche wurde fast nur im Anschluß an das wissenschaftliche Rechnen, besonders an die Lehre von den geometrischen Progressionen, getrieben. Als aber zuerst unser Maß- und Gewichtssystem und dann auch das Münzsystem dezimal wurden, nahmen die Allgemeinen Bestimmungen vom 15. Oktober 1872 die Dezimalbruchrechnung in den Lehrplan der Volksschule auf. Jetzt sind die Dezimalbrüche nicht mehr abstrakte Größen, sie sind dem Leben entnommen, also auf Anschauung gegründet und führen unmittelbar zur Praxis. Schon bei dem Rechnen mit den mehrfach benannten, auf dezimaler Teilung beruhenden Zahlen wurde die dezimale Schreibweise eingeführt und hierdurch die Dezimalbruchrechnung vorbereitet. Da wir es bei den Dezimalbrüchen mit Brüchen zu tun haben, werden die Vorstufen zur Bruchrechnung, als die Grundregeln für die Bruchrechnung, das Erweitern und Kürzen und das Gleichnamigmachen, auch für die Dezimalbruchrechnung anwendbar sein; nur wird das den Dezimalbrüchen eigene, eigentümliche Verhältnis ihrer Nenner zur Zehnerordnung manche Beschränkung und manche Erleichterung bedingen.

Es werden Dezimalbrüche mit verschiedenem Namen genannt und zunächst in der Form der gemeinen Brüche geschrieben. Durch Heranziehung der dezimalen Schreibweise, bei der diese Größen ($\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$ usw.) als neue Glieder der Zehnerordnung geschrieben wurden, ergibt sich die Schreibweise für die Dezimalbrüche. Geschrieben werden nur die Zähler, die Nenner erkennt man an der Anzahl der Stellen des Zählers. Vielfache Übung im Lesen und Schreiben der Dezimalbrüche, desgleichen häufige Verwendung der dezimalen Teile unseres Münz-, Maß- und Gewichtssystems, befestigen die gewonnene Kenntnis. Ein kurzes Eingehen auf die Grundregeln für das Bruchrechnen zeigt, daß der Zähler des Dezimalbruchs wie der Zähler des gemeinen Bruchs durch Vervielfachen und Teilen verändert werden kann, und daß das auch hier Vervielfachen und Teilen des Bruchs ist, daß aber die beiden Regeln über die Veränderung des Nenners wegfallen müssen, weil das Vervielfachen und Teilen des Nenners mit anderen Zahlen als Einheiten der Zehnerordnung die Form des Dezimalbruchs aufheben würde (z. B. $5 \cdot 0{,}07 = \frac{7}{20}$ und $0{,}3 : 2 = \frac{3}{20}$), während das Vervielfachen oder Teilen durch Einheiten der Zehnerordnung nicht am Nenner, sondern am Zähler ausgeführt wird.

Als wesentliche Operationen werden nur übrig bleiben Vervielfachen und Teilen des Zählers, besonders hervorzuheben sind hierbei die mit Einheiten der Zehnerordnung, da sie durch das Verrücken des Kommas ausgeführt werden.

Unterschieden von diesen Wertveränderungen der Dezimalbrüche sind die Formveränderungen derselben durch Erweitern, Kürzen und Gleichnamigmachen. Auch das Erweitern kann nur durch Einheiten der Zehnerordnung geschehen (Grund?), und das Vervielfachen des Zählers (d. h. das Anhängen einer oder mehrerer Nullen) ist zugleich Vervielfachen des Nenners. Da auch das Kürzen der Dezimalbrüche nur durch Einheiten der Zehnerordnung geschehen kann, werden alle Untersuchungen über die Teilbarkeit der Zahlen bis auf die eine wegfallen, ob nämlich der Zähler durch 10 ohne Rest teilbar ist. Ein Kürzen der Dezimalbrüche wird also nur dann stattfinden, wenn am Ende des Zählers Nullen stehen. — Bei der Anwendung der Dezimalbruchrechnung auf die Münzen, Maße und Gewichte zeigt sich nun oft die Unmöglichkeit, kleine dezimale Teile praktisch darzustellen. So sind kleinere Markteile als Hundertstel Mark nicht auszuzahlen, und man wird bei mehrstelligen Markbrüchen gezwungen, diese auf zweistellige abzukürzen. Es kommt hierbei darauf an, den kleinsten Rechenfehler zu machen, und der Schüler wird bald finden, daß ein Weglassen von 1 bis 4 Tausendsteln einen kleineren Unterschied ergibt, als ein Hinzulegen von 9 bis 6 Tausendsteln, daß also 1 bis 4 Tausendstel weggelassen werden; dagegen wird ein Ausscheiden von 6 bis 9 Tausendsteln einen größeren Rechenfehler bedingen, als ein Hinzulegen von 4 bis 1 Tausendstel; man wählt daher das letztere, erhält dann ein Hundertstel, welches man zu den vorhandenen Hundertsteln zählt. In derselben Weise behandelt man 5 Tausendstel in der Voraussetzung, daß hinter den Tausendsteln sich noch andere dezimale Einheiten befinden werden, welche den Unterschied beim Hinzuzählen kleiner werden lassen als beim Hinwegnehmen. Das ist kein Kürzen, sondern ein Abkürzen des Dezimalbruchs. Dieses Abkürzen der Dezimalbrüche auch auf drei und vier Stellen (kg und g, km und m oder qm und qcm) ist schon bei dem Rechnen mit mehrfach benannten Zahlen vorbereitet worden; hier wird es vielfach geübt, da es für das gesamte Dezimalbruchrechnen und für dessen praktische Verwertung von der allergrößten Bedeutung ist. Das Volksschulrechnen kennt bei dem Rechnen mit gemeinen Brüchen keine Operation, die diesem praktischen Abkürzen der Dezimalbrüche gleichkommt, da das auf der Lehre der Kettenbrüche beruhende Aufsuchen der Annäherungswerte nicht zum Rechenstoff der Volksschule gehört.

Das Gleichnamigmachen der Dezimalbrüche geschieht durch Erweitern (d. i. durch Anhängung von Nullen) und durch Abkürzen (d. i. durch Weglassen von Stellen). Es wird selten angewendet werden müssen. Man lasse genau unterscheiden zwischen Vervielfachen und Erweitern, und zwischen Teilen und Kürzen mit Einheiten der Zehnerordnung. Beim Vervielfachen und Teilen mit Einheiten der Zehnerordnung wird das Komma nach links oder rechts gerückt; beim Erweitern oder Kürzen werden Nullen angehängt oder abgestrichen.

Es ist schon früher darauf hingewiesen worden, daß das Dezimalbruchrechnen vorwiegend dem Tafelrechnen zufällt. Von dem bisher behandelten Stoffe werden die Aufgaben an kleineren übersehbaren Zahlen zur Erzielung des Verständnisses im Kopfe, die Übungen an schwereren

Aufgaben auf der Tafel ausgeführt werden; ebenso wird es auch bei den vier Grundrechnungsarten gehalten. Überall aber ist klares Verständnis und vollständige Sicherheit zu erzielen.

5,36 ℳ und 4,14 ℳ sind schon bei dem Rechnen mit mehrfach benannten Zahlen im Kopfe und auf der Tafel zusammengezählt und auch voneinander abgezogen worden. Ähnliche Aufgaben werden auch hier geübt, bei dem Kopfrechnen wird der zweite Posten, bezw. die Abzugszahl in Ganze, Zehntel und Hundertstel usw. zerlegt; bei dem Tafelrechnen werden die gleichartigen Größen untereinander geschrieben und dann vereinigt, zuerst die Größen, zum Schluß die Ziffern. Beide Rechnungsarten werden in beiden Formen keine Schwierigkeiten bereiten, umsomehr nicht, als wir überall auf Heranziehung von vielstelligen Dezimalbrüchen endgültig verzichten. Vier, höchstens einmal fünf Dezimalstellen beim Tafelrechnen ist das Äußerste, was geboten werden darf. Hiermit ist dem praktischen Bedürfnis genügt. Sprechen und rechnen wir mit der Einheit km, so werden wohl m, nicht aber mm als dezimale Teile verwendet werden, und als Maß einer Feldmark dienen ha und die dezimalen Teile desselben bis zum qm, aber nicht bis zum qcm usw. Aus diesem Grunde können wir in unsern einfachen Volksschulen auch auf Heranziehung der abgekürzten Dezimalbruchrechnung verzichten; wir bedürfen ihrer für unsere Praxis nicht. Anders ist es vielleicht in vielgegliederten städtischen Volksschulen, die ihre Ziele weiter stecken können. In ihnen könnte dem abgekürzten Dezimalbruchrechnen nicht ohne Nutzen in formaler und wohl auch materialer Hinsicht einige Stunden gewidmet werden.

Es werden bei den vier Grundrechnungsarten nicht nur Dezimalbrüche, sondern auch Ganze mit Dezimalbrüchen (gemischte Zahlen) vorkommen; wir nennen letztere Dezimalzahlen.

Die Grundlage für das Vervielfachen mit dezimalen Größen ist das Vervielfachen und Teilen der Dezimalbrüche und Dezimalzahlen mit Einheiten der Zehnerordnung, wie es im Anfang dieses Abschnitts schon erwähnt ist. Auch das Vervielfachen von Dezimalbrüchen mit anderen Zahlen ist dort berührt, dasselbe mag hier nochmals wiederholt werden. Zuerst vervielfacht man die Zahlengrößen; bald aber wendet das Kind die schon bei dem Vervielfachen mit ganzen Zahlen geübte abgekürzte oder mechanische Form an, so daß es nicht mehr die einzelnen Größen, sondern nur die in den Stellen stehenden Einheiten vervielfacht und vom Vielfachen die Anzahl der Stellen der Grundzahl abstreicht. Die bekannte und schon oft geübte Verwandlung in höhere Einheiten durch Zusammenfassen von je 10 Einheiten führt von selbst darauf. — Bei der Einführung des Vervielfachens der Dezimalbrüche mit Dezimalbrüchen können verschiedene Wege eingeschlagen werden. Viele wenden direkt die bei dem Rechnen mit gemeinen Brüchen entwickelte Regel über das Vervielfachen derselben an und vervielfachen sofort Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner. Eine Vergleichung ergibt dann die bekannte Regel, daß man wie mit ganzen Zahlen vervielfachen und vom Vielfachen so viele Stellen abstreichen solle, als Grundzahl und Wiederholungszahl zusammengenommen Stellen haben. Zu demselben Ziele kommen wir aber auf anderem, nur scheinbar weiterem

[illegible] ein Dezimal[illegible]

[illegible] bekannten [illegible]

[illegible] eben [illegible]

[illegible] Aufgabe [illegible] wenn das [illegible]

[illegible] werden [illegible]

[illegible] gegeben [illegible]

[illegible] Stellen [illegible]

[illegible] der Dezimalbrüche [illegible]

[illegible] dezimalen Einheit [illegible]

[illegible] Zahlen von 2 bis 9 [illegible]

[illegible]

[illegible] 0,111 . . . .

[illegible] die 3 stets wieder, bei dem [illegible] die 6 bei dem durch 7 die [illegible] stets wiederkehren, während [illegible] zu einem Ende führt. Die [illegible] ein Rest bleibt, bei [illegible] ein Ende haben, andere nicht. [illegible] unendliche Dezimal-

brüche. Bei den unendlichen Dezimalbrüchen kehrt eine Ziffer oder Zifferngruppe immer wieder; wir nennen diese wiederkehrende Zifferngruppe Periode, daher führen diese Brüche auch den Namen periodische Dezimalbrüche. Es wird ferner gefunden, daß die Periode entweder sogleich nach dem Komma beginnt, oder daß andere Zahlen noch vor der Periode stehen, deshalb unterscheiden wir rein- und gemischt-periodische Dezimalbrüche. Alles dies findet sich bei dem Teilen der Zahl 1 durch die Zahlen von 2 bis 9. Eine Vergleichung der Eigenart der Teiler und ihrer Resultate führt zu manchen interessanten Schlüssen, die aber für die meisten Volksschulen zu weit führen werden. So geben Teiler, die nur aus Zweien und Fünfen bestehen, endliche Dezimalbrüche; Teiler, die keine Zweien und Fünfen in sich fassen, geben rein-periodische, und Teiler, die aus Zweien und Fünfen und anderen Zahlen bestehen, geben gemischt-periodische Dezimalbrüche. Die Anzahl der Stellen des endlichen Dezimalbruchs richtet sich nach der Anzahl der vorherrschenden Zweien oder Fünfen, ebenso die Anzahl der Vorziffern bei einem gemischt-periodischen Dezimalbruche usw. Diese Eigentümlichkeiten werden gefunden, wenn man das bei den Teilern 2 bis 9 Erkannte durch Vergleichung mit andern Teilern, die bei gleichen Eigenschaften zu gleichen Resultaten führen, befestigt. Ebenso interessant dürfte die Vergleichung der periodischen Stellen, die Beziehung ihrer Quersumme zu 9 usw. werden; doch wird all dieses nur eintreten dürfen, wenn das Notwendige zum unverlierbaren Eigentum der Kinder geworden ist. Bei der einklassigen Volksschule und in den allermeisten mehrklassigen Volksschulen verzichten wir auf die Einteilung in rein-periodische und gemischt-periodische Dezimalbrüche; wenn es sich im Laufe des Teilens ergibt, daß einige Dezimalbrüche ein Ende haben, andere dagegen nicht, so genügt dies vollkommen. Falsch würde es sein, die Einteilung der Dezimalbrüche an die Spitze der Dezimalbruchrechnung zu stellen; wenn sie gegeben werden soll, kann es nur beim Teilen sein, bei dem die Eigenart der einzelnen Dezimalbrüche sich von selbst ergibt.

Sollen Dezimalzahlen durch ganze Zahlen geteilt werden, so wird das Verfahren dem bis jetzt beachteten gleich sein; nur werden bei der Verwandlung der Reste in die niederen dezimalen Einheiten die in der Teilungszahl vorhandenen Einheiten mit den verwandelten vereinigt werden müssen. Auch das Teilen durch einen Dezimalbruch oder eine Dezimalzahl wird auf das bei dem Rechnen mit gemeinen Brüchen geübte Verfahren zurückgeführt. Wie dort, so wird auch hier durch den Zähler des Teilers geteilt und mit dem Nenner desselben vervielfacht. $27{,}5 : 0{,}35$ muß demnach gerechnet werden $27{,}5 : 35$. Der Anteil wird aber des 100mal zu großen Teilers wegen 100mal zu klein sein, er muß also mit 100 vervielfacht werden. Die Eigenart der Dezimalbrüche gestattet aber, dieses Vervielfachen schon vor der Ausrechnung dadurch vorzunehmen, daß die Teilungszahl mit 100 vervielfacht wird. Sollte die vollständige Klarheit des Verständnisses hier fehlen, so werden einige geeignete Aufgaben bald dazu führen. $6 : 2 = 3$, $(5 . 6) : (5 . 2) = 3$, $(10 . 6) : (10 . 2) = 3$ usw. — Es folgt also hieraus, daß beim Teilen durch Dezimalzahlen der Teiler durch Vervielfachen mit dem Nenner in eine ganze Zahl verwandelt und

die Teilungszahl durch dieselbe Zahl vervielfacht wird. Das Vervielfachen geschieht durch Rücken des Kommas, sodaß die Ausführung sehr einfach und wenig zeitraubend ist. Das schriftliche Verfahren bei dem Teilen durch Dezimalbrüche gleicht also dem Kopfrechenverfahren bei dem Teilen durch gemeine Brüche, nur daß beim Kopfrechnen zuerst geteilt und dann vervielfacht wird, während das schriftliche Teilen durch Dezimalbrüche die Richtigstellung des Resultates vor der Division durch Multiplikation der Teilungszahl verlangt.

Vergleichen wir aber die beiden schriftlichen Lösungsformen, so finden wir bei dem Rechnen mit gemeinen Brüchen dasselbe Verfahren. Die Zahlen werden am Bruchstrich gruppiert, und hier wird auch zuerst vervielfacht und dann geteilt ($\frac{5}{7} : \frac{3}{8} = \frac{5 \,.\, 8}{7 \,.\, 3} = 5$ mal 8 durch 3 . 7).

Viele verlangen bei dem Teilen durch Dezimalbrüche ein Gleichnamigmachen von Teiler und Teilungszahl. Abgesehen nun davon, daß das Teilen gar nicht zum Gleichnamigmachen führen kann und letzteres die immer noch häufig vorkommende Verwechslung des Teilens mit dem Enthaltensein begünstigt, so ist auch die Ausführung in der hier gegebenen Form die einfachere. Teiler mit vielen Dezimalstellen kommen im gewöhnlichen Leben selten vor, viel eher noch vielstellige zu teilende Zahlen. Soll nun dem Teiler eine Reihe von Nullen angehängt werden, nur damit die gleiche Anzahl von Stellen erzielt wird? Man vergleiche 36,428 : 3,6. Wir rechnen 364,28 : 36 =, während beim Gleichnamigmachen die Aufgabe 36428 : 3600 lauten würde. Der fertige Rechner wird im Gegenteil nie eine Teilungsaufgabe lösen, bei der der Teiler am Ende Nullen hat, sondern wird die Nullen streichen und von der Teilungszahl die gleiche Anzahl von Stellen durch Abstreichen oder Verrücken des Kommas entfernen. Es werden also hier im Anschluß an diese Übungen zahlreiche Aufgaben gegeben werden, die durch solche Kürzungen des Teilers zu dem Dezimalbruchrechnen führen wie z. B. 48375 : 6300 = 483,75 : 63 usw. Der Schüler bedarf einer übersichtlichen einfachen Form. Würde nun das Prinzip des Gleichnamigmachens aufgestellt, so müßten auch Aufgaben wie 36,75 ℳ : 3 in gleicher Weise durch Gleichnamigmachen gelöst werden. Wie aber geschieht dies?

Bei dem *Enthaltensein*, falls diese Divisionsform geübt werden sollte, kommen wir, wie schon angedeutet, auf die Forderung des Gleichnamigmachens zurück. Es ist also gleich, ob Ganze in Dezimalbrüchen oder umgekehrt, oder ob Dezimalzahlen in Dezimalzahlen enthalten sein sollen; überall muß gleichnamig gemacht werden. Bei dem Rechnen mit gemeinen Brüchen ist schon erkannt worden: So oft das Einfache im Einfachen, so oft ist das Vielfache im gleichnamigen Vielfachen enthalten. Wenn dies hier von neuem eingeführt wird, so sind die Dezimalzahlen durch Vervielfachen mit dem gleichen Nenner in Ganze verwandelt, die nun miteinander gemessen werden! Wir verzichten auch hier auf die Verwendung der Enthaltenseinsform.

Aus vorstehendem wird sich ergeben, daß die Dezimalbruchrechnung in einer weisen, auf die Praxis gegründeten Beschränkung durch die *ihre*

eigentümliche Beziehung zur Zehnerordnung einfach und leicht zu behandeln ist, und daß sie keineswegs bloßes Regelrechnen verlangt, sondern daß die Einführung der Formen des Tafelrechnens dieselbe Bedeutung für die formale Bildung hat, als die Formen des Kopfrechnens bei dem Rechnen mit gemeinen Brüchen.

Gruppierung der Aufgaben (Schroeter, Tafelrechenhefte, Ausg. A, Heft 4, Gruppe 23—37; Ausg. B, Heft 3, Gruppe 23—35).

I. Vorübungen (Lesen und Schreiben der Dezimalbrüche).
II. Wertveränderungen der Dezimalbrüche.
III. Formveränderungen der Dezimalbrüche.
IV. Zusammenzählen (414,26 + 8,35 + 9,742 + 130,285).
V. Abziehen (3,15 — 2,75).
VI. Vervielfachen:
 1. 3 . 5,67 (Dezimalzahl mit ganzer Zahl).
 2. 0,72 . 123,5 (Dezimalzahl mit Dezimalbruch).
 3. 4,16 . 3,75 (Dezimalzahl mit Dezimalzahl).
VII. Teilen:
 1. 1 : 12 (ganze Zahl durch ganze Zahl).
 2. 7,58 : 6 (Dezimalzahl durch ganze Zahl).
 3. 6,44 : 0,2; 6,44 : 3,5 (Dezimalzahl durch Dezimalbruch und Dezimalzahl).

37. Abgekürztes Rechnen mit Dezimalbrüchen.

Das abgekürzte Rechnen mit Dezimalbrüchen gehört nicht direkt zu dem in der Volksschule zu behandelnden Rechenstoffe; denn die Volksschule wird vielstellige Dezimalbrüche mit noch größerem Rechte ausscheiden, wie vielstellige ganze Zahlen (vgl. die „Allg. Bestimmungen"). Größere städtische Schulen, Fortbildungsschulen und Fachschulen dürften dagegen dem abgekürzten Dezimalbruchrechnen schon eher ein Plätzchen gönnen. Da nun manche unserer vielgegliederten Volksschulen höhere Ziele anstreben, als sie der einfachen Volksschule gesteckt sind und vielleicht mancher Lehrer der Fortbildungs- oder Fachschule einen suchenden Blick in diese Methodik bei der Behandlung des in der Überschrift angegebenen Stoffes werfen möchte, so soll hier ganz kurz auf dieses abgekürzte Dezimalbruchrechnen hingewiesen werden.

Unser praktisches Rechnen wird durch die mehrfach benannten Zahlen bestimmt, die zum großen Teil dezimal geteilt sind. Nun verlangt das Leben keine allzugroße Ausdehnung der Größen; d. h. Längen, die mit Kilometern gemessen werden, bestimmt man genau nach Metern, also nach Tausendstel Kilometern, selten aber nach Centimetern oder Millimetern, und Lasten, die nach Tonnen gewogen werden, werden der Genauigkeit wegen bis auf Kilogramm aber nicht bis auf Gramm bestimmt. Rechnet man nun in bekannter Weise zur Sicherung der letzten Dezimalstelle noch eine Stelle mehr als verlangt wird, so würden drei- und vierstellige,

bei Flächen- und Körpermaßen fünf- und siebenstellige Dezimalbrüche vollständig ausreichen. Aber selbst bei dieser Beschränkung können bei einzelnen Rechnungsarten viele überflüssige Dezimalstellen durch die Rechnung gehen, die dann zwar abgekürzt werden, trotzdem aber die Rechenarbeit erschwert und aufgehalten haben. Man vergleiche folgende Aufgabe: Die Bestellungskosten eines Ackerstückes dürfen normalmäßig durchschnittlich nicht mehr als 37,75 ℳ für den ha betragen. Wieviel Bestellungskosten wird nach diesem Satze ein Ackerstück von 2 ha 23,75 a Größe verursachen? Bei der Ausrechnung berechnen wir 6 Dezimalstellen der Mark, von denen zwei bzw. drei Dezimalstellen genügen, während die andern überflüssig sind. Hier würde das abgekürzte Dezimalbruchrechnen am Platze sein.

Das abgekürzte Dezimalbruchrechnen kann bei allen 4 Grundrechnungsarten angewendet werden, praktisch ist es aber nur bei dem Vervielfachen. Folgende Beispiele sollen dies beweisen und zugleich die Art dieses Rechnens lehren.

a) Abgekürztes Zusammenzählen.

Bei dem Zusammenzählen vielstelliger Dezimalbrüche kann man die Lösungsform vereinfachen, ohne die Genauigkeit des abzukürzenden Ergebnisses zu beeinflussen. Bei der folgenden Aufgabe soll das Ergebnis auf 2 Dezimalstellen abgekürzt werden.

a) Bisherige Form	b) Abgekürzte Form	
18,45623	18,4562	3
27,590275	27,5902	75
0,923658	0,9236	58
7,607543	7,6075	43
9,2798564	9,2798	564
63,8575624	63,8573	

abgekürzt auf 2 Dezimalstellen gibt in beiden Fällen die gleichen Resultate 63,86. Man berechne also 2 Dezimalstellen mehr als verlangt werden, dadurch sind die verlangten Dezimalstellen gesichert. Das Zusammenzählen der bei b) rechts vom Strich stehenden Dezimalstellen ist überflüssig und hier erspart worden.

b) Abgekürztes Abziehen.

Auch bei dem Abziehen vielstelliger Dezimalbrüche kann man durch eine abgekürzte Lösungsform Vorteile erzielen. Das Resultat soll bei der folgenden Aufgabe auf 2 Dezimalstellen abgekürzt werden.

a) Bisherige Form	b) Abgekürzte Form	
16,587165	16,587	165
— 8,279324	— 8,279	324
8,307841	8,308	

abgekürzt auf 2 Dezimalstellen ergibt auch hier die übereinstimmenden Resultate 8,31. Bei dem Abziehen kann unter besonderen Umständen

r die nächste auf die abzukürzende Zahl von Stellen folgende Stelle
n Einfluß sein, deshalb rechnet man bei b) nur eine Stelle mehr als
clangt wird.

c) Abgekürztes Vervielfachen.

Bei dem Vervielfachen mit Dezimalbrüchen ist die Anzahl der Dezimal-
ellen im Ergebnis gleich der Summe der Dezimalstellen von der Grund-
ıhl und der Wiederholungszahl; es wird also eine größere Anzahl von
Stellen in Wegfall kommen können als bei den beiden vorgenannten
Brundrechnungsarten. Das Verfahren wird deutlicher, wenn man nicht,
ie sonst gebräuchlich, mit der kleinsten Einheit des Multiplikators, sondern
nit der größten Einheit desselben anfängt zu multiplizieren und dann
ntsprechend nicht ein-, sondern ausrückt. Vergleiche hierzu folgendes
Beispiel!

```
            13,45278
         ×   2,83659
        ----------------
            26,90556|
            10,76222|4
               40358|34
                8071|668
                 672|6390
                 121|07502
        ----------------
            38,16002|12202
abgekürzt   38,160  |
```

Soll das nebenstehende Resultat auf 3 Dezimalstellen abgekürzt werden, so würde zur Sicherung der 3. Stelle die Berechnung der beiden folgenden notwendig sein, da bei der Summierung vieler Posten eine Stelle nicht immer ausreicht. Was aber hinter der 5. Dezimalstelle steht, ist überflüssig und braucht nicht berechnet zu werden. Wir werden also bei dem obigen Beispiel den gesamten Multiplikandus zwar mit der Einerzahl 2 des Multiplikators multiplizieren; mit der in der Zehntelstelle stehenden 8 aber dürfen wir nur die 4. Dezimalstelle des Multiplikandus multiplizieren, wenn das Ergebnis in der 5. Stelle rechts vom Komma stehen soll, und bei jeder weiter nach rechts stehenden Stelle des Multiplikators müssen wir im Multiplikandus eine Stelle nach links gehen. Die Berechnung der obigen Aufgabe würde sich demnach folgenderweise gestalten:

```
             . . . . . .
            13,45278
             . . . . . .
             2,83659
        ----------------
            26,90556
            10,76216
               40356
                8070
                 670
                 117
        ----------------
            38,15985
  abgekürzt 38,160
```

Es ist zu empfehlen, bei der Ausrechnung sowohl die operierende Stelle im Multiplikator als auch die Stelle des Multiplikandus, bei der die Multiplikation beginnt, mit einem Punkt zu bezeichnen; ein Versehen ist

dann schwerer als ohne diese Punkte. — Die Anzahl der zu berechnenden Dezimalstellen ist gegeben, die Stelle des Multiplikandus, bei der die Multiplikation zu beginnen hat, muß gesucht werden. Sollen 5 Dezimalstellen berechnet werden, so würde man bei der 5. Dezimalstelle im Multiplikandus beginnen, wenn die erste Stelle im Multiplikator wie in der berechneten Aufgabe die Einerstelle ist; stünde diese erste Ziffer des Multiplikators in der Zehntelstelle, so würde man auf 5 Dezimalstellen im Resultat kommen, wenn man mit der 4. Dezimalstelle des Multiplikandus beginnen würde usw. Es ist demnach vor Beginn des Rechnens notwendig, festzustellen, mit welcher Stelle im Multiplikandus die Multiplikation zu beginnen hat. Man merke hierzu folgende Regel! Die Stelle im Multiplikandus, bei der die Multiplikation zu beginnen hat, erhält man, wenn man bei Dezimalzahlen im Multiplikator die Anzahl der Stellen links vom Komma zu der verlangten Anzahl der Dezimalstellen zählt und bei echten Dezimalbrüchen im Multiplikator die Anzahl der Stellen rechts vom Komma bis zur ersten geltenden Stelle von der verlangten Anzahl der Stellen abzieht. So wird bei der folgenden Aufgabe die 5. Stelle im Resultat sich ergeben, wenn ich mit der 3. Dezimalstelle im Multiplikandus beginne (5 — 2 = 3).

Beispiel: 3,876549
0,0632
0,23256
1161
76
0,24493 = 0,245

Noch kürzer wird die Lösungsform, wenn ich die zweite der wegzulassenden Stellen, die nur zur genauen Bestimmung der ersten wegzulassenden Stelle dient, nur in Gedanken vervielfache und das abgekürzte Ergebnis zum Produkt der nächsten Stelle zähle. Die kürzeste Lösung einer auf drei Dezimalstellen zu berechnenden Aufgabe wird demnach folgende sein:

27,582764
6,43259
165,4966
11,0331
8275
552
138
24
177,4286
abgekürzt 177,429

Wir rechnen die nebenstehende Aufgabe: 6 . 6 = 36 = 4, 6 . 7 = 42 + 4 = 46 (die 6 hingeschrieben und dann in der bekannten Weise durchmultipliziert); dann 4 . 7 = 28 = 3, 4 . 2 = 8 + 3 = 11 usw.

d) Abgekürztes Teilen.

Bei dem Teilen größerer Dezimalzahlen und der mehrfach benannten)len tritt die Abkürzung des Verfahrens dadurch ein, daß man auf verlangte Anzahl von Stellen bzw. auf die darstellbaren Größen der)rfach benannten Zahlen abkürzt. Diese Abkürzung und die Verwendung östreichischen Subtrahierens reichen für die Praxis vollständig aus. Doch man im Anschluß an das abgekürzte Verfahren bei den drei anderen undrechnungsarten auch für das Teilen eine Abkürzung gefunden, die r erwähnt werden soll, da sie in manchen Fällen verwendbar sein mag. ıs Wesen dieser abgekürzten Teilungsform besteht darin, daß man die ilungszahl nicht durch Anhängen von Nullen in die niederen Einheiten r Zehnerordnung verwandelt, sondern daß man vom Teiler Stellen streicht. Die Richtigkeit dieses Verfahrens erkennt man, wenn man denkt, daß die Teilungszahl durch das Nichtanhängen einer Null 10mal klein wird, als bei dem gebräuchlichen Verfahren, daß aber das sonst zielte Ergebnis gefunden wird, wenn diese 10mal so kleine Zahl durch nen 10mal so kleinen Teiler geteilt wird. Stünde in der letzten Stelle es Teilers eine Null, so würde das Resultat das gleiche sein, wie bei em bisherigen Verfahren; steht aber in der wegzustreichenden Stelle eine ndere Ziffer, so wird der Teiler in größerem Maße verkleinert als die eilungszahl; der Anteil wird dadurch zu groß. Dieser Fehler kann adurch zum Teil ausgeglichen werden, daß entweder beim Wegstreichen iner 5 oder einer größeren Ziffer die vorhergehende Stelle um Eins rhöht wird, oder daß die letzte der abgestrichenen Stellen in Gedanken mit vervielfacht wird und die Zehner des abgekürzten Resultates zu dem nächsten Ergebnis gezählt werden. An einem Beispiel sollen diese beiden Formen dem bisherigen ausführlichen Verfahren gegenübergestellt werden.

Beispiel: 27,8435 : 3,79245 (abgekürzt auf 3 Dezimalstellen).

a) Bisherige Form.

2784350 : 379245 = 7,3118, abgekürzt 7,342
1296350
1586150
691700
3124550
90590

b) Abgekürzte Form durch Wegstreichen bzw. durch Erhöhen der vorhergehenden Stelle.

2784350 : 379245 = 7,3418, abgekürzt 7,342
129635 : 37925
15860 : 3793
688 : 379
309 : 38
5

c) **Abgekürzte Form durch Weglassen und durch stilles Mitvervielfachen der letzten weggestrichenen Stelle.**

```
2784350 : 379245 = 7,3418, abgekürzt 7,342
 129635 : (37924)
  15861 : (3792)
    691 : (379)
    312 : (37)
      9
```

Die eingeklammerten Teiler fallen später weg. Wir erkennen aus dem Vorstehenden die Richtigkeit der am Anfang des Abschnitts aufgestellten Behauptung, daß das abgekürzte Dezimalbruchrechnen nicht Volksschulrechenstoff sein kann. Schulen mit höheren Rechenzielen mögen sich diese angenehme und unter Umständen nützliche Unterhaltung gestatten.

38. Verwandlung der gemeinen Brüche in Dezimalbrüche und der Dezimalbrüche in gemeine Brüche.

Zum Schluß der Abschnitte über Bruchrechnung mögen hier noch einige Worte über die gegenseitige Verwandlung der beiden Brucharten folgen. Die Notwendigkeit der Verwandlung des gemeinen Bruches in einen Dezimalbruch ergibt sich fast bei jeder Teilungs- und Regeldetri-Aufgabe (vergl. hierüber Abschnitt 39). Der dortbleibende Rest wird, wenn er den Teiler als Nenner annimmt, zum gemeinen Bruche; durch Verwandlung des Restes in die niederen dezimalen Einheiten entsteht der verlangte Dezimalbruch. Dies wird in jeder Schule geübt, und jeder Schüler versteht, daß $\frac{1}{5} = 1 : 5$ und $\frac{3}{5} = 3 : 5$ ist. Aus 3 Ganzen ließen wir seinerzeit $\frac{3}{5}$ entstehen, und diese Entstehungsart ist auch hier wieder maßgebend. Diese 3 Ganzen werden nun nicht in Fünftel, sondern in Zehntel verwandelt und durch 5 geteilt; so ergibt sich die Verwandlung des gemeinen Bruchs in den Dezimalbruch. Das Wesentliche hierbei ist bereits im Abschnitt 36 gegeben, als ganze Zahlen durch ganze Zahlen geteilt wurden. Für diese Aufgaben könnte man sofort die Stammbrüche mit den entsprechenden Nennern einsetzen. Welche Nenner nun endliche und welche unendliche, welche wieder rein-periodische und welche gemischt-periodische Dezimalbrüche ergeben, möge dort nachgesehen werden. Die zur Lösung des ersten Teils unserer Aufgabe notwendige Arbeit besteht daher in nichts weiterem, als in der Zurückführung eines Bruchs in eine Divisionsaufgabe; alles andere ist bekannt.

Soll die Volksschule nun auch die Dezimalbrüche in gemeine Brüche verwandeln? Die einfache Volksschule nicht, vielleicht in besonders günstigen Fällen die mehrklassige. Die einklassige Volksschule behandelt den Dezimalbruch nur soweit, wie es das Leben fordert; wird er zu lang, so läßt sie sich nicht auf allerlei interessante Untersuchungen über Periode oder Nichtperiode ein, sondern kürzt da ab, wo es notwendig wird. Doch ist es selbstverständlich, daß die Schüler der Lehrerbildungsanstalten mit dieser

Verwandlung vertraut sein müssen, da nach den Allgemeinen Bestimmungen schon die mehrklassige Volksschule die Lehre von den Dezimalen erweitern soll. Die drei Hauptarten der Dezimalbrüche werden gesondert behandelt. Der endliche Dezimalbruch hat einen bestimmten Nenner; er läßt sich sofort in die Form des gemeinen Bruchs bringen. Anders ist es bei den periodischen Dezimalbrüchen, da deren Nenner sich mit Weiterführung jeder Periode verändert. Unsere Aufgabe muß darin bestehen, zunächst einen Bruch festzustellen, der nicht bis ins Unendliche erweitert werden kann, dessen Nenner mithin gegeben ist. Durch Abziehen der periodischen Stellen voneinander fallen diese fort. Das Verfahren ist daher kurz folgendes: Der periodische Dezimalbruch wird mit einer Einheit der Zehnerordnung vervielfacht, so daß die erste Periode zur ganzen Zahl wird. (Nennen wir hier diese Einheit der Zehnerordnung der Bequemlichkeit wegen n.) Hinter dem Komma stehen immer noch unendlich viele Perioden. Von der erhaltenen Größe ziehe ich den Dezimalbruch selbst ab, dadurch heben sich all die Perioden, und die erste derselben bleibt als ganze Zahl übrig. Diese ist nun gleich dem n—1fachen, und so erhalte ich den einfachen Wert des Bruches, wenn ich die Periode durch n—1 teile. Beispiel: $0,\dot{4}6153\dot{8}\ldots$ soll in einen gemeinen Bruch verwandelt werden.

Das Millionenfache des Bruches ist $461538,\dot{4}6153\dot{8}\ldots$
„ Einfache „ „ „ $0,\dot{4}6153\dot{8}\ldots$

Das 999999 (n—1)fache $= 461538$
„ 1 fache $= \frac{461538}{999999} = \frac{6}{13}$.

Hieraus ergibt sich die Regel: *Einen rein-periodischen Dezimalbruch verwandelt man in einen gemeinen Bruch, wenn man der Periode so viele Neunen zum Nenner gibt als die Periode Stellen hat.* In ähnlicher Weise verfährt man bei der Verwandlung gemischt-periodischer Dezimalbrüche in gemeine Brüche. Man vervielfacht zuerst mit der Einheit der Zehnerordnung, die bewirkt, daß das Komma hinter die erste Periode gerückt wird, sodann mit der, die das Komma hinter die Vorziffern setzt. Zieht man nun den letzten Wert von dem ersten ab, so heben sich sämtliche Perioden, und der Unterschied zwischen den Vorziffern und der Zahl, die sich aus den Vorziffern und der ersten Periode ergab, ist der Zähler des Bruches, dessen Nenner die nach dem Abziehen gebliebene Anzahl der Vielfachen ist.

1. Beispiel: $0,8\dot{3}\ldots$ soll in einen gemeinen Bruch verwandelt werden!

Der 100fache Wert beträgt $83,\dot{3}\ldots$
„ 10fache „ „ also $8,\dot{3}\ldots$

Der 90fache Wert beträgt 75
„ 1fache „ „ $\frac{75}{90} = \frac{5}{6}$.

2. Beispiel: $0{,}10\dot{7}1428\dot{5}\ldots$ soll in einen gemeinen Bruch verwandelt werden!

Der 100000000fache	Wert	beträgt	$10714285{,}\dot{7}1428\dot{5}\ldots$
„ 100fache	„	„	$10{,}\dot{7}1428\dot{5}\ldots$
Der 99999900fache	Wert	beträgt	10714275
„ 1fache	„	„	$\frac{10714275}{99999900} = \frac{3}{28}$.

Es ergibt sich: **Ein gemischt-periodischer Dezimalbruch wird in einen gemeinen Bruch verwandelt, wenn man die Zahl aus den Vorziffern von der Zahl aus den Vorziffern und der Periode abzieht und diesem Unterschied eine Zahl zum Nenner gibt, die aus so vielen Neunen besteht als periodische Stellen, und so vielen Nullen als Vorziffern vorhanden sind.** Eine zweite einfache Entwicklung dieser Regel würde sein, wenn man den gemischt-periodischen Dezimalbruch durch Vervielfachen zunächst in einen rein periodischen und diesen in einen gemeinen Bruch verwandelt, und nun die erhaltene gemischte Zahl durch Teilen durch die vorige Wiederholungszahl auf den einfachen Wert zurückführt. Soll nicht nur der Dezimalbruch verwandelt werden, sondern soll diese Verwandlung zur Entwicklung der Regel dienen, so darf man den aus der reinen Periode erhaltenen gemeinen Bruch nicht kürzen. Beispiel: Es soll der Dezimalbruch $0{,}15\dot{9}\dot{0}\ldots$ in einen gemeinen Bruch verwandelt werden! Durch Vervielfachen mit 100 entsteht die gemischte Zahl $15{,}\dot{9}\dot{0}\ldots$ Die Verwandlung des reinperiodischen Dezimalbruchs in einen gemeinen Bruch ergibt $15\frac{90}{99}$. Um durch 100 teilen zu können, verwandle ich 15 in $\frac{\ }{99}$. 1 Ganzes hat 100—1 Neunundneunzigstel, 15 Ganze haben 1500—15 Neunundneunzigstel, hierzu die vorhandenen $\frac{90}{99}$ gibt $\frac{1590-15}{99}$, das sind $\frac{1575}{99}$ (also die Zahl aus den Vorziffern [15] von der Zahl aus den Vorziffern und der Periode [1590] abgezogen). Diese Größe ergibt durch *100* geteilt, $\frac{1575}{9900} = \frac{7}{44}$.

Aufgaben zu diesem Abschnitt finden sich im 4. Heft der Ausgabe A, Gruppe 38 und im 3. Heft der Ausgabe B, Gruppe 36; doch sind in Ausgabe B nur endliche Dezimalbrüche herangezogen worden.

39. Die Anwendung der Bruchrechnung auf Regeldetri und Durchschnittsrechnung.

Die praktische Verwertung der Bruchrechnung an Aufgaben, die dem Leben entnommen sind, vereinigt beide Bruchrechnungsarten. Das Kind hat gelernt, wie es mit gemeinen Brüchen und wie es mit Dezimalbrüchen rechnen muß; jetzt kommt es darauf an, bei zusammengesetzten Aufgaben, wie sie das Leben bietet, zu entscheiden, welchen Bruch man anwenden und welche Form man dem Resultate geben soll. Regeldetri- und Durchschnittsrechnungs-Aufgaben, bei denen nur gemeine Brüche verwendet werden, dürften sich selten ergeben, wenn nicht Siebentel Mark oder Neuntel kg eingesetzt werden sollen; andernfalls lassen sich gemeine Brüche nicht

vollständig vermeiden. Betrachten wir die gesamte Bruchrechnung als eine größere methodische Einheit, so wird die Stufe der Vorbereitung zu den vier Grundrechnungsarten und die der Anwendung derselben beiden Bruchrechnungsformen gemeinsam sein.

Diese Anwendung der Bruchrechnung auf Regelbetri und Durchschnittsrechnung wird in den meisten Fällen zur Bruchrechnung gerechnet, d. h. mit dieser in demselben Schuljahr durchgenommen. Auch wir lassen diese Anwendung sofort auf die Bruchrechnung folgen, doch mit dem Unterschiede, daß die Osterferien, also auch die Versetzung und die Neubildung der Rechenabteilung dazwischen liegen. Die Gründe hierfür sind schon früher angedeutet worden. Es dürfte einerseits schwer und nur auf Kosten der Sicherheit und Selbständigkeit der Kinder im Rechnen zu erreichen sein, daß die Bruchrechnung früher als im 6. Schuljahre begonnen wird. Andererseits ist es wünschenswert, daß den auf der Bruchrechnung beruhenden praktischen Aufgaben eine möglichst lange Zeit gewidmet wird, um in diesem wichtigen Gebiete vollständige Fertigkeit zu erzielen. Rechnen wir auf die zuletzt genannten Aufgaben das 7. und 8. Schuljahr, so bleibt für die Bruchrechnung nur das 6. Schuljahr übrig. Ein Schuljahr aber ist zu kurz, um neben der Bruchrechnung noch die Anwendung derselben auf Regelbetri und Durchschnittsrechnung zu bewältigen; dagegen reicht es zur Durchnahme der eigentlichen Bruchrechnung vollständig aus. Wir behandeln demnach im 6. Schuljahre nur die Bruchrechnung und bringen im 7. Schuljahre (also nur schulzeitlich getrennt) die Anwendung derselben auf Regelbetri und Durchschnittsrechnung.

In diese Regelbetri- und Durchschnittsrechnungs-Aufgaben lassen sich fast alle sachlichen Verhältnisse, die in den sogenannten bürgerlichen Rechnungsarten behandelt werden, einfügen, soweit sie nicht die Verhältnis- und Prozentbestimmungen voraussetzen. Die Regelbetri steht hier vor der Durchschnittsrechnung, weil jetzt die Durchschnittsrechnung die Regelbetri als bekannt voraussetzen muß, da sie nicht nur Zusammenzählen und Teilen verbindet, sondern auch das Vervielfachen mit in ihren Kreis zieht.

Bei der Regelbetri bemerken wir, daß auch hier die Aufgaben, die auf dem Schlusse von der Einheit auf die Mehrheit und auf dem von der Mehrheit auf die Einheit beruhen, schon bei dem Vervielfachen und Teilen mit Brüchen herangezogen worden sind; es bleiben zur Neubehandlung also nur die Aufgaben übrig, bei denen von der Mehrheit auf die Mehrheit geschlossen wird. Eine große Anzahl dieser berechtigten Aufgaben läßt sich im Kopfe lösen, und es wäre deshalb ein bedeutender Fehler, wenn das Kopfrechnen nicht in sein Recht treten sollte. Wieviel kg man für 3,75 ℳ erhält, wenn 3 kg 300 g 4,50 ℳ kosten, läßt sich von einem geübten Rechner im Kopfe lösen. Die Schüler suchen ein gemeinschaftliches Maß, vielleicht das größte, und der Schluß von 6 auf 5 Einheiten ist ein altgewohnter. Überblick über die Zahlen und Sicherheit in der Beurteilung derselben werden hier verlangt und gestärkt. Man gewöhne die Schüler, daß sie bei ähnlichen, nicht zu schweren Aufgaben nicht mutlos abbrechen, wenn sie die Einheit nicht finden, sondern daß sie bis zum endlichen Erfolge unter der vorsichtigen, sich auf das Nötigste beschränken-

den Führung des Lehrers arbeiten und hierdurch nicht nur ihre Rechenfertigkeit, sondern, was noch mehr wert ist, ihre Verstandes- und Willenskraft stärken. Bei den Aufgaben selbst sind Bruchteile von Jahren, Monaten und Wochen, von Mandel und Dutzend usw., also gemeine Brüche, mit Bruchteilen von Münzen, Maßen und Gewichten, also mit Dezimalbrüchen, angemessen zu verbinden. Vielfach können beide Bruchарten bei denselben Größen angewendet werden. Nicht, daß man Dezimalbrüche auf nicht dezimal geteilte Einheiten beziehen sollte, denn $0{,}1\dot{6}$. Jahr ist ein Unding, sondern daß Teile von dezimal geteilten Größen in der Form gemeiner Brüche vorkommen. Es ist das die Folge von der langjährigen Gewöhnung des Volkes, und unsere ältere Generation wird sich trotz der unleugbaren Vorteile der dezimalen Form nicht so schnell und leicht daran gewöhnen. Weshalb sollte man auch gegen halbe, Viertel- und Fünftel-Mark sich ereifern, wenn sie im Rechnen verwendet werden? Besonders das Kopfrechnen wird gern darauf zurückgehen. Und doch, wie verschwinden allmählich selbst diese berechtigten gemeinen Brüche! Wie viele sind es, die noch von diesen halben, Viertel- und Fünftel-Mark sprechen? (Sechstel- und Siebentel-Mark usw. dürfen überhaupt nicht vorkommen). Das kostet einen halben Taler, hört man heute noch oft; selten aber sagt man: das kostet eine halbe Mark. Die 50, 25 und 20 Pfennige sind zu bequem. Man hört auch $\frac{1}{2}$ Pfund und $\frac{1}{4}$ Pfund, nicht aber $\frac{1}{2}$ kg, oder $\frac{1}{4}$ oder $\frac{1}{8}$ kg, auch hier werden vom Volke schon die Gramm genannt. Wenn also auch nicht die dezimale Ausdrucksform gewählt wird, dezimal gedacht ist es doch.

Die schriftliche Form der Regeldetri-Aufgaben schließt sich der bekannten Form des Bruchsatzes an. Zunächst ist hier die Auflösung außerordentlich wichtig. Wieviel nehme ich in $1\frac{1}{4}$ Jahr ein, wenn meine Einnahme in $\frac{3}{4}$ Jahr 2200 ℳ beträgt? Ziehen wir sogleich Ansatz und Auflösung zusammen und schreiben

$$\text{a)}\left\{\begin{array}{l}\frac{3}{4}\ \text{Jahr}\\ \frac{1}{4}\\ 1\end{array}\right. \quad \frac{2200\ \text{ℳ}\ .\ 4}{3}$$

Das würde dem Verfahren im Kopfrechnen entsprechen. Es ist sicher und verständlich, wenn wir von $\frac{3}{4}$ auf $\frac{1}{4}$ und dann auf 1 schließen. Die Schüler mögen eine Reihe solcher Schlüsse bilden, um darin ganz sicher zu werden, um aber auch zu erkennen, daß wir direkt von $\frac{3}{4}$ auf 1 schließen und so einen Schluß ersparen können. Letzteres muß uns sehr viel wert sein; denn bei dem Tafelrechnen ist die möglichst kurze Form eine Hauptbedingung; Zeit ist Geld, sagt unsere nach Erwerb hastende Zeit.

Man stelle auch noch folgende Erwägung auf: Wenn 5 Jahre x ℳ Einnahme bringen, so erhalten wir die Einnahme von 1 Jahr durch Teilen der x ℳ durch 5; durch 7 muß geteilt werden, wenn wir von 7 Jahren auf 1, durch 13, wenn wir von 13 Jahren auf 1 Jahr schließen; wir teilen also stets durch die angegebene Zahl der Jahre, also hier auch

durch $\frac{3}{4}$ usw. Ich betone, daß ich diesen Schluß vom Bruch auf 1 nicht sogleich bei der Einführung verlange, sondern erst, nachdem längere Zeit das obenstehende Verfahren geübt und verstanden worden ist, und daß diese Form nicht im Kopfrechnen, sondern im schriftlichen Rechnen als Abkürzung desselben eintritt. Wir werden auch hier die gekürzten Ansatzformen mit demselber Rechte anwenden können, mit dem wir sonst beim schriftlichen Rechnen nach wohl verstandener Begründung nicht mehr mit Zahlengrößen, sondern mit Ziffern rechneten. Dasselbe ergibt sich, wenn wir nun weiter von 1 Jahr auf $\frac{4}{3}$ Jahr schließen wollen.

b) $\frac{3}{4}$ Jahr $\frac{2200\ ℳ . 4 . 4}{3 . 3}$
1 „
$\frac{4}{3}$ „

Nach kürzerer Zeit noch, als für die Abkürzung des ersten Schlusses erforderlich ist, wird hier der Schüler von 1 direkt auf $\frac{4}{3}$ schließen lernen, ist doch die Vorbereitung bei den vier Grundrechnungsarten so genügend geschehen, daß das Kind jederzeit über die Gründe des Verfahrens Rechenschaft geben kann. Dasselbe wird bei den Aufgaben mit Dezimalzahlen geschehen. Die Aufgabe heißt: Mehrere Frauen lassen sich aus Bayern Butter senden. Die Butter wiegt 4,560 kg und kostet 10,05 ℳ. Wieviel muß eine der Frauen bezahlen, welche $1\frac{3}{4}$ Pfd. Butter erhält? ($1\frac{3}{4}$ Pfd. ist in Hausfrauenkreisen noch gebräuchlich, obschon die Hausfrau bei dem Abwiegen gezwungen wird, diese $1\frac{3}{4}$ Pfd. in kg umzuwandeln. Auch das Kind muß in dieser Umrechnung geübt werden. Für $1\frac{3}{4}$ Pfd. setzt man also 0,875 kg). Die Lösung der Aufgabe würde folgende sein:

4,560 kg k. $\frac{10,05\ ℳ . 0,875}{4,560}$
1 „
0,875 „

Das sind kurze bestimmte Schlüsse, die sich an gewohnte Formen anschließen, die verstanden werden und Zeit ersparen. Vervielfachen und Teilen von dezimalen Größen sind geübt, so daß das Kind rechnet:

```
   10,05
   0,875
 -------
   5 025
  70 35
 804 0
 -------
 8,79,375 : 4,56 = 1,928 ℳ
 4233              1,93  ℳ
  1297
   3855
    207
```

Manche Rechenbücher eifern auch hier absichtlich oder vielleicht auch unabsichtlich gegen das Dezimalbruchrechnen, wenn sie in dem obenstehenden Regeldetriansatz die Dezimalzahlen durch Erweitern in ganze Zahlen verwandeln. Sie lehren folgende Schwülstigkeiten:

$$\frac{10{,}05\ \mathcal{M}\ .\ 0{,}875}{4{,}560} = \frac{1005\ .\ 875\ .\ 1000}{4560\ .\ 1000\ .\ 100}$$

Kürzt man nun auch 1000 gegen 1000, so erhält man doch 1005 . 875 = 879375 : 456000, und erst wenn unsere Forderung in Abschnitt 36 erfüllt und die Nullen des Teilers gestrichen werden, folgt die von uns auf viel kürzerem Wege enthaltene Aufgabe: 879,375 : 456. Wer in dieser Weise das Multiplizieren von Dezimalzahlen vermeidet, brauchte es wahrlich nicht erst zu lehren.

Es ist auch mit Beharrlichkeit darauf zu halten, daß die Resultate in der notwendigen Bruchform ausgedrückt werden. $\frac{17}{131}$ ℳ oder $\frac{14}{23}$ kg ist ebenso zu verwerfen wie 0,165 Jahr. Ergeben sich z. B. bei der Berechnung von Jahren Reste, so verwandelt man diese selbstverständlich in die kleineren Einheiten, die hier eben nicht dezimale sind, nämlich in Monate und die Monate wieder in Tage. Häufig z. B. bei Zahlungsbestimmungen wird dann jeder auch noch so kleine Bruchtag für voll gerechnet werden müssen; andernfalls benutzt man die dezimale Form, d. h. man untersucht, ob 0,5 oder mehr oder weniger im Resultat erscheint und kürzt dann in bekannter Weise wieder ab.

Die Durchschnittsrechnungsaufgaben sind ebenfalls dem praktischen Leben entnommen; auch sie verwenden beide Arten der Brüche und bestimmen die Resultate je nach den der betreffenden Größe zugrunde liegenden Währungszahlen (vgl. Abschnitt 26).

Die Sicherheit und Selbständigkeit der Schüler bei der Beurteilung und Lösung dieser Aufgaben ist ein wesentliches Moment des gesamten Rechenunterrichts. Was hier geübt und gelernt wird, findet nicht nur bei den sogenannten bürgerlichen Rechnungsarten seine Verwendung, sondern es wird vor allem mit dazu beitragen, daß wir der Forderung, „Nicht für die Schule, sondern fürs Leben“ gerecht werden. Jeder weiß ja, wie leicht unsere Schulen trotz aller gegenteiligen Bemühungen immer wieder bloßes Schulwissen erzielen; jeder kennt die Unbeholfenheit der ins Leben tretenden Knaben und Mädchen und die Klagen derer, die mit solcher Unbeholfenheit zu tun haben. Wir haben deshalb an dieser Stelle neben einer Reihe von gleichartigen praktischen Aufgaben einige Sachgebiete eingeschoben, die in Delitzsch besonders wichtig sind, d. i. die Tabaksindustrie und die Landwirtschaft. In anderen Gegenden läßt sich leicht passender Ersatz finden.

Möge die Beachtung der Forderungen dieses Abschnitts dazu beitragen, daß die Klagen über unpraktisches Schulwissen immer mehr ihre Berechtigung verlieren, da auch im Rechnen die Schule ihre Aufgabe erfüllt.

Die Aufgaben findet man in Schroeter, Tafelrechnen, Ausgabe A, 5. Heft, Gruppe 1 bis 7 und Ausgabe B, 3. Heft, Gruppe 38 bis 43.

40. Die erweiterte Regelbetri.

Die alte Rechenkunst kannte neben der Regel von drei noch die **Regel von 5, von 7 usw.** und behandelte diese als gesonderte **Rechnungsarten**. Später sprach man von **Vielsatz**, von **zusamengesetzter Regelbetri** u. a.; jetzt faßt man alle diese Aufgaben unter dem Namen **erweiterte Regelbetri** zusammen. Wie zu einer einheitlichen Bezeichnung, so ist man auch zu einer einheitlichen schriftlichen Lösungsform gekommen. Die früher gebräuchliche Lösungsform des Kettensatzes wird nur äußerst selten sich noch vorfinden und ist zu verwerfen; alle Aufgaben werden jetzt nach dem Bruchsatze gelöst. Daß die Schule den Kettensatz nicht begünstigt, ist leicht erklärlich, da er zu totem Mechanismus führt, während die ebenso schnelle, übersichtliche und dabei sichere Lösungsform des Bruchsatzes stets auf lebendigem Schaffen beruht. Hätte aber das gewerbliche Leben den Kettensatz beibehalten, so würde auch die Schule ihn nicht ganz fallen lassen dürfen. Aber selbst im Verkehrsleben ist der Kettensatz fast verschwunden. Die Gründe hierfür sind leicht zu finden. Bei jedem Handelsgeschäft kamen früher so viele Umrechnungen (Zwischenverhältnisse) vor, daß man, sollte die Rechnung nicht allzuweit ausgedehnt werden, das mechanischste Verfahren der Gegenüberstellung, d. i. den Kettensatz, mit Freuden anwendete. Seit Einführung des neuen internationalen Maßes und Gewichtes sind diese Umrechnungen auf einen sehr kleinen Bruchteil des früheren Ganzen beschränkt worden, so daß derartig vielgliedrige Regelbetriaufgaben überhaupt nicht mehr vorkommen. Für diese einfacheren, wesentlich auf Nebenverhältnissen beruhenden Aufgaben ist deshalb der Bruchsatz die bequemste Lösungsform, und das Nebeneinanderschreiben der Faktoren im Zähler und Nenner erleichtert die Übersicht. Zu erwähnen dürfte hier sein, daß, obwohl das gewerbliche Leben den Kettensatz fast nicht mehr anwendet, viele Rechenbücher für Fortbildungsschulen diese mittelalterliche Lösungsform noch pflegen. In die Volksschule aber gehört er nicht; wir behandeln in der Volksschule als schriftliche Form dieser Regelbetriaufgaben den Bruchsatz und lassen den Kettensatz ganz fallen.

Die erweiterte Regelbetri weist entschieden mehr auf das Tafelrechnen als auf das Kopfrechnen hin. Nur leichte Aufgaben mit übersichtlichen und wenn möglich geraden Verhältnissen läßt man bei der Einführung im Kopfe lösen. Man kann hierbei zwei Wege einschlagen. Entweder man zerlegt die zusammengesetzte Aufgabe in zwei Regelbetriaufgaben, oder man vereinigt die Verhältnisse der einzelnen Angaben. Folgende Aufgabe soll auf jede der angegebenen Arten schulgemäß gelöst werden. Die Aufgabe heißt: 4 Arbeiter verdienen in 3 Tagen 26,40 ℳ; wieviel verdienen bei gleichem Lohne 5 Arbeiter in 7 Tagen? 1. Lösung: Wenn 4 Arbeiter in 3 Tagen 26,40 ℳ verdienen, so verdient 1 Arbeiter in 3 Tagen den 4. Teil von 26,40 ℳ = 6,60 ℳ, und 5 Arbeiter verdienen in 3 Tagen 5mal 6,60 ℳ = 33 ℳ; wenn 5 Arbeiter in 3 Tagen 33 ℳ verdienen, so verdienen sie in 1 Tage den 3. Teil von 33 ℳ = 11 ℳ und in 7 Tagen 7mal 11 ℳ = 77 ℳ. — Durchaus gerechtfertigt würde auch das Zuzückgehen auf 1 Arbeiter in 1 Tage sein. — 2. Lösung: 4 Ar-

beiter verdienen in 3 Tagen 12 Teile, und 5 Arbeiter verdienen in 7 Tagen 35 Teile. 12 Teile sind 26,40 ℳ, dann ist 1 Teil $\frac{1}{12}$ von 26,40 ℳ = 2,20 ℳ und 35 Teile 35mal 2,20 ℳ = 77 ℳ.

Aber selbst bei dem Tafelrechnen braucht das Kopfrechnen in dieser Zeit nicht versäumt zu werden; es wird sich im Gegenteil bei der Vereinigung der Faktoren im Zähler und Nenner die günstigste Gelegenheit bieten, die Kopfrechenfertigkeit zu erhalten und zu erhöhen. Der Lehrer halte daher streng darauf, daß bei der Einführung der neuen Rechnungsart jede Teilaufgabe, die im Kopfe zu lösen ist, auch ohne schriftliche Hilfe gelöst werde, und er gewöhne die Kinder schon früh daran, dieses Verfahren auch bei der eigenen Arbeit zu beobachten.

Bei der Einführung der erweiterten Regelbetri wird eine einfache Regelbetriaufgabe zugrunde gelegt. Wieviel verdienen 7 Arbeiter, wenn 5 Arbeiter in derselben Zeit 36 ℳ verdienen? Die Lösung der vorstehenden Aufgabe ist bekannt. Die Aufgabe wird durch Ausnutzung der Zeitbestimmung erweitert werden können, daher der Name. Wieviel verdienen 7 Arbeiter in 8 Tagen, wenn 5 Arbeiter in 3 Tagen 36 ℳ verdienen? Wir lösen, wie unter a) in der ausführlichen Form schriftlich angegeben ist: 5 Arbeiter verdienen in 3 Tagen 36 ℳ; 1 Arbeiter verdient in 3 Tagen den 5. Teil; 1 Arbeiter verdient in 1 Tag den 3. Teil; 7 Arbeiter verdienen in 1 Tag 7mal so viel und in 8 Tagen 8mal so viel.

Die schriftliche Darstellung wird also folgende Form annehmen:

a) Ausführliche Form.

Ansatz: 5 Arbeiter in 3 Tagen 36 ℳ
7 „ „ 8 „ ?

Auflösung: 5 Arbeiter in 3 Tagen $\frac{{}_{12}\not{36}\ ℳ\ 7 \cdot 8}{5 \cdot \not{3}} = 134{,}40$ ℳ
1 „ „ 3 „
1 „ „ 1 Tag
7 „ „ 1 „
7 „ „ 8 Tagen

b) Abgekürzte Form.

Ansatz und Auflösung: 5 Arb. in 3 T. $\frac{{}_{12}\not{36}\ ℳ\ 7 \cdot 8}{5 \cdot \not{3}} = 134{,}40$ ℳ
1 „ „ 1 „
7 „ „ 8 „

Zur abgekürzten Form ist noch zu bemerken, daß die Vereinigung von Ansatz und Auflösung erst geschieht, wenn an mehreren Aufgaben die ausführliche Form zum Verständnis gebracht worden ist, daß aber andererseits erstrebt werden soll, diese Zurückführung der fünf untereinander stehenden Reihen der Auflösung auf drei möglichst bald, schon nach wenigen Aufgaben, eintreten zu lassen.

Die letztere Verkürzung wird keine Schwierigkeiten bereiten, wenn man die Schüler gewöhnt, nicht etwa in die zweite Reihe zuerst lauter

„Einsen“ zu schreiben und dann die Übertragung an dem Bruchstriche mechanisch zu bewerkstelligen, sondern von einer Einheit zur andern langsam fortzuschreiten und jeden Schluß sofort zu vermerken; sie lesen somit fast vollständig die ausführliche Form, schreiben aber die abgekürzte. Die Kinder schließen bei Form b): 5 Arbeiter in 3 Tagen 36 ℳ; 1 Arbeiter in 3 Tagen den 5. Teil (5 unter den Bruchstrich); in 1 Tag den 3. Teil (3 unter den Bruchstrich); 7 Arbeiter in 1 Tag 7mal so viel (7 über den Bruchstrich); in 8 Tagen 8mal so viel (8 über den Bruchstrich).

In früherer Zeit begnügte man sich nicht mit diesen fünfgliedrigen Aufgaben, sondern suchte durch fortwährendes Einschieben neuer Verhältnisse möglichst vielstellige Aufgaben zu erzielen. Man bedachte dabei nicht, daß man sich mit jedem neuen Verhältnisse immer weiter von der Wirklichkeit, die auch hier die Kontrolle über die Aufgaben üben muß, entfernte. Um diese Übertreibung deutlich zu machen, soll die oben gelöste Aufgabe in der Art erweitert und ausgebaut werden, wie es manche Rechenhefte mit Vorliebe taten und zum Teil noch tun. — Zunächst wurden die Zeitbestimmungen dadurch weiter ausgenutzt, daß die Stunden, welche täglich gearbeitet werden, herangezogen wurden. Die Aufgabe lautete dann vielleicht: Wieviel verdienen 7 Arbeiter in 8 Tagen bei täglich 12stündiger Arbeit, wenn 5 Arbeiter in 3 Tagen bei täglich 10stündiger Arbeit 36 ℳ verdienen? Auch hier veränderte diese neue Bestimmung das Ergebnis, da es ein Unterschied ist, ob die Arbeiter täglich 10 oder 12 Stunden arbeiten. Sodann wurde die Aufgabe vielleicht durch Einschiebung von Arbeitern mit verschiedener Arbeitskraft erweitert. Am deutlichsten trat das hervor, wenn Männer und Frauen gegenüber gestellt wurden. Die Aufgabe würde dann etwa lauten: Wieviel verdienen 7 Frauen in 8 Tagen bei täglich 12stündiger Arbeit, wenn 5 Männer in 3 Tagen bei täglich 10stündiger Arbeit 36 ℳ verdienen und die Arbeit von 4 Frauen gleich der von 3 Männern ist? Die Lösung mußte zunächst die Gleichung zwischen der Leistung eines Mannes und der einer Frau in ein Verhältnis umwandeln. Ein Mann leistet 4 Teile und eine Frau nur 3 Teile. Die Auflösung lautet dann:

5 M. verd. i. 3 Tg. b. 10stünd. Arb. u. 4 Verdienst=Teil.
1 M. „ „ 1 „ „ 1 „ „ „ 1 „ Teile
7 Fr. „ „ 8 „ „ 12 „ „ „ 3 „ Teilen

$$\frac{\overset{9}{\cancel{36}}\,ℳ \cdot 7 \cdot 8 \cdot \overset{6}{\cancel{12}} \cdot \cancel{3}}{\underset{5}{5 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{10} \cdot \cancel{4}}} = 120{,}96\,ℳ$$

Zu merken ist, daß alle die nicht direkt, sondern in der Form von Verhältnissen, Gleichungen oder Prozenten gegebenen Bestimmungen in die Verhältnisform verwandelt werden müssen; denn so lassen sie sich am leichtesten mit in den Ansatz und in die Auflösung einordnen. — Während die bis jetzt der einfachen Regelbetriaufgabe eingefügten neuen Bestimmungen stets das Resultat veränderten, da für die Größe der verdienten Summe Arbeiterzahl, Zeit und Arbeitskraft bestimmende Faktoren sind, so können auch noch Verhältnisse hinzukommen, die nicht die Größe, sondern nur die Form des Resultates ändern. Wenn z. B. die Aufgabe lautete: Wie viele Frk. verdienen 7 Frauen in 8 Tagen bei täglich

12stündiger Arbeit und je 3 Verdienstteilen, wenn 5 Männer in 3 Tagen bei täglich 10stündiger Arbeit und je 4 Verdienstteilen 36 ℳ verdienen? so änderte die Verhältnisbestimmung zwischen ℳ : Frk. = 5 : 4 wohl die Form der 120,96 ℳ, nicht aber die Größe der Summe. Verhältnisse, die nicht die Größe, sondern nur die Form des Resultates änderten, die also nur zur Umrechnung dienten, wurden Zwischenverhältnisse genannt; die andern nannte man Nebenverhältnisse. Zwischenverhältnisse waren es vorzüglich, welche in früherer Zeit die Vielsatzaufgaben so umfangreich machten.

Wir wiederholen, daß wir auf eine derartige Erweiterung der Regelbetriaufgaben verzichten; ist doch schon bei den fünfstelligen Aufgaben die an alle angewandten Aufgaben zu stellende Forderung, daß dieselben leichtverständlich und auch wahr sein sollen, recht schwer zu erfüllen. Lehrer und Aufgabenbücher wollen möglichst vielseitig werden; sie kommen deshalb auf allerlei ungewöhnliche Formen und Verhältnisse, die meistenteils dem Kinde unverständlich sind. Man soll wenig Sachverhältnisse, diese aber in erschöpfender Weise heranziehen; dadurch wir dauch die Zeit, die sonst die umfassenden sachlichen Erklärungen forderten, erspart. Die heranzuziehenden Sachverhältnisse sind dem Verkehr der betreffenden Gegend zu entnehmen; die oft nur oberflächliche Kenntnis, die der Schüler von diesen Verhältnissen besitzt, wird dadurch vertieft; der Schüler gewinnt Interesse; er lernt beobachten und beurteilen. Falsch ist es demnach, wenn in den Schulen einer Gebirgsgegend die Aufgaben vorwiegend Verhältnisse heranziehen, die dem Seehandel und dem Landbau entnommen sind, oder wenn das Kind in einer fruchtbaren, aber fabrikarmen Niederung über Spindeln und Spulen einer mechanischen Weberei oder dergleichen durch den Rechenunterricht aufgeklärt werden soll. Jede Gegend bietet Stoff zu passenden Aufgaben; der Lehrer soll nur beobachten und suchen, er wird dann auch finden (vgl. II Abschnitt 2).

Aufgaben allgemeinen Charakters führen oft zu allerlei falschen Schlüssen, und das um so mehr, je mehr Verhältnisse in eine Aufgabe hineingepreßt werden. Ich finde folgende Aufgabe: Wie lange brauchen 7 Arbeiter, um einen Graben von 20 m Länge, $1\frac{1}{2}$ m Breite und 1 m Tiefe auszuwerfen, wenn 4 Arbeiter zu einem Graben von 25 m Länge, 2 m Breite und $\frac{3}{4}$ m Tiefe 30 Tage gebrauchen? Abgesehen von der verschiedenen Bodenbeschaffenheit und der größeren Unterstützung, die die vergrößerte Arbeiterzahl sich zuteil werden lassen kann, wodurch also eine sichere Rechnung schon ausgeschlossen ist, könnte auch die Aufgabe durch logische Schlüsse zu haltlosen Resultaten führen. Bleiben wir bei dem Bedingungssatze stehen; dieser sagt: 4 Arbeiter werfen einen Graben von 25 m Länge, 0,75 m Tiefe und 2 m Breite in 30 Tagen aus. Demnach würden 40 Arbeiter nur 3 Tage, 400 Arbeiter gar nur, wenn der Tag zu 12 Arbeitsstunden gerechnet wird, $3\frac{3}{5}$ Stunden, 4000 Arbeiter wenig mehr als 20 Minuten brauchen usw. Ein Lastfuhrmann fährt für gewisses Geld 1 t 10 km weit, wie weit fährt er für dasselbe Geld 500 kg? 5 kg? 1 kg? 1 g? usw. Die Sammlung von ähnlichen, wenn auch vielleicht nicht ganz so auffallenden Beispielen, könnte mit Leichtigkeit

vermehrt werden. — Also fordern wir wiederholt eine sorgfältige **Vorbereitung** an der Hand guter Aufgabensammlungen mit Berücksichtigung **der örtlichen** Verhältnisse.

Häufig begegnet man nun der Forderung, daß die Aufgaben der **erweiterten** Regeldetri unter beschränkten Schulverhältnissen am ehesten **wegzulassen** seien, da sie für unsere Volksschulen zu weit gehen. Selbst **bei dem** ernsten Streben, der Volksschule, besonders der einklassigen, **möglichst** viele Erleichterungen zu bringen, kann ich doch dieser Forderung **nicht** zustimmen. Die einfache Zinsrechnung verlangt die Regeldetri mit **fünf** Gliedern, also erweiterte Regeldetri, und die Zinsrechnung soll **doch** nicht auf den Aussterbeetat gesetzt werden. Man vermeide aber **alle** schwülstigen Aufgaben und berücksichtige neben den allgemeinen **örtlichen** Verhältnissen auch die besonderen der Schule; man gebe also die **Formen**, die im späteren Leben verwendet werden.

G r u p p i e r u n g d e r A u f g a b e n (Schroeter, Tafelrechenhefte, Ausg. A, 5. Heft, Gruppe 8; Ausg. B, 3. Heft, Gruppe 44).

Da nur 5gliedrige Aufgaben gerechnet werden, so wird nur danach unterschieden, ob die herangezogenen Verhältnisse gerade oder umgekehrte sind.

1. In einer Fabrik brannten bisher 96 Gasflammen; sie brauchten in einer Stunde 19,200 cbm Leuchtgas. Durch einen Erweiterungsbau wird die Zahl der Gasflammen um 28 vermehrt; wieviel cbm Gas werden nun die Gasflammen der Fabrik in $3\frac{1}{2}$ Std. brauchen? (Gerade Verhältnisse.)

2. 5 Schüler bestreiten eine 8tägige Reise mit 135 ℳ; wie lange werden bei gleichem Verbrauche 7 Schüler mit 210 ℳ reichen? (Gerades und umgekehrtes Verhältnis.)

Bemerkung: In den Rechenheften folgen diesen mehr dem Tafelrechnen zuneigenden Aufgaben besonders praktische und leicht im Kopf zu lösende Aufgaben aus dem Sachgebiet „Unser Verkehrswesen“. Die notwendigen Erläuterungen stehen im Text der Bücher. (Schroeter, Tafelrechnen, Ausg. A, 5. Heft, Gruppe 9 und Ausg. B, 3. Heft, Gruppe 45.)

41. Die Zeitrechnung.

Z e i t b e s t i m m u n g e n kommen schon bei dem Rechnen mit mehrfach benannten Zahlen vor. Man rechnet dort mit Jahren, Monaten, Tagen, Stunden, Minuten und Sekunden, und die Währungszahlen 12, 30, 24 und 60 finden ihre Verwendung bei allen vier Grundrechnungsarten. Unter Z e i t r e c h n u n g aber versteht man doch etwas anderes. Die eigentümliche Einteilung des Jahres in Monate mit verschiedener Anzahl von Tagen und auch die Schaltjahre müssen gekannt und bei Zeitbestimmungen berücksichtigt werden. Diese Zeitrechnung könnte an die sogenannten bürgerlichen Rechnungsarten angeschlossen werden, weil sie ebenfalls Belehrung über praktische Verhältnisse gibt; da sie aber ihrem ganzen Wesen nach so grundverschieden ist von diesen auf Prozentbestimmungen un erweiterter Regeldetri zurückgehenden Rechnungsarten, so

wird von vielen Rechenlehrern der Zeitrechnung eine Stelle innerhalb der Bruchrechnung angewiesen und zwar beim Abziehen gemeiner Brüche, weil die wichtigste Unterabteilung der Zeitrechnung, die Bestimmung der Zeitdauer, das Abziehen verwertet.

In dem von mir dem Rechnen zugrunde gelegten Lehrplane tritt die Behandlung der Zeitrechnung an den Schluß der Bruchrechnung; die Bruchrechnung wird somit nicht unterbrochen, andrerseits findet die Zeitrechnung ihre Stelle vor den Verhältnis- und Prozentbestimmungen. Die Ausdehnung dieser Zeitrechnung richtet sich ganz nach der Art der Schule. In der einklassigen Schule genügen Belehrungen über Länge der Monate usw. und hierauf gegründete Zeitbestimmungen; die mehrklassige Schule kann den Stoff erweitern. Der Lehrer der einklassigen Schule wird den für seine Schüler geeigneten Stoff aus dem folgenden leicht herausheben können. Er mag dabei beachten, daß die nachfolgenden Ausführungen nur für die besten Jahrgänge mehrklassiger Schulen und für die Zöglinge der Lehrerbildungsanstalten bestimmt sind.

Die Länge des Jahres (Umlaufszeit der Erde um die Sonne) und die Länge des Tages (Zeit der einmaligen Drehung der Erde um sich selbst) werden festgestellt. Jedes Jahr ist demnach um 5 Std. 48 Min. und 48 Sek. länger als die 365 Tage, die gewöhnlich zu einem Jahre gerechnet werden. Die Kinder wissen, daß unsere Jahreszeiten bestimmt werden von der Stellung der Erde zur Sonne. Wenn die Erde auf ihrer Bahn eine genau bestimmte Stellung einnimmt, so ist Frühlingsanfang. Rechnet man das Jahr zu 365 Tagen, so hat die Erde nach dieser Zeit die Stellung zur Sonne noch nicht erreicht, sie braucht noch 5 Std. 48 Min. 48 Sek. Wäre also in diesem Frühjahre Frühlingsanfang am 21. März mittags 12 Uhr, so würde er im nächsten Jahre auf den 21. März, nachmittags 5 Uhr 48 Min. 48 Sek. (kurz vor 6 Uhr), im 2. Jahre auf den 21. März, abends 11 Uhr 37 Min. 36 Sek. (gegen $\frac{3}{4}$12 Uhr), im 3. Jahre gar schon auf den 22. März, früh 4 Uhr 26 Min. 24 Sek. und im 4. Jahre auf den 22. März, 11 Uhr 15 Min. 12 Sek. ($\frac{1}{4}$12 Uhr) fallen. Es würde also Frühlingsanfang und mit ihm der kalendermäßige Eintritt aller anderen Jahreszeiten immer später im Jahre erfolgen, und in den verschiedenen Jahrhunderten vom März allmählich auf den April, Mai usw. verschoben werden. Um diesen Übelstand zu vermeiden, gab man jedem 4. Jahre einen Tag mehr; man schaltete einen Tag ein, daher der Name Schaltjahr; man erreichte dadurch, daß die Erde dann zur entsprechenden Zeit die bestimmte Stellung ungefähr erreichte. Würde also Frühlingsanfang bei unserer vorigen Aufstellung in drei Jahren auf den 22. März, früh 4 Uhr 26 Min. 24 Sek. fallen, so würde er durch das Einschalten des einen Tages im 4. Jahre schon am 21. März, mittags 11 Uhr 15 Min. 12 Sek. eintreten. Diese Bestimmung wurde von Julius Cäsar getroffen, weshalb man den Kalender, der diese Zeitrechnung zugrunde legt, den Julianischen nennt. Aus der vorstehenden Berechnung ist ersichtlich, daß nun Frühlingsanfang auch nicht auf den zuerst angenommenen Zeitpunkt, sondern beinahe $\frac{3}{4}$ Stunde zu früh eintrat; früher war das bürgerliche Jahr zu kurz, jetzt aber schaltete man zuviel ein. Dieser Unterschied ist

in 4 Jahren sehr unbedeutend; durch Jahrhunderte hindurch wurden aus den $\frac{3}{4}$ Stunden aber Tage. Um nun möglichste Genauigkeit zu erzielen, bestimmte Papst Gregor XIII. im Jahre 1582, daß die zuviel eingeschalteten 10 Tage dadurch weggelassen werden sollten, daß man für den 5. sogleich der 15. Oktober schrieb. Um nun für die Folgezeit eine ähnliche Verschiebung zu vermeiden, ordnete Papst Gregor an, daß in je 400 Jahren 3 Schaltjahre ausfallen sollten, nämlich die reinen Hunderterjahre, deren Hunderter sich nicht durch 4 teilen lassen. Diese 3 Jahre entsprechen ungefähr den zuviel eingeschalteten Zeiträumen (vgl. 100 . 44 Min. 48 Sek. = 3 Tage 2 Std. 40 Min.). Die hiernach eingerichteten Kalender nennt man gregorianische Kalender. Die meisten Kulturvölker rechnen jetzt nach dem gregorianischen Kalender (dem neuen Stil); in Preußen wurde er im Jahre 1700 eingeführt, während die Russen immer noch nach dem julianischen Kalender (dem alten Stil) rechnen. Die Differenz zwischen dem alten und neuen Stil betrug im vergangenen Jahrhundert 12 Tage und ist seit dem Jahre 1900 auf 13 Tage gestiegen, da die Russen im Jahre 1900 1 Tag einschalteten und wir nicht.

Wir zählen unsere Jahre von Christi Geburt an und unterscheiden also in unserer Zeitrechnung die Zeit vor und nach Christi Geburt. Angeschlossen werden hier Übungen über Zeitbestimmungen von Christi Geburt an, wie z. B.: Wie viele Jahre waren seit Christi Geburt verflossen, als Luther geboren wurde? — Mit Leichtigkeit wird der Stoff nun erweitert durch Hinzunahme der Monate und der Anzahl ihrer Tage. Es werden Aufgaben gelöst, wie: Wieviel Jahre, Monate und Tage waren seit Christi Geburt verflossen am Tage der Schlacht von Roßbach? usw. Hieran schließen sich Zeitbestimmungen innerhalb eines Jahres und zwar a) vom Anfang des Jahres, b) von jedem anderen Zeitpunkte ab. Zu a) würden auch die Aufgaben gehören, welche verlangen, der wievielte Monat im Jahre ein genannter Monat ist. Charakteristische Aufgaben sind: Zu a): 1. Der wievielte Monat im Jahre ist der April, der September? usw. 2. Wieviele Monate und Tage sind vom Jahre am 2. September, am 18. Oktober verflossen? usw. 3. Wieviel Zeit ist von diesem Jahre heute $\frac{1}{2}$10 Uhr vormittags verflossen? 4. An welchem Tage sind vom Jahre 3 Monate 16 Tage verflossen? — Zu b): 1. Wie viele Monate und Tage liegen zwischen dem 15. April und dem 10. September? usw. Man achte darauf, daß die Tagesbestimmungen über den Monat hinaus den Kindern wegen der verschiedenen Monatstage Schwierigkeiten bereiten. Ich bin bisher am sichersten zum Ziele gekommen, wenn ich diese Bestimmungen in drei oder wenigstens zwei Absätzen ausführen ließ. Bei der vorstehenden Aufgabe werden die Kinder z. B. rechnen müssen: Vom 15. April bis zum 15. August sind 4 Monate; vom 15. August bis zum 31. August sind 16 Tage, bis zum 1. September ist ein Tag, zusammen 17 Tage, bis zum 10. September sind noch 9 Tage, das sind 26 Tage oder zusammen 4 Monate 26 Tage. 2. Welchen Monatstag erhalten wir, wenn vom 14. Januar an noch 6 Monate und 8 Tage verflossen sind? 3. Welcher Tag war 5 Monate 6 Tage vor dem 25. Dezember? — Diese Aufgaben können noch mit

Sachverhältnissen verknüpft werden, z. B. mit Zinszahlungen, Mündigkeitserklärungen, Eintritt des Weihnachtsfestes u. dgl. m. — Wenn dann derartige Aufgaben über die Grenze des Jahres hinaus erweitert und durch vielfache Übung befestigt worden sind, kommen wir zu den Aufgaben, die vielfach allein als ordentliche Zeitrechnungsaufgaben angesehen werden, die aber nie gelöst werden könnten, wenn nicht die vorstehenden Übungen den soliden Grund gelegt hätten.

Wir geben hier erst die alte, seit langer Zeit gebräuchliche Einteilung der Zeitrechnungsaufgaben: Gesucht wurde a) Zeitdauer, b) Zeitende, c) Zeitanfang. Aufgabe zu a): Wie alt ist Friedrich der Große geworden, wenn er am 24. Januar 1712 geboren und am 17. August 1786 gestorben ist? Lösung: Vom 24. Januar 1712 bis zum 24. Januar 1786 sind 74 Jahre. Vom 24. Januar 1786 bis zum 24. Juli 1786 sind 6 Monate; vom 24. Juli 1786 bis zum 17. August 1786 sind 24 Tage; also ist Friedrich der Große 74 Jahr, 6 Monat, 24 Tage alt geworden. — Diese Art von Aufgaben sind die wichtigsten, weil sie im Leben häufig vorkommen, so bei Altersberechnungen beim Tode, aber auch an jedem Tage des Lebens, bei Lebensversicherungsanträgen, Heiraten u. a. m. Die Aufgaben zu b) und c) sind minder wichtig. Es wird selten vorkommen, daß man aus dem Todestage und der bekannten Altersangabe den Geburtstag und ebenso, daß man aus dem Geburtstage und der Altersbestimmung den Todestag suchen soll; alle diese Aufgaben sind gesucht, aber nicht natürlich; sie sind für Schulzwecke zurechtgemacht und nicht dem praktischen Leben entnommen. Diese Aufgaben sollten aus den Rechenbüchern verschwinden; die hierdurch freiwerdende Zeit wende man zur Erzielung größerer Sicherheit für Zeitbestimmungen bei kürzeren Zeiträumen an, wie dieselben später bei der Zinsrechnung gebraucht werden.

Eine Tafelrechenform ist hier beinahe überflüssig; die Kinder rechnen auch bei der schriftlichen Beschäftigung im Kopfe und notieren die Ergebnisse. Will jemand die Tafelrechenform zur größeren Sicherheit und zu seiner eigenen Beruhigung einführen, so nehme er die gebräuchliche, d. h. die von Christi Geburt ausgehende. Vielfach wird hiergegen Einspruch erhoben. Man sagt, man gehe zu weit zurück, man könne die Sache von einem näherliegenden Zeitpunkte ab bequemer haben. Die einzige normale Zeitbestimmung könnte dann aber nur vom Eintritt des Jahrhunderts ausgehen, und was geschieht, wenn wir, wie es jetzt im Anfang des 20. Jahrhunderts notwendig ist, darüber zurückgreifen müssen? Die beiden Zifferngruppen 18 und 19 sind bald geschrieben; bleiben wir deshalb bei dieser Form.

Um das Alter des ersten deutschen Kaisers aus dem Hause Hohenzollern zu berechnen, würden wir ansetzen:

Am Todestage des Kaisers waren seit		12	29
Christi Geburt verflossen:	1887 Jahr,	2 Monat,	8 Tage.
Als der Kaiser geboren wurde, waren verflossen:	1796 „	2 „	21 „
Ergebnis:	90 Jahr,	11 Monat,	16 Tage.

Passende Aufgaben finden wir in Schroeter, Tafelrechnen, Ausgabe A, Heft 5, Gruppe 10 und 11, und in Ausgabe B, Heft 3, Gruppe 46.

42. Die Kranken-, Unfall- und Invalidenversicherung.

Durch die Anregung des deutschen Kaisers und der verbündeten Fürsten ist es eine der vornehmsten Arbeiten des deutschen Reichstags gewesen, das Geschick der kranken, gebrechlichen und alten Arbeiter zu bessern. Die Früchte dieser Arbeit sind die wichtigen sozialpolitischen Gesetze von den Jahren 1883, 1886, 1889 und 1899, nach denen den kranken, verunglückten, invaliden und alten Arbeitern eine Rente zusteht. Die hierzu notwendigen Summen werden teils vom Staate, teils von den Arbeitgebern, teils auch von den Arbeitern selbst aufgebracht. — Es ist für viele nicht leicht, sich in diese neuen Verhältnisse vollständig einzuleben. Soll nun unserem Volke das rechte Verständnis für diese großartige sozialpolitische Gesetzgebung erschlossen werden, so müssen wir Lehrer bei der Jugend anfangen. Doch werden allgemeine Belehrungen nicht genügen, die Kinder müssen vielmehr durch eigene Arbeit in den eigenartigen Sachverhältnissen heimisch gemacht werden. Dies kann nur durch das Rechnen geschehen. Der Rechenunterricht erhält also ein neues Sachgebiet; er muß seinen Stoff erweitern durch Aufgaben aus der Kranken-, Unfall-, Invaliditäts- und Altersversicherung.

Einzelne dieser Aufgaben können als angewandte Aufgaben bei den einzelnen Grundrechnungsarten Verwendung finden (vgl. Heft 3, Gruppe 26), doch wird diese Behandlungsweise nur eine vorbereitende sein. Zur Einsicht und Beherrschung des Stoffes können die Kinder nur dann kommen, wenn das gesamte Gebiet ihnen als ein zusammenhängendes Ganzes dargeboten wird und zwar zu einer Zeit, wo andere Unterrichtsfächer, besonders der Geschichtsunterricht, diese Bestrebungen unterstützen können. Das neue Sachgebiet ist demnach der Oberstufe unserer Volksschule zugewiesen.

Aus dem Stoffverteilungsplane ist zu ersehen, daß die hierher gehörigen Aufgaben vor der Neueinführung der neuen, die bürgerlichen Rechnungsarten vorbereitenden Rechenstoffe behandelt werden sollen. Hier ist die Rechenfertigkeit erreicht, die bei der Lösung der Aufgaben vorausgesetzt werden muß; hier kommen aber auch die Aufgaben noch rechtzeitig genug, so daß jedes Kind, auch das einmal zurückgebliebene, mit ihnen bekannt gemacht werden kann.

Bei der Auswahl der Aufgaben sind folgende Gesichtspunkte maßgebend. Das Kind muß durch Rechnen erkennen lernen 1. wieviel hat der Arbeiter beizusteuern, wieviel leistet der Arbeitgeber und wieviel der Staat? 2. wieviel kann der Arbeiter erhalten und 3. wie stellt sich die Beisteuer des Arbeiters zu der gesetzmäßigen Rente? Zum Schluß mögen einige Aufgaben folgen, die durch die große Zahl der Rentenempfänger und die Summe der gewährten Renten einen weiteren Einblick in den reichen Segen der Gesetzgebung verschaffen.

Wir trennen die einzelnen Versicherungsarten. Bei jeder derselben sind durch vielfache Rechenaufgaben die von dem Lehrer zu gebenden Erläuterungen nacheinander zum Verständnis zu bringen.

I. [illegible] und vom [illegible]

[illegible] Grundlage den [illegible] und die [illegible] Gegenden [illegible] gehenden [illegible] vom Lehrer [illegible]:

1. [illegible] des Kreises D [illegible] 15 Pf., [illegible] jugendliche [illegible] wöchentlich [illegible] zu zahlen [illegible] derselben aber [illegible].

2. [illegible] der Ge- [illegible] auf 1,40 ℳ, [illegible] ℳ und [illegible] jugendliche [illegible] ℳ [illegible].

3. [illegible] wird den [illegible] Heil- [illegible] 4. Tage [illegible] festgestellten [illegible] die Unter- [illegible] Unter- [illegible] freie Kur [illegible] Angehö- [illegible] Krankengeldes.

II. [illegible]

[illegible] Es handelt [illegible] Rentenanteiles, der [illegible] Arbeiters zu- [illegible]:

1. [illegible] falls er [illegible] des [illegible]dienstes.

2. Ist der Beschädigte nicht vollständig erwerbsunfähig, so wird der Arbeitsverdienst von der zu gewährenden Rente abgezogen; doch muß die übrigbleibende Rente mit dem Arbeitsverdienst den Betrag der Rente bei voller Erwerbsunfähigkeit [illegible]

3. Bei dem durch [illegible] Tode eines Versicherten erhalten die Erben au[illegible] Beerdigungskosten $\frac{1}{15}$ des Jahresverdienstes [illegible] Witwe 20%, b) jedes der hinterlassenen [illegible] 15%, c) wenn die Kinder auch mutterl[illegible] Jahresverdienstes des Ernährers. Doch dürfen [illegible] der Kinder zusammen 60% des Jahresverd[illegible]steigen.

4. Ist der infolge eines Unfalles Verschiedene der einzige Ernährer seiner Eltern gewesen, so erhalten die letzteren ebenfalls 20% des Arbeitsverdienstes des Verstorbenen.

III. Invaliden- und Altersversicherung. (Gesetz vom 22. Juni 1889 und vom 19. Juli 1899).

Dieses wichtigste unter den drei Gesetzen bringt eine Reihe von ziemlich verwickelten Bestimmungen. Der Lehrer achte ganz besonders darauf, daß er nach jeder Erläuterung die sofortige Befestigung durch Rechenaufgaben vornimmt, dann wird bei dem Interesse, das die Kinder dem Stoffe entgegenbringen, das Ziel leicht und sicher erreicht werden. Zur Behandlung dürften folgende Punkte kommen:

1. Versicherungspflichtig sind alle gegen Lohn oder Gehalt beschäftigten Personen vom 16. Lebensjahre ab (Arbeiter, Gehilfen, Gesellen, Lehrlinge, Dienstboten, auch Betriebsbeamte, Werkmeister und Techniker, Handlungsgehilfen und -lehrlinge, sonstige Angestellte, deren dienstliche Beschäftigung ihren Hauptberuf bildet, sowie Lehrer und Erzieher an nicht öffentlichen Schulen oder Anstalten), die weniger als 2000 ℳ jährlich beziehen.

2. Nichtversicherungspflichtig sind: 1. die in Apotheken beschäftigten Gehilfen und Lehrlinge; 2. die Beamten des Reichs, der Bundesstaaten und der Kommunalverbände, sowie die Lehrer und Erzieher, so lange sie lediglich zur Ausbildung für ihren zukünftigen Beruf beschäftigt werden oder sofern ihnen eine Anwartschaft auf Pension im Mindestbetrage der Invalidenrente nach den Sätzen der 1. Lohnklasse gewährleistet ist; 3. Personen des Soldatenstandes, auch wenn sie dienstlich als Arbeiter beschäftigt werden; 4. Rentenempfänger; 5. erwerbsunfähige Personen.

3. Von der Versicherungspflicht können auf Antrag entbunden werden: 1. Ausländer (russisch-polnische Arbeiter); doch muß der Arbeitgeber den auf ihn entfallenden Betrag an die Versicherungsanstalt zahlen; 2. Pensionäre; 3. Personen, welche das 70. Lebensjahr vollendet haben; 4. Personen, welche nicht mehr als 12 Wochen jährlich Arbeit übernehmen.

4. Das Recht der Selbstversicherung haben: 1. die sonst versicherungspflichtigen Personen, welche mehr als 2000 ℳ, aber weniger als 3000 ℳ beziehen, wenn sie das 40. Lebensjahr nicht überschritten haben; 2. Gewerbetreibende und sonstige Betriebsunternehmer, welche nicht regelmäßig mehr als 2 versicherungspflichtige Arbeiter beschäftigen; 3. Personen, welche aus einem die Versicherungspflicht begründenden Verhältnis ausscheiden (Weiterversicherung).

5. Diese sämtlichen Versicherten werden zum Zwecke der Bemessung der Beiträge und Renten je nach ihrem Jahresarbeitsverdienste in 5 Lohnklassen geteilt. Diese sind:

Klasse	1	mit einem Jahresverdienste	bis zu	350 ℳ
„	2	„ „ „	von 350 bis	550 „
„	3	„ „ „	„ 550 bis	850 „
„	4	„ „ „	„ 850 bis	1150 „
„	5	„ „ „	von mehr als	1150 „

Als Jahresverdienst gilt entweder der 300fache Betrag der für die Krankenkassenbeiträge festgesetzten durchschnittlichen Tagelohnsätze (vergleiche diese Sätze) oder für Nichtmitglieder der Krankenkassen der 300fache Betrag des ortsüblichen Tagelohns, soweit nicht für einzelne Berufszweige von der höheren Verwaltungsbehörde ein anderer Jahresverdienst festgesetzt wird. Die freiwillige Versicherung kann in jeder Lohnklasse ohne Zusatzmarke geschehen.

6. Nach den 5 verschiedenen Lohnklassen werden verschiedene Wochenbeiträge gezahlt. Es sind zunächst für die Zeit bis zum 31. Dezember 1910 an wöchentlichen Beiträgen zu erheben:

in Klasse 1: 14 ₰	in Klasse 3: 24 ₰
„ „ 2: 20 „	„ „ 4: 30 „
	„ „ 5: 36 „

Zum Zweck der Erhebung der Beiträge werden von jeder Versicherungsanstalt für die einzelnen Lohnklassen Marken ausgegeben und von den Postanstalten oder von anderen einzurichtenden Verkaufsstellen verkauft. Der Arbeitgeber hat bei der Lohnzahlung für die Dauer der Beschäftigung Marken in die Quittungskarte einzukleben. Der Versicherte ist verpflichtet, bei dem Lohnempfang die Hälfte der Beiträge sich einbehalten zu lassen.

7. Militärische Dienstzeiten, bescheinigte Krankheit und vorübergehender Rentenbezug wird als Beitragszeit für Lohnklasse 2 mitgerechnet, ohne daß Beiträge zu zahlen sind.

8. Die Hälfte der eingezahlten Beiträge wird nach wenigstens 200 Wochenbeiträgen zurückerstattet: a) den weiblichen Versicherten, welche heiraten und aus der Versicherung ausscheiden wollen; doch ist denselben zu raten, die Versicherung freiwillig fortzusetzen; b) der hinterlassenen Witwe oder den hinterlassenen ehelichen Kindern unter 15 Jahren von denjenigen männlichen Verstorbenen, die nicht in den Rentengenuß gelangt sind; c) den hinterlassenen vaterlosen Kindern der weiblichen Versicherten, sofern sie noch nicht 15 Jahre alt sind. Doch müssen die Ansprüche auf Rückerstattung vor Ablauf eines Jahres nach der Verheiratung resp. nach dem Tode gestellt werden.

9. Invalidenrente erhält jeder Versicherte, dessen Erwerbsfähigkeit infolge von Alter, Krankheit oder anderen Gebrechen dauernd auf weniger als ein Drittel herabgesetzt ist. Nicht dauernd erwerbsunfähige Versicherte erhalten, wenn sie 26 Wochen ununterbrochen erwerbsunfähig gewesen sind, ebenfalls für die weitere Dauer der Erwerbsunfähigkeit Invalidenrente.

Die Invalidenrente setzt sich aus 2 Teilen zusammen; den einen Teil trägt das Reich (Reichszuschuß), den andern Teil die Versicherungsanstalt. Der Reichszuschuß beträgt für jede Rente jährlich 50 ℳ. Die Versicherungsanstalt gewährt eine für jede Invalidenrente nach Lohnklasse und Anzahl der Wochenbeiträge näher zu bestimmende Summe. Zu einem Grundbetrag werden die der Zahl der Beitragswochen entsprechenden Steigerungssätze hinzugerechnet. Der Grundbetrag beläuft sich

für die 1. Lohnklasse auf	60 ℳ	für die 4. Lohnklasse auf	90 ℳ
„ „ 2. „ „	70 „	„ „ 5. „ „	100 „
„ „ 3. „ „	80 „		

Der Berechnung des Grundbetrags werden stets 500 Beitragswochen zugrunde gelegt. Sind weniger als 500 Beitragswochen nachgewiesen, so werden bei der Berechnung die fehlenden Wochen aus der 1. Lohnklasse ergänzt; bei mehr als 500 Beitragswochen sind die 500 Beiträge der höchsten Lohnklasse zugrunde zu legen. Wenn in der höchsten Lohnklasse nicht 500 Wochenbeiträge geleistet worden sind, so setzt sich der von der Versicherungsanstalt zu zahlende Grundbetrag aus mehreren Lohnklassen zusammen. Der Steigerungssatz beträgt für jede Beitragswoche

in der 1. Lohnklasse	3 ₰	in der 4. Lohnklasse	10 ₰
„ „ 2. „	6 „	„ „ 5. „	12 „
„ „ 3. „	8 „		

Der einmal gezahlte Wochenbeitrag bewirkt also eine Steigerung der jährlichen Rente. Bei Berechnung der Rente ist also aus den Versicherungspapieren festzustellen, wieviel Krankheitswochen bescheinigt sind, wieviel Wochen militärischer Dienstleistung und vorübergehenden Rentenbezugs zu rechnen sind und wieviel Beitragswochen in den einzelnen Lohnklassen außerdem vorhanden sind.

Zum Empfang der Rente ist der Versicherungspflichtige nach 200 Beitragswochen, der freiwillig Versicherte nach 500 Beitragswochen berechtigt, vorausgesetzt, daß die Invalidität nachgewiesen ist.

Die Renten sind monatlich im voraus zu zahlen und auf volle 5 ₰ für den Monat nach oben abzurunden.

10. Die Invalidenrente wird nach der gesetzlichen Wartezeit von 200 Beitragswochen nur bei nachgewiesener Erwerbsunfähigkeit gewährt; sie ist unabhängig von dem Alter der Versicherten und soll den erwerbsunfähigen Arbeiter vor der größten Not schützen. Altersrente hingegen erhält jeder Versicherte, sobald er das 70. Lebensjahr vollendet hat und 1200 Beitragswochen nachweisen kann; sie ist unabhängig von der Erwerbsunfähigkeit und soll dem Greise und der Greisin die Möglichkeit gewähren, die Kräfte zu schonen. Bei Bestimmung der Altersrente werden nur 1200 Beitragswochen in Ansatz gebracht, und zwar die, in denen die höchsten Beiträge entrichtet sind. Auch bei der Altersrente beträgt der jährliche Reichszuschuß 50 ℳ, die Versicherungsanstalten zahlen

in der 1. Lohnklasse jährlich	60 ℳ	in der 4. Lohnklasse jährlich	150 ℳ
„ „ 2. „ „	90 „	„ „ 5. „ „	180 „
„ „ 3. „ „	120 „		

Kommen Beiträge in verschiedenen Lohnklassen in Betracht, so wird der Durchschnitt der diesen Beiträgen entsprechenden Altersrente gewährt. Sind mehr als 1200 Beitragswochen nachgewiesen, so sind die 1200 Beiträge der höchsten Lohnklasse zugrunde zu legen.

11. Da die Invalidenrente später stets die Altersrente übersteigen wird, so ist im Gesetz bestimmt, daß die letztere in Fortfall kommt, sobald der Empfänger durch die eingetretene Erwerbsunfähigkeit Anrecht auf die höhere Invalidenrente erhalten hat.

Hierher gehörende Aufgaben sind zu finden in Schroeter, Tafelrechnen, Heft 5 der Ausgabe A, Gruppe 12 bis 14 und Heft 3 der Ausgabe B, Gruppe 47 bis 49.

Beispiel zur Berechnung der Invalidenrente.

Wie hoch wird sich die jährliche Invalidenrente eines Versicherten belaufen, wenn derselbe 32 Wochen bescheinigte Krankheit, 146 Wochen militärische Dienstzeit, 460 Wochenbeiträge in Lohnklasse 1, 350 Wochenbeiträge in Lohnklasse 2, 225 Wochenbeiträge in Lohnklasse 3, 390 Wochenbeiträge in Lohnklasse 4 und 96 Wochenbeiträge in Lohnklasse 5 nachweisen kann?

Ausrechnung:

Für 460	Wochenbeiträge in Lohnklasse	1	je 3 ₰	=	13,80 ℳ
„ 32, 146, 350 } 528	„ „ „	2	„ 6 „	=	31,68 „
„ 225	„ „ „	3	„ 8 „	=	18,00 „
„ 390	„ „ „	4	„ 10 „	=	39,00 „
„ 96	„ „ „	5	„ 12 „	=	11,52 „
					114,00 ℳ

Der Grundbetrag der Versicherungsanstalt setzt sich zusammen aus

96 Wochenbeiträgen der 5. Lohnklasse $= \frac{96 \cdot 100}{500} = 19{,}50$ ℳ

390 „ „ 4. „ $= \frac{390 \cdot 90}{500} = 70{,}20$ „

14 „ „ 3. „ $= \frac{14 \cdot 80}{500} = 2{,}24$ „

	91,94 ℳ
Reichszuschuß	50,00 „
Zusammen	255,94 ℳ
Hierzu zur Abrundung	0,26 „
Ergibt eine jährliche Rente	256,20 ℳ

Beispiel zur Berechnung der Altersrente.

Wie hoch wird sich seinerzeit die Altersrente eines noch erwerbsfähigen Siebzigers belaufen, wenn derselbe 420 Beitragswochen für die 1. Lohnklasse, 680 Beitragswochen für die 2. Lohnklasse, 750 Beitragswochen für die 3. Lohnklasse und 250 Beitragswochen für die 4. Lohnklasse nachweisen kann?

Berechnung:

$$250 \text{ Beiträge der 4. Lohnklasse} = \frac{250 \cdot 150}{1200} = 31{,}25 \text{ ℳ}$$

$$750 \quad \text{"} \quad \text{"} \quad 3. \quad \text{"} = \frac{750 \cdot 120}{1200} = 75{,}00 \text{ "}$$

$$200 \quad \text{"} \quad \text{"} \quad 2. \quad \text{"} = \frac{200 \cdot 90}{1200} = 15{,}00 \text{ "}$$

	121,25 ℳ
Reichszuschuß	50,00 „
Zusammen	171,25 ℳ
Hierzu zur Abrundung	0,35 „
Zusammen	171,60 ℳ

43. Die Verhältnisbestimmungen.

Bei den schon vielgenannten bürgerlichen Rechnungsarten werden häufig Verhältnis- und Prozentbestimmungen angewendet; jede Prozentbestimmung ist aber eine Verhältnisbestimmung. Die Pflicht der Schule ist es, die Kinder rechtzeitig mit den Verhältnisbestimmungen bekannt zu machen, damit dieselben erforderlichenfalls sofort angewendet werden können. Wenn z. B. bei einem Gutsverkauf A 350 ha und B 250 ha erstanden haben und beide die aufgelaufenen Kosten von 75,60 ℳ nach dem Verhältnis ihrer Anteile tragen sollen, so würden wir durch die uns bekannten Verhältnisbestimmungen in der Lage sein, aus den 75,60 ℳ nicht 600, sondern 12 Teile zu machen und hiernach die Summe zu verteilen.

Das Verhältnis zweier Zahlen zueinander ist zwar von Anfang an der Gegenstand des Rechnens. Um wieviel größer oder kleiner oder wieviel mal so groß oder so klein die eine Zahl ist als die andere, ist bei allen vier Grundrechnungsarten untersucht worden. Es muß hier also etwas anderes als das genugsam Bekannte gemeint sein. Nun sprechen wir in der Buchstabenrechnung und Algebra auch von Verhältnissen und von deren Exponenten, auch von den Proportionen, die sich aus gleichen Verhältnissen zusammensetzen. Dieser Stoff soll und kann nicht Lehraufgabe unserer Volksschule sein. (Sollten vielgegliederte Schulen die Proportionslehre mit in den Kreis ihrer Unterrichtstätigkeit ziehen, so dürfte diese doch nur ganz am Ende der Schulzeit in äußerster Beschränkung auftreten; an den Anfang der bürgerlichen Rechnungsarten gehört sie auch in solchen Schulen nicht.)

Wie kommen wir nun zur Bestimmung der Verhältnisse?

Rechts und links von mir sitzen zwei Schüler, Karl und Friedrich, die ihre Schulsparkassenbücher abgehoben haben. Karl hat 40 ℳ und Friedrich 60 ℳ ausgezahlt erhalten. Wieviel Geldstücke hätte Karl und wieviel ebenso große Geldstücke Friedrich erhalten, wenn die Auszahlung in Einmarkstücken erfolgt wäre? Wären lauter Zweimarkstücke ausgezahlt worden, so würde Karl 20 und Friedrich 30 gleiche Geldstücke

besitzen. Wieviel gleiche Stücke würden Karl und Friedrich besitzen, wenn die Auszahlung in Fünfmarkstücken oder in Zehnmarkstücken oder in Zwanzigmarkstücken geschehen wäre? Die Kinder werden das leicht und sicher beantworten. Wir nennen eins von diesen gleichen Stücken, z. B. ein Einmarkstück, einen Teil, wie viele Teile hat dann Karl und wie viele eben solche Teile Friedrich erhalten? Dasselbe wird auch auf die anderen Geldstücke angewendet. Die Kinder geben nochmals kurz die Anzahl der gleichen Teile an, die jeder hat, wenn eins dieser Geldstücke ein Teil genannt wird, z. B. Karl hat 20 und Friedrich 30 Teile, oder Karl hat 2 und Friedrich 3 Teile. Nun sagen wir, daß wir in den 20 und 30 Teilen oder in den 2 und 3 Teilen das Verhältnis des Besitzes der beiden kennen lernen, daß man dafür kurz sagt, die Ersparnisse von Karl verhalten sich zu denen von Friedrich wie 20 zu 30 usw. — Es folgen ähnliche dem Leben entnommene Beispiele. Wir bemerken, daß wir bei der angestellten Vergleichung die eine der Zahlen nicht unter Benutzung irgendeiner der Grundrechnungsarten mit der anderen verglichen haben, sondern daß wir die Beziehung von diesen zwei (oder auch von mehreren) Zahlen zu einer anderen Zahl festgestellt haben. Wir messen also die Zahlen nicht mit sich selbst, sondern mit einer außer ihnen stehenden Größe. Das Ergebnis dieser Vergleichung wird das Verhältnis der Größen zueinander genannt. Die bisher zur Vergleichung gestellten Größen waren weder die sonst so beliebten Striche, noch abstrakte Zahlen, sondern wirkliche, dem Leben, d. i. dem Anschauungskreise der Kinder entnommene Größen. Die Kinder finden in den gleichen Teilen wirkliche Werte, hierdurch wird das Interesse der Kinder und die Selbsttätigkeit (Selbstuntersuchung) derselben geweckt, und dies übt den bedeutendsten Einfluß auf die Sicherheit des Verständnisses aus. — Hierauf vergleichen wir zwei Zahlen nach ihren gleichen Teilen. Es wird nicht mehr nötig sein, daß man hier nochmals seine Zuflucht zu den Kreidestrichen an der Wandtafel nimmt und z. B. die 3 als dreiteiligen, die 4 aber als vierteiligen Strich zeichnet. Das, was dadurch erzielt werden soll, das Erkennen des Zahleninhaltes, darf nicht mehr zweifelhaft sein; jeder Schüler wird 3 als $3 \cdot 1$ und 4 als $4 \cdot 1$ aufzufassen wissen; er wird auch feststellen können, daß, wenn man 1 einen Teil nennt, daß dann 3 drei Teile und 4 vier solche Teile hat. Dies nennen wir auch hier das Verhältnis beider Zahlen. Es verhält sich also 3 zu 4 wie 3 zu 4. Weil $6 = 6 \cdot 1$ und $9 = 9 \cdot 1$ ist, würde sich $6 : 9$ verhalten wie $6 : 9$. 6 ist aber auch $2 \cdot 3$ und $9 = 3 \cdot 3$. Nennen wir jetzt 3 einen Teil, so hat 6 zwei Teile, wie 9 drei Teile hat, es verhält sich also $6 : 9 = 2 : 3$. Das Geld des Karl verhielt sich zu dem Gelde von Friedrich wie $40 : 60$ oder wie $20 : 30$ oder wie $8 : 12$ oder wie $4 : 6$ oder wie $2 : 3$, je nachdem wir nach 1, 2, 5, 10 oder 20 Markstücken verglichen. Die angeführten Zahlen sind die gemeinschaftlichen Maße beider Zahlen. Bei jedem dieser Verhältnisse haben wir 40 ℳ und 60 ℳ nach gleichen Teilen (den gemeinschaftlichen Maßen) verglichen. Wir finden also das Verhältnis zwischen zwei Zahlen, wenn wir sie nach gleichen Teilen vergleichen. Wollten wir bei der Vergleichung zwischen 40 ℳ und 60 ℳ das Talerstück zugrunde

legen, so würden sich 40 ℳ : 60 ℳ verhalten wie $13\frac{1}{3} : 20$. Es ist nun gebräuchlich, das Verhältnis zweier Zahlen nie in Bruchzahlen auszudrücken, und das vermeiden wir, wenn wir nur nach den gemeinschaftlichen Teilen vergleichen; ebenso ist es Sitte, das Verhältnis in den kleinsten (ganzen) Zahlen auszudrücken, — das geschieht, wenn wir nach dem größten gemeinschaftlichen Teiler vergleichen. Wir finden also hier eine direkte Verwendung der Lehre von dem größten gemeinschaftlichen Teiler (oder dem größten gemeinschaftlichen Maße).

Ergänzen wir also die obige Erklärung und sagen: Wir finden das Verhältnis zwischen zwei Zahlen, wenn wir sie nach den größten gemeinschaftlichen Teilen vergleichen. Vielfache Übung ist notwendig, damit die Schüler das Verhältnis zweier Zahlen leicht und sicher bestimmen können. Übungsaufgaben werden nicht nur den abstrakten Zahlen, sondern auch dem Leben entnommen; sie können sehr mannigfaltig sein und von den leichtesten bis zu den schwersten Formen ansteigen. Der Lehrer muß wissen, wie weit er gehen kann und darf; er soll nicht zu viel, aber auch nicht zu wenig bieten. Als Übungsstoffe zur Verhältnisbestimmung dienen: ganze (abstrakte) Zahlen, Preise, Werte, Bruchzahlen und gemischte Zahlen in dezimaler und gemeiner Bruchform. Die Preise werden zunächst von einer Einheit gegeben; später werden die Aufgaben so gestellt, daß erst auf eine Einheit zurückgegangen werden muß. Es kommt dabei weniger auf die Erlernung und Anwendung von Regeln an, sondern darauf, daß der Schüler sich immer der Einheit bewußt bleibt, nach welcher er die Größen vergleicht. Daß Stammbrüche zu Stammbrüchen sich umgekehrt wie ihre Nenner verhalten, ergibt sich vielleicht zufällig zum Schluß; wesentlich ist das Gleichnamigmachen derselben und das Vergleichen nach dem größten gemeinschaftlichen Teiler. — Zum Schluß folgen Aufgaben, die nicht ein Bestimmen des Verhältnisses, sondern eine Anwendung desselben fordern. In der nächsten Umgebung des Kindes finden wir in dem Ein- und Vertauschen von Land, Getreide, Heu und Stroh, Ware usw. passendes Aufgabenmaterial. Hier wird die beste Gelegenheit sein, diejenigen von den alten Maßen, die ab und zu jetzt noch vorkommen, heranzuziehen und umzurechnen; auch die Beziehungen der Münzen der wichtigsten Kulturvölker zu unseren deutschen Münzen müssen benutzt werden.

Die schulgemäßen Lösungsformen für die Bestimmung der Verhältnisse sind folgende:

a) Kopfrechnen.

Aufgabe: Zu dem Einkommen einer Schulstelle gehörten auch 45 alte Scheffel Roggen; wie viele Hektoliter sind das, wenn sich der alte Scheffel zum hl wie 11 : 20 verhält? Lösung: Ein alter Scheffel verhält sich zum hl wie 11 : 20, d. h., ein alter Scheffel hat 11 Teile, wie ein hl deren 20 hat. Hat 1 alter Scheffel 11 Teile, so haben 45 alte Scheffel $45 . 11$ Teile $=$ 495 Teile. Von diesen gehören je 20 Teile zu 1 hl. Es sind also so viele mal 1 hl, als 20 Teile in 495 Teilen enthalten sind, d. i. $24\frac{3}{4}$ mal; also sind 45 alte Scheffel $= 24\frac{3}{4} = 24{,}75$ hl.

b) Tafelrechnen.

Aufgabe: 1 alter preuß. Schffl. : 1 hl = 11 : 20; wieviel hl tauscht man gegen 32 alte Scheffel ein?

Lösung: 1 alter Scheffel = 11 Teile,
32 „ „ = 32 . 11 Teile.

20 Teile = 1 hl
1 „
32 . 11 Teile $\frac{1 \text{ hl} . 32 . 11}{20}$

Ausrechnung: 32 . 11 hl = 352 hl : 20 = <u>17,60</u> hl.

Durch den häufigen Gebrauch werden die Kinder nach und nach mit dem Inhalt dieser in einzelnen Fällen vielleicht noch benutzten alten Maße und Gewichte vertraut, und wenn das auch nicht als unbedingt notwendig gefordert werden kann, so ist es doch ein sehr schätzbares indirektes Ergebnis des Rechenunterrichts.

Die Vergleichung nach gleichen Teilen könnte aber auch noch in anderer Weise ausgeführt werden. Bis jetzt wurde stets angegeben, wie viele von den gleichen Teilen jede Größe enthielt. Das nannten wir das Verhältnis der Zahlen. Wir können aber auch angeben, wie viele Einheiten von der einen Größe ebenso groß sind, als eine gegebene Anzahl von Einheiten der andern Größe. Z. B. 7 Quart sind gleich 8 l, oder 5 Scheffel Roggen = 4 Scheffel Weizen. Diese Form der Vergleichung nennen wir Gleichung. Zwei Knaben tauschen Äpfel und Nüsse, Karl gibt stets 7 Nüsse für 2 Äpfel, die er von Adolf erhält. Wie viele Nüsse erhält Adolf für 16 Äpfel? Die hier aufgestellte einfache Gleichung lautet: 2 Äpfel = 7 Nüssen. Wir finden bei den Tausch- und Wechselgeschäften des gewerblichen Lebens die Form der Gleichung häufiger angewendet als die Form des Verhältnisses. Gleichungen, wie 5 Frk. = 4 ℳ, 2 Pfd. = 1 kg usw., sind überall bekannt und werden gebraucht. Die Umrechnungen, obwohl sie mit denselben Zahlen erfolgen, sind weniger abstrakt und daher geläufiger, als die auf den Verhältnissen beruhenden Umrechnungen. Dort die immerhin fremden Teile, hier die bekannten Größen. 45 alte Scheffel sollen in neue umgerechnet werden mit Hilfe der Gleichung: 20 alte Scheffel = 11 hl. Die schulgemäße Lösung würde lauten: Sind 20 alte Scheffel = 11 hl, so ist 1 alter Scheffel = $\frac{11}{20}$ hl und 45 alte Scheffel = 45 . $\frac{11}{20}$ hl = $\frac{495}{20}$ = 24,75 hl. Diese Vorrechnungsform ist kürzer und deshalb auch praktischer, obwohl dieselben Zahlen und Schlüsse vorkommen. Dasselbe gilt von dem schriftlichen Rechnen.

Für Seminaristen und für Schüler gehobener Schulen wird es von nicht zu unterschätzender formaler Bedeutung sein, wenn sie beide Formen, Verhältnisse und Gleichungen, mit gleicher Sicherheit zu Umrechnungen anwenden. Die Volksschule in ihrer einfacheren Gestalt wird sich bei Umrechnungen notgedrungen auf die Einprägung einer Vorrechnungsform, und zwar der der Gleichung, beschränken müssen; zu gelegener Zeit können dann kleine Übungen auch mit Verhältnissen vorgenommen werden. Häufig sind nun die Gleichungen nicht direkt gegeben, sondern müssen entwickelt

werden, und zwar entweder aus dem unmittelbaren Inhalte der Größen oder aus dem bekannten Verhältnis der Größen. Beide Entwicklungsformen gründen sich auf dieselben Schlüsse. Wir müssen gleiches bei beiden Größen erhalten, sei es in bestimmten (z. B. ℳ und Pf.) oder in allgemeinen Werten (Teilen) ausgedrückt. — Wie heißt die Gleichung zwischen Roggen und Weizen, wenn ein Scheffel Roggen 7 ℳ und ein Scheffel Weizen 8 ℳ kostet? Bei Feststellung der Gleichung kommt es darauf an, zunächst einen Wert von der einen Größe zu haben, der einem Werte von der anderen Größe gleich ist. Ich kann von jedem beliebigen Werte ausgehen; so z. B. bei der Lösung der obigen Aufgabe: für 1 ℳ erhalte ich entweder $\frac{1}{7}$ Scheffel Roggen oder $\frac{1}{8}$ Scheffel Weizen, folglich ist $\frac{1}{7}$ Scheffel Roggen $=$ $\frac{1}{8}$ Scheffel Weizen; oder für 4 ℳ erhalte ich entweder $\frac{4}{7}$ Scheffel Roggen oder $\frac{1}{2}$ Scheffel Weizen; folglich sind $\frac{4}{7}$ Scheffel Roggen $=$ $\frac{1}{2}$ Scheffel Weizen; oder für 7 ℳ erhalte ich entweder 1 Scheffel Roggen oder $\frac{7}{8}$ Scheffel Weizen; folglich ist 1 Scheffel Roggen $=$ $\frac{7}{8}$ Scheffel Weizen usw. Jede der erhaltenen Gleichungen muß in die gebräuchliche Form gebracht, d. h. sie muß in den kleinsten ganzen Zahlen ausgedrückt werden. Also: Ist $\frac{1}{7}$ Scheffel Roggen gleich $\frac{1}{8}$ Scheffel Weizen, so sind 56 mal $\frac{1}{7}$ Scheffel Roggen oder 8 Scheffel Roggen gleich 56 mal $\frac{1}{8}$ Scheffel Weizen oder 7 Scheffel Weizen. Dasselbe auch bei den anderen Gleichungen.

Die einfachste Form der Feststellung einer Gleichung ist die, die von dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen beider Größen ausgeht. So würde die obenstehende Aufgabe gelöst werden: Für (8 . 7 ℳ) 56 ℳ erhalte ich entweder 8 Scheffel Roggen oder 7 Scheffel Weizen; folglich sind 8 Scheffel Roggen gleich 7 Scheffel Weizen.

Würde man 7,20 ℳ und 8,40 ℳ für die einzelnen Preise einsetzen, so würde entweder eine Untersuchung über das auszuscheidende größte gemeinschaftliche Maß zu dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen führen, oder man sagte hier sofort: 840 . 7,20 ℳ $=$ 720 . 8,40 ℳ; folglich sind 840 Scheffel Roggen $=$ 720 Scheffel Weizen, gekürzt (da auch die Gleichung in den kleinsten ganzen Zahlen ausgedrückt wird) 84 Scheffel Roggen $=$ 72 Scheffel Weizen oder 7 Scheffel Roggen $=$ 6 Scheffel Weizen. — Wenn hier Verhältniszahlen eingesetzt wären, so würde die Lösung insofern einfacher sein, als diese durchgängig schon in den kleinsten Zahlen gegeben sind. Auch hier ist Vervielfachung die sicherste Form. Will man trotzdem einen anderen Weg verfolgen, vielleicht von der einen Größe direkt auf die andere schließen, so muß man nicht vergessen, die in Bruchzahlen sich darstellende Gleichung bald in ganzen Zahlen auszudrücken. Wie heißt die Gleichung zwischen Frk. und ℳ? 80 Pf. sind entweder 1 Frank oder $\frac{80}{100}$ ℳ $=$ $\frac{4}{5}$ ℳ. Das ist schon die Gleichung, die mit Gleichem (dem Nenner 5) vervielfacht, Gleiches ergibt. 5 . 1 Frk. $=$ 5 . $\frac{4}{5}$ ℳ, d. i. 5 Frk. $=$ 4 ℳ. (Die Wichtigkeit der Form mag dieses 2. Beispiel verteidigen.) Für die Volksschule empfehle ich nochmals nur den ersten Weg der Vervielfachung. — Sollte ausnahmsweise aus einer Gleichung das Verhältnis entwickelt werden, so ist dabei stets zu bedenken, daß die Verhältnisbestimmung eine Angabe der gleichen Teile der Größen ist. Sind 5

amerikanische Dollar = 17 ℳ, so ist 1 Dollar = $\frac{17}{5}$ ℳ. Nach diesen Fünftel ℳ soll nun hier verglichen werden. 1 Dollar hat $\frac{17}{5}$ ℳ (1 ℳ hat $\frac{5}{5}$ ℳ), folglich hat 1 Dollar 17 Teile, wie die ℳ deren 5 hat; folglich verhält sich ein Dollar zur ℳ = 17 : 5. Würde man die ℳ auf die Dollar bezogen haben, so würde die Vergleichung nach siebzehntel Dollar erfolgen, aber zu demselben Ziele führen.

Das Kapitel der Verhältnisse und Gleichungen bietet eine reiche Fülle von wichtigem und interessantem Stoffe. Mag der Lehrer der einklassigen Schule sich noch so sehr beschränken, alles das, was er von dem vorstehenden gebraucht, ist von großer Bedeutung für die praktische und formale Bildung des Kindes. Er halte auf einfache, dabei aber streng logische Schlußfolgerungen, er schneide jedes unnütze Wort ab, und er wird sehen, daß die geistige Zucht, in die sich so der Schüler nehmen muß, im Rechnen und auch in andern Fächern reichen Nutzen trägt. — Daß diese Bemerkungen gerade hier angeknüpft sind, während man doch meinen sollte, sie gehörten zu vielen anderen oder zu allen Rechengebieten, hat seinen Grund in der Erfahrung, daß in den Schulen häufig gar nichts von Verhältnissen und Gleichungen genommen wird, oder daß es dann bunt durcheinander geht, ohne Klarheit, ohne sprachliche Sauberkeit, weil zu vielerlei und zuviel mit einem Male geboten wird. Deshalb noch einmal: Wenn auch wenig, so doch etwas. Weise Mäßigung in der Stoffauswahl; strenge Methode in der Entwicklung; Beharrlichkeit in der Einprägung!

Gruppierung der Aufgaben (Schroeter, Tafelrechenhefte Ausg. A, 5. Heft, Gruppe 15 bis 19; Ausg. B, 3. Heft, Gruppe 50 bis 53).

I. Verhältnisbestimmungen.

1. Bestimmung der Verhältnisse:
   a) Aus 2 Feldstücken von 1,44 ha und 0,84 ha sollen Baupläne von je 0,12 ha gebildet werden. In wieviel Baupläne von der vorgeschriebenen Größe läßt sich jedes Stück zerlegen? (Einführung an angewandten Aufgaben.)
   b) Wie verhalten sich 35 kg : 28 kg? Wie verhält sich 576 : 900? (Übung an ganzen Zahlen.)
   c) Wie verhalten sich 0,72 ℳ : 0,84 ℳ? Wie verhält sich $1\frac{1}{3}$ Mon. zu $2\frac{5}{6}$ Mon.? Wie verhält sich $2\frac{3}{5} : 4\frac{1}{7}$? (Übung an Bruchzahlen.)
   d) 1 Mann leistet eine Arbeit in 5 Tagen, 1 Frau braucht zu derselben Arbeit 6 Tage; wie verhält sich die Arbeitsleistung des Mannes zu der der Frau? (Anwendung an angewandten Aufgaben.)
2. Wieviel Frank sind 880 ℳ? (Anwendung der Verhältnisse.)

II. Gleichungen.

1. Suche die Gleichung zwischen dem Nährwert von Bohnen und dem Nährwert von Roggen, wenn der Nährwert der Bohnen sich zu dem des Roggens verhält wie 40 : 33? (Bestimmung der Gleichung.)
2. Wie viele ha sind 20 preuß. Morgen, wenn 47 Morgen = 12 ha sind? (Anwendung der Gleichung.)

44. Die Prozentbestimmungen.

Sollen wir die Brüche $\frac{3}{4}$ und $\frac{5}{7}$ schnell nach ihrer Größe vergleichen, so haben wir wohl ein dunkles Gefühl, daß vielleicht $\frac{3}{4}$ größer sein könnte als $\frac{5}{7}$, aber schon bei diesen leicht übersehbaren Größen fehlt jede Sicherheit über die Größe des Unterschiedes. Wären beide Brüche bei dem Teilen, durch das sie doch entstanden sind, in dezimale Form gebracht worden, so würde sich in den Resultaten der gesuchte Unterschied klar und bestimmt ergeben. 0,75 und 0,714 ... zeigen, daß $\frac{3}{4}$ fast um $\frac{4}{100}$ größer ist als $\frac{5}{7}$. Dieselbe Unsicherheit in der Beziehung zweier Größen bleibt bei den Verhältnisbestimmungen oder auch bei den sonstigen das Verhältnis der Größen bestimmenden Erklärungen bestehen. Verhält sich heute der Preis des Roggens zum Preise des Weizens wie 9 : 11 und morgen vielleicht wie 23 : 27, so gibt diese Aufgabe kein klares Bild von den Beziehungen der Preisverhältnisse. Ebenso ist es, wenn ein Geschäftsmann sagt, daß er in der vergangenen Woche an 425 ℳ 85 ℳ und in dieser Woche an 360 ℳ 75 ℳ gewonnen hat. In welcher Woche er wirklich das relativ bessere Geschäft gemacht hat, ist direkt nicht zu erkennen. Man hat deshalb hier denselben Weg wie bei den Brüchen eingeschlagen, wenn man die Verhältnisse alle auf eine bestimmte Zahl bezogen hat, die auch bequem ist, nämlich auf 100. Verhält sich der Preis des Roggens zu dem des Weizens wie 9 : 11, so hat der Roggen 9 Preisteile, der Weizen aber 11. Hätte der Roggen 1 Preisteil, so würde der Weizen $\frac{11}{9}$ Preisteile haben, und auf 100 Preisteile des Roggens würden sich für den Weizen $\frac{1100}{9} = 122\frac{2}{9}$ Preisteile ergeben. Der Roggen verhält sich also zum Weizen wie 100 : $122\frac{2}{9}$, oder der Weizen hat auf 100 Preisteile des Roggens $22\frac{2}{9}$ Preisteile mehr. Nach der 2. Bestimmung der obigen Aufgabe hatte der Roggen 23, der Weizen aber 27 Preisteile. Auf 1 Preisteil des Roggens kommen dann $\frac{27}{23}$ Preisteile des Weizens und auf 100 Preisteile des Roggens $\frac{2700}{23} = 117\frac{9}{23}$ Preisteile des Weizens. Diesmal hat der Weizen also auf 100 Preisteile des Roggens nur $17\frac{9}{23}$ Teile mehr. — Dasselbe läßt sich noch leichter an dem 2. Beispiele nachweisen. Der Geschäftsmann hat in der ersten Woche auf 100 ℳ je 20 ℳ und in der zweiten Woche auf 100 ℳ je 20,83 ℳ gewonnen; also hat er verhältnismäßig in der zweiten Woche ein besseres Geschäft gemacht als in der ersten. Diese Verhältnisbestimmung auf 100 wird auch *Prozentbestimmung* (pro cent) genannt.

Bei der Einführung der Prozentbestimmungen werden vor der Namengebung Übungen angestellt, bei denen das Kind die verschiedensten Verhältnisse auf 100 beziehen muß. Nie darf die Bezeichnung „*verhältnismäßig*" fehlen. Z. B.: Von 50 Schulkindern fehlen 2, wieviel verhältnismäßig von 100 Kindern? — An 80 ℳ gewinnt ein Geschäftsmann 20 ℳ, wieviel verhältnismäßig an 100 ℳ? — Von 350 ℳ erzielt Herr Klaus 12,25 ℳ Zinsen, wieviel verhältnismäßig von 100 ℳ? usw. Jetzt erst wird den Kindern gesagt, daß die auf 100 bezogene Verhältnisbestimmung auch Prozentbestimmung genannt wird. Die Kinder stellen nun fest, daß von den 50 Kindern 4% fehlten, daß der Geschäftsmann 25% gewonnen

hat usw. Zur Befestigung werden einfache Übungen über die Bestimmung der Prozente aus dem angegebenen Größenverhältnisse und umgekehrt über die Bestimmung der Größen aus dem gegebenen Prozentverhältnisse angeschlossen. Z. B.: Wieviel % seiner Auslage gewinnt jemand, der auf 30 ℳ Auslage a) 40 ℳ, b) 45 ℳ, c) 36 ℳ Einnahme erzielt? Oder: Wieviel gewinnt jemand, wenn er von 60 ℳ a) 5%, b) 7%, c) 14% usw. gewinnt? oder: Jemand gewinnt 10% seiner Auslage, und zwar 15 ℳ; wieviel hat er ausgelegt? Alles das wird zunächst nur an den einfachsten, leicht auf 100 zu beziehende Zahlen geübt; ist die *direkte* Beziehung, wie zwischen 50 und 100 nicht möglich, so schließen wir auf das größte gemeinschaftliche Maß. Z. B.: Gewinnt jemand 40% und zwar 25 ℳ, so verlangt der Gewinn von 40 ℳ eine Auslage von 100 ℳ, 5 ℳ Gewinn eine Auslage von $\frac{1}{8}$ von 100, also 12,50 ℳ, und 25 ℳ Gewinn eine Auslage von 5 . 12,50 ℳ = 62,50 ℳ.

Hundert ist eine Zahl, die eine ansehnliche Anzahl von verwandten Zahlen hat, die in einfachen direkten oder indirekten Beziehungen zu ihr stehen. Gewinnt jemand auf eine Auslage von 100 ℳ 100 ℳ, so gewinnt er 100%; 100% aber gewinnt er auch, wenn er auf eine Auslage von 20 ℳ 20 ℳ gewinnt. Zuerst mögen diese 20 ℳ und ihr Gewinn auf 100 bezogen werden, bald wird das Kind merken, daß 100% jedesmal dann gewonnen sind, wenn die ganze Auslage gewonnen ist. Jemand gewinnt auf 4 ℳ 2 ℳ. Auf 100 ℳ werden es 25 . 2 = 50 ℳ, also $\frac{1}{2}$ Hundert sein, und auf 1 ℳ $\frac{1}{4}$ von 2 ℳ = $\frac{1}{2}$ ℳ. Der Gewinn beträgt also stets $\frac{1}{2}$ des Ganzen. Ein Gewinn, der die Hälfte der Auslage ausmacht, wird stets einem Gewinn von 50 auf 100, also von 50% entsprechen. — Mit leichter Mühe werden nun die andern bequemen Teile des Ganzen, die gewonnen oder verloren werden können, in Prozenten bestimmt. Z. B.: Jemand gibt 90 Pf. aus und gewinnt 10 Pf. Welchen Teil von 90 Pf. gewinnt er? Den wievielten Teil von 100 würde er also auch gewinnen? Es werden sich folgende Reihen ergeben, die durch zahlreiche Beispiele eingeführt und befestigt werden müssen:

a)

Das Ganze	= 100%	$\frac{1}{8}$ des Ganzen	= $12\frac{1}{2}$%
$\frac{1}{2}$ des Ganzen	= 50%	$\frac{1}{10}$ " "	= 10%
$\frac{1}{3}$ " "	= $33\frac{1}{3}$%	$\frac{1}{20}$ " "	= 5%
$\frac{1}{4}$ " "	= 25%	$\frac{1}{25}$ " "	= 4%
$\frac{1}{5}$ " "	= 20%	$\frac{1}{50}$ " "	= 2%
$\frac{1}{6}$ " "	= $16\frac{2}{3}$%		

b)		c)	
$\frac{1}{7}$ des Ganzen	= $14\frac{2}{7}$%	$\frac{2}{3}$ des Ganzen	= $66\frac{2}{3}$%
$\frac{1}{9}$ " "	= $11\frac{1}{9}$%	$\frac{3}{4}$ " "	= 75%
$\frac{1}{11}$ " "	= $9\frac{1}{11}$%	$\frac{2}{5}$ " "	= 40%
$\frac{1}{12}$ " "	= $8\frac{1}{3}$%	$\frac{3}{5}$ " "	= 60%
$\frac{1}{15}$ " "	= $6\frac{2}{3}$%	$\frac{4}{5}$ " "	= 80%
$\frac{1}{16}$ " "	= $6\frac{1}{4}$%	$\frac{5}{6}$ " "	= $83\frac{1}{3}$%
$\frac{1}{30}$ " "	= $3\frac{1}{3}$%	$\frac{3}{8}$ " "	= $37\frac{1}{2}$%
$\frac{1}{40}$ " "	= $2\frac{1}{2}$%	$\frac{5}{8}$ " "	= $62\frac{1}{2}$%
		$\frac{7}{8}$ " "	= $87\frac{1}{2}$%

Reihe a) ist unbedingt in jeder Schule einzuführen und einzuprägen, und je mehr ein Schüler von der Resultaten der Reihen b) und c) versteht und anzuwenden weiß, desto sicherer erreicht er das Ziel des Rechenunterrichts in praktischer und formaler Beziehung. Ist es doch die Rechenfamilie 100, deren Verwandtschaft wir von allen Seiten (nicht nur von der Zehnerseite) wieder kennen lernen. Jedes neu eingeführte und an zahlreichen Übungen auch eingeprägte Resultat wird dann in seiner Umkehrung angewendet, z. B.: Welchem Teile des Ganzen entsprechen $6\frac{2}{3}\%$? usw. Je sicherer das Verständnis und das Können dieser Reihen, vor allem der Reihe a) ist, desto schneller und leichter werden die ferneren Berechnungen angestellt werden können, da die Prozentbestimmungen nicht nur bei einfachen Gewinn- und Verlustrechnungen angewendet werden, sondern im öffentlichen Verkehrsleben eine hervorragende Stellung einnehmen. Kenntnis der Prozentbestimmungen und der Regeldetrischlüsse befähigen den Schüler, alle Aufgaben der bürgerlichen Rechnungsarten zu lösen, sobald er nur die einschlagenden technischen Ausdrücke versteht.

Zur Erzielung der geforderten Sicherheit werden Übungen angestellt, die die vorhin nacheinander eingeführten Resultate außer der Reihe doch unter Bezugnahme auf bestimmte Sachgebiete benutzen lehren. Die mit dem Ein- und Verkauf verbundene Gewinn- oder Verlustrechnung liegt am nächsten und wird ihrer Einfachheit wegen am häufigsten angewendet; außerdem werden Steuern und Zölle, Tara- und Rabattrechnung, Haushaltungsaufgaben, geographische und statistische Berechnungen, Nährwert der Nahrungsmittel, Durchschnittsrechnung u. a. m. herangezogen. Häufig wird die Lösung der Aufgaben erleichtert, wenn die Prozentbestimmungen in einfache Verhältnisbestimmungen umgewandelt werden, besonders dann, wenn vom Verkaufspreis auf den Einkaufspreis, d. i. also von der durch die Prozentrechnung gewonnenen Zahl auf die Grundzahl geschlossen werden soll. Z. B.: Der Einkaufspreis von 1 Ballen Kaffee beträgt 220 ℳ; wie groß ist der Verkaufspreis, wenn 30% gewonnen werden? Lösung: Bei 30% Gewinn hat der Verkaufspreis 130 und der Einkaufspreis 100 Teile, oder gekürzt 13 und 10 Teile. Sind 10 Teile = 220 ℳ, so ist 1 Teil = 22 ℳ und 13 Teile 13 . 22 ℳ = 286 ℳ. Oder: Was kostet eine Kiste Apfelsinen im Einkauf, wenn dieselbe bei $16\frac{2}{3}\%$ Verlust mit 10 ℳ verkauft wird? Lösung: Wenn $16\frac{2}{3}\%$ verloren werden, wird $\frac{1}{6}$ des Einkaufspreises verloren, der Verkaufspreis besteht demnach aus $\frac{5}{6}$, wie der Einkaufspreis aus $\frac{6}{6}$ besteht; er verhält sich also zum Einkaufspreis wie 5 : 6. Sind 5 Teile 10 ℳ, so ist 1 Teil 2 ℳ und 6 Teile sind 12 ℳ. Also kostet eine Kiste Apfelsinen im Einkaufe 12 ℳ. — Bei der schriftlichen Form wird der Bruchsatz gebraucht werden, z. B. bei der 1. Aufgabe:

Bei 100 Teilen Einkaufspreis ergeben sich $\frac{220 \text{ ℳ} \cdot 130}{100} = 286$ ℳ
" 1 "
" 130 "

Wie die Umwandlung der Prozentbestimmungen in Verhältnisbestimmungen notwendig wird, so kann es andererseits auch erforderlich werden,

die Verhältnisbestimmungen oder Gleichungen in Prozentbestimmungen umzuwandeln. Wenn sich ein alter Scheffel zum hl wie 11 : 20 verhält, so hat der alte Scheffel bei 20 Teilen des hl 9 Teile weniger, das sind bei 5 . 20, also 100 Teilen, auch 5 . 9 = 45 Teile; folglich ist er um 45 % kleiner als das hl; das hl hingegen ist bei 11 Teilen des alten Scheffels um 9 Teile größer, bei 1 Teil des alten um $\frac{9}{11}$ Teile und bei 100 Teilen um 100 . $\frac{9}{11} = 81\frac{9}{11}$ Teil; es ist also um $81\frac{9}{11}$ % größer als der alte Scheffel.

Diese hier angedeutete wechselseitige Beziehung der Größen zueinander ist von nicht zu unterschätzender Bedeutung für die vollständige Klarlegung des Prozentbegriffs und für die zu erzielende Fertigkeit und Sicherheit bei der Berechnung der Prozente. Deshalb müssen derartige Aufgaben möglichst häufig gegeben werden und nicht nur in der Form der Verhältnisbestimmungen. So lassen sich auch die Gleichungen gut hierzu verwerten. Sind z. B. 8 l = 7 Quart, so ist 1 l = $\frac{7}{8}$ Quart. 1 Quart ist bei 7($\frac{7}{8}$) Teilen des l um 1($\frac{1}{8}$) Teil größer, also um den 7. Teil, also um $14\frac{2}{7}$ %, während das l bei 8 Teilen des Quartes um 1 Teil kleiner ist, also um $\frac{1}{8}$ des Ganzen, also um $12\frac{1}{2}$ %. Schon die auf das Verhältnis hinzielende Form der Gleichung (1 l = $\frac{7}{8}$ Qu.) genügt, um das Größenverhältnis in Prozenten bestimmen zu können.

Hierher gehören auch die dem geschäftlichen Leben entnommenen Ein- und Verkaufsaufgaben, bei denen der Gewinn bald nach dem Einkaufspreise und bald nach dem Verkaufspreise berechnet wird. Wir sind gewöhnt, den Gewinn bei einem Einkaufspreise von 28 ℳ und einem Verkaufspreise von 35 ℳ auf 25 % zu berechnen. Der Geschäftsmann rechnet meistens anders. Er sagt, bei 35 ℳ Einnahme habe ich 7 ℳ Gewinn; folglich habe ich 20 % meines Umsatzes gewonnen; oder er schließt, bei einem jährlichen Umsatz von 35 000 ℳ habe ich bei einem Gewinn von 12 % ein zu versteuerndes Jahreseinkommen von 4200 ℳ. — Das Instruktive bei allen diesen Aufgaben ist die Beziehung der gleichen Zahl auf verschiedene Grundzahlen. Zu einer ähnlichen Aufgabe kommt man, wenn man feststellen läßt, wieviel Prozent Zulage ein Beamter bei gleichen Steigerungsätzen bei jeder Zulage erhält. Beträgt das Grundgehalt 1500 ℳ und die jedesmalige Zulage 200 ℳ, so sind dies zum ersten Male ($\frac{2}{15}$) $13\frac{1}{3}$ %, zum zweiten Male ($\frac{2}{17}$) $11\frac{13}{17}$ % usw.

Am schwersten verstanden werden überall die Aufgaben, die die Größe von einzelnen Zahlen nach Prozenten vergleichen lassen. Z. B.: Um wieviel % ist 8 größer als 5, oder $\frac{1}{2}$ kleiner als $\frac{3}{4}$? Die Aufgaben sind an sich so unendlich einfach; doch schreckt ihre abstrakte Form den unsichern Rechner, so daß er sich gar nicht an die Lösung heranwagt. Man kleide die Aufgaben ein, sage also z. B.: Ein kg Ware kostet im Einkauf 5 ℳ, im Verkauf 8 ℳ; wieviel % werden gewonnen? Die Lösung wird jetzt in gewohnter Weise schnell und sicher gebracht werden. Es ließe sich über die Berechtigung solcher Aufgaben mit Recht streiten; aber — sie werden vielfach gegeben, und sie füllen bei Übungen ihre Stelle aus und empfehlen sich dort durch ihre kurze Form; außerdem lehrt uns die Scheu der Schüler vor diesen abstrakten Zahlen wieder einmal, daß wir den Rechenunterricht möglichst konkret gestalten müssen.

Eine Verdeutschung des Wortes „Prozent" in „auf Hundert" ist sehr zu wünschen und wird auch längst angestrebt; doch ist gerade das Wort Prozent so sehr in unser Sprachbewußtsein eingedrungen, daß man es als ein Lehnwort betrachten kann, dessen Ausscheiden wünschenswert doch nicht unbedingt nötig ist.

An die Prozentbestimmungen schließen sich die Verhältnisbestimmungen auf 1000 an. Einführung und Gliederung ist wie bei der Prozentbestimmung; Sachgebiete sind Versicherungen und Mischungen.

Gruppierung der Aufgaben (Schroeter, Tafelrechenhefte, Ausg. A, 5. Heft, Gruppe 20 bis 30, Ausg. B, 3. Heft, Gruppe 54 bis 61).

1. Bestimmung der Prozente:
   a) Ein Kaufmann bezieht für 560 ℳ Zucker; er gewinnt 84 ℳ. Wieviel Prozent gewinnt er?
   b) Wieviel Prozent verliert ein Kaufmann, wenn er das kg einer Ware für 2,00 ℳ eingekauft hat und wenn er dasselbe mit 1,60 ℳ verkaufen muß?
   c) Wieviel Prozent gewinnt A, wenn er an 500 ℳ Auslage gewinnt: a) 50 ℳ; b) 25 ℳ; c) 100 ℳ; d) 250 ℳ? (Bestimmung des Prozentsatzes nach den Teilen des Ganzen.)
2. Allgemeine Verwendung der Prozentbestimmungen:
   a) Ein Kaufmann zahlt für eine Ware 480 ℳ; wieviel beträgt a) der Gewinn, wenn er 25% gewinnt; b) der Verkaufspreis, wenn er 30% gewinnt?
   b) Der Verkaufspreis einer Ware beträgt für das kg 1,75 ℳ; wie teuer ist das kg der Ware im Einkauf, wenn $16\frac{2}{3}$% gewonnen werden?
   c) Wie teuer ist das kg einer Ware eingekauft worden, wenn bei 20% Gewinn an einem kg 0,35 ℳ gewonnen werden?

Diese Hauptgliederung wird möglichst bei allen zur Vertiefung und Anwendung herangezogenen Sachgebieten beibehalten. Auf Gewinn- und Verlustrechnung angewendet, wird es z. B. ergeben: 1. Gegeben ist der Einkaufspreis und a) der Gewinn oder Verlust und b) der Verkaufspreis, gesucht wird der Prozentsatz. 2. Gegeben ist der Einkaufspreis und der Prozentsatz, gesucht wird, a) der Gewinn oder Verlust, b) der Verkaufspreis. 3. Gegeben ist der Prozentsatz und a) der Verkaufspreis, b) der Gewinn oder Verlust, gesucht wird der Einkaufspreis.

In den Aufgabenheften sind folgende Sachgebiete behandelt worden:
   a) Steuern (Gr. 22).
   b) Zölle (Gr. 23).
   c) Allgemeine Haushaltungsaufgaben (Gr. 24).
   d) Gewinn- und Verlustrechnung (Gr. 25 und 26).
   e) Aus der Rabattrechnung (Gr. 27).
   f) Besondere Haushaltungsaufgaben (Gr. 28).
   g) Durchschnittsrechnung (Gr. 29).
   h) Verhältnisbestimmungen auf 1000 (Gr. 30).

45. Die Zinsrechnung.

Die Zinsrechnung im engsten Sinne berücksichtigt die Sachgebiete, die sich bei dem Ausleihen eines Kapitals ergeben, im engen Zusammenhange damit aber stehen die Entschädigungen für andere Arten des Kapitals, z. B. für das des Hausbesitzers (Miete), für das des Grundbesitzers (Pacht) usw. Die Begriffe: „Kapital, Zins, Schulden und Gläubiger" sind in unseren Zeiten selbst dem Kinde nicht mehr ganz fremd; es genügen zur vollständigen Klarstellung kurze Hinweisungen.

Der **Schuldner** leiht von dem **Gläubiger** das **Kapital** und zahlt dafür eine Vergütung, die man **Zinsen** nennt. Die Zinsen werden von 100 ℳ (pro cent) auf ein Jahr festgesetzt. Zur Sicherstellung gibt der Schuldner dem Gläubiger entweder einen **Schuldschein**, oder er verpfändet ihm bewegliche oder unbewegliche Gegenstände. Der Schuldschein muß enthalten

1. den Namen des Gläubigers,
2. die Höhe der Schuldsumme in Worten,
3. den Zinsfuß,
4. den Tag und Ort,
5. die Art der Zinszahlung,
6. die Kündigungsfrist und die Art der Zurückzahlung,
7. die Namensunterschrift des Schuldners.

Schuldscheine über einen Betrag von 150 ℳ an unterliegen der Stempelpflicht. Die Stempelgebühr beträgt bis 200 ℳ 10 Pf., für je weitere angefangene 200 ℳ je 10 Pf., von 1000 ℳ ab für jedes angefangene 1000 50 Pf.

Verpfändete bewegliche Gegenstände kann der Gläubiger veräußern, falls der Schuldner nicht zahlt. Die gerichtliche Verschreibung von Haus oder Grundbesitz heißt **Hypothek**. Die Hypothek wird in das Hypothekenbuch eingetragen. Man unterscheidet nach der Reihenfolge der auf dem Grundstück lastenden Summen die 1., 2., usw. Hypothek. Kommt der Schuldner seinen Verpflichtungen nicht nach, so kann der Hypothekengläubiger die Zwangsversteigerung (Subhastation) des Pfandobjektes beantragen. Besitzer einer 2., 3. usw. Hypothek müssen bei einem solchen Antrage die vorhergehenden Hypotheken und die Gerichtskosten sicherstellen. Aus dem Erlöse werden zunächst die Gerichtskosten, vielleicht auch vorberechtigte Forderungen, dann die Hypotheken der Reihe nach bezahlt. Die letzten Hypotheken können ausfallen. Hypotheken können auf andere Personen übertragen (zediert) werden; zurückgezahlte Hypothekenschulden werden im Grundbuche gelöscht.

Wer unverhältnismäßig hohe Zinsen nimmt, treibt Wucher. Obwohl der Wucherer bestraft wird, fallen doch viele Geldbedürftige aus Leichtsinn, aus Unerfahrenheit oder durch besondere Not in Wuchererhände, aus denen sie sich schwer befreien können.

Diese Bemerkungen dürfen selbstverständlich nicht im Zusammenhange vorgetragen und nachgebetet werden, sondern der Lehrer wird sie an geeigneter Stelle an Aufgaben erläutern und üben.

Es ist uns also möglich, ohne ausgedehnte Vorbereitung an den eigentlichen Stoff heranzutreten. Die Zinsrechnung gehört zu den wichtigsten der bürgerlichen Rechnungsarten; sie muß in jeder Schule, wenn auch in verschiedener Ausdehnung, getrieben werden. Ihr Umfang ist ein so großer, daß eine Gruppierung notwendig wird.

Gegenüber der im gewöhnlichen Verkehr herrschenden Sitte, die Zinsen von Jahr zu Jahr oder auch in noch kleineren Zeiträumen zu zahlen, machen unsere Sparkassen die Ausnahme, auf Verlangen Zins auf Zins zu gewähren. Auch andere Geldinstitute, Lebensversicherungsgesellschaften, Rentenbanken u. a. berechnen sich Zins auf Zins. Aber schon die Sparkassen genügten, um es unserer Schule zur Pflicht zu machen, auch die zusammengesetzteren Aufgaben, in denen Zins auf Zins gewährt wird, in ihren Stoffplan aufzunehmen. Wir unterscheiden deshalb zunächst die *einfache Zinsrechnung* und die *Zinseszinsrechnung*.

Bei der einfachen Zinsrechnung kommen einzelne Fälle vor, daß der einfache Zins jahrelang zum Kapital gezählt wird. Deshalb gliedern wir die einfache Zinsrechnung in die, bei der Kapital und Zins *getrennt* ist und in die, bei der Kapital und Zins *zusammengezogen* ist.

Bei jeder Zinsrechnungsaufgabe sind es nun vier Faktoren, die bestimmend einwirken; diese sind: 1. die Zinsen, 2. das Kapital, 3. die Zeit, 4. der Prozentsatz. Die einfache Zinsrechnung wird deshalb in ihren beiden Unterabteilungen wieder diese vier Faktoren zu berücksichtigen haben. Je drei derselben sind gegeben, der vierte wird gesucht. Wir unterscheiden also zunächst bei der 1. Unterabteilung der einfachen Zinsrechnung vier Gruppen, je nachdem gesucht werden: a) die Zinsen, b) das Kapital, c) die Zeit, d) der Prozentsatz. Ähnlich ist es bei der 2. Unterabteilung, nur daß dort Kapital und Zins zusammengezogen werden. Es ergeben sich also auch hier vier Gruppen, je nachdem gesucht werden: a) die Summe von Kapital und Zins, b) das Kapital, c) der Prozentsatz und d) die Zeit. Es liegt nun nahe, daß auch innerhalb jeder Gruppe eine mannigfaltige Gliederung der Aufgaben stattfinden muß; doch sollen diese kleineren Aufgabengruppen hier nur bei der Behandlung erwähnt werden.

Man könnte auch hier wieder den Vorwurf erheben, daß es falsch sei, solche Übersichten an die Spitze der Besprechung zu stellen. Falsch würde es sein, wollte der Lehrer in der Schule mit einem Vortrag über die Gliederung der Zinsrechnung die Behandlung derselben beginnen; die Aufstellung des Systems folgt dort der Behandlung. Diese Abschnitte aber sind nicht für Volksschüler, sondern für Volksschullehrer und speziell für solche, die es werden wollen, geschrieben, denen die Zinsrechnung als Rechnungsart bekannt ist; sie wollen nur Ratschläge erteilen für die Behandlung der Rechnungsart. Wer aber als Lehrer einen Unterrichtsstoff behandeln will, muß denselben zunächst nach allen Richtungen hin beherrschen, daher hier also schon die Übersicht über die Hauptgruppen der Zinsrechnung.

A. Einfache Zinsrechnung.

I. Kapital und Zinsen getrennt.

1. Die Zinsen werden gesucht.

Die Entschädigung, die der Schuldner dem Gläubiger gewährt, ist in den seltensten Fällen in einem Betrage festgelegt, sondern sie wird fortwährend von Jahr zu Jahr bis zur Rückzahlung nach vereinbartem Verhältnisse bezahlt. Gebräuchlich ist es, das Verhältnis dieser Entschädigung zu der Schuldsumme nach Prozenten zu bestimmen. Ein Kapital wird zu 4% ausgeliehen heißt demnach, es werden von je 100 ℳ des Kapitals in jedem Jahre 4 ℳ als Entschädigung gezahlt. Der Begriff Prozent wird hier also durch die Zeitbestimmung erweitert. Die Entschädigung heißt Zins, Zinsen, oder auch Interessen. Die bei weitem größte Anzahl der dem Leben entnommenen Zinsrechnungsaufgaben verlangt das Aufsuchen der Zinsen, ihr wird daher die Schule ihre Aufmerksamkeit besonders widmen müssen.

Die einfacheren Aufgaben jeder Gruppe sind Kopfrechenaufgaben, die schwierigeren mögen dem Tafelrechnen zugewiesen werden. Die Kopfrechenform ist die bekannte. Zunächst werden die Zinsen des Kapitals zu dem gegebenen Prozentsatze in einem Jahre, dann in der gegebenen Anzahl der Jahre gesucht. Im Anfang darf auf die Zinsen von 100 ℳ in einem Jahre zurückgegangen werden; bald aber wird die Lösungsform dahin verkürzt, daß sofort vom ganzen Kapital der jährliche Zins gesucht wird, besonders wenn es aus reinen Hundertern oder aus sonst bequemen Zahlen besteht. Erst wenn die schulgemäße Lösungsform gesichert ist, dürfen die Faktoren auch anders gruppiert werden, wenn es von Vorteil ist. Die schulgemäße Lösungsform einer hierher gehörenden Aufgabe ist folgende: Die Aufgabe heißt: Wieviel Zinsen bringen 875 ℳ zu 4% in $3\frac{1}{2}$ Jahren? 800 ℳ bringen zu 4% in 1 Jahre 32 ℳ Zinsen, 75 ℳ bringen zu 4% in 1 Jahre 3 ℳ Zinsen, also bringen 875 ℳ zu 4% in 1 Jahre 35 ℳ Zinsen; in 3 Jahren bringen sie 3 mal 35 ℳ = 105 ℳ, in $\frac{1}{2}$ Jahre $\frac{1}{2}$ mal 35 ℳ = 17,50 ℳ, 105 ℳ + 17,50 ℳ = 122,50 ℳ; also bringen 875 ℳ zu 4% in $3\frac{1}{2}$ Jahren 122,50 ℳ Zinsen.

Die schriftliche Form führt auf die erweiterte Regeldetri zurück. Der Bedingungssatz ist stets in dem Prozentsatze gegeben, so daß die Aufgabe, wieviel Zinsen bringen 436 ℳ zu $3\frac{2}{3}$% in $5\frac{1}{2}$ Jahren, zu folgendem Ansatz führt:

100 ℳ	in 1	Jahre	$3\frac{2}{3}$ ℳ
436 „	„ $5\frac{1}{2}$	Jahren	?

Die Auflösung lautet:

100 ℳ	in 1	Jahre
1 „	„ 1	„
436 „	„ $5\frac{1}{2}$	Jahren

$$\frac{11 \cdot \overset{109}{\overset{\cancel{218}}{\cancel{436}}} \cdot 11}{3 \cdot \underset{50}{\cancel{100}} \cdot \cancel{2}} = 263{,}78 \text{ ℳ}$$

Bemerkung: Man vermeidet bei der Ausrechnung gern das Kürzen der in dem Nenner stehenden 100, es sei denn, daß sie ganz weggebracht oder zu sehr bequemen Zahlen verkürzt werden kann. In dem obenstehenden Beispiel ist 100 gegen 218 gekürzt worden. Die aus der 218 entstandene 109 bietet aber nicht so viel Vorteil, daß der Nachteil, der durch die für 100 eintretende 50 entsteht, ausgeglichen wird.

Wenn viele Aufgaben dieser Art schriftlich gerechnet sind, findet der Schüler durch Vergleichung, daß stets das Produkt aus Prozentsatz-, Kapital- und Zeitangaben durch 100 geteilt wird. Hieraus ergibt sich die kürzeste Formel für die Berechnung der Interessen in einer Anzahl von Jahren; sie ist: Zinsen $= \frac{K . \% . Z}{100}$.

Wir dürfen uns nun nicht damit begnügen, die Kinder mit dieser Formel bekannt gemacht zu haben, sondern wir müssen an einer recht großen Anzahl von Beispielen die freie Verwendung derselben sichern. Erst wenn die Kinder ohne sich zu bedenken bei jeder Aufgabe, die das Aufsuchen der Zinsen verlangt, sofort das Vielfache aus Kapital, Prozentsatz und Zeit durch 100 teilen, hat die Einführung der gedachten Formel ihren Zweck erfüllt, den nämlich, dem praktischen Leben zu dienen und Rechenfertigkeit zu erzielen.

Interessant und wichtig zugleich ist auch die Berechnung der Zinsen auf eine kleinere Zeit, vielleicht auf wenige Tage. Aufgabe: Eine Ware, die am 1. Februar mit 435 ℳ bezahlt werden sollte, wird erst am 18. Februar bezahlt; wieviel Zinsen müssen vergütet werden, wenn 5% gerechnet werden? Lösung: Vom 1. Februar bis 18. Februar sind 17 Tage; es müssen also die Zinsen von 435 ℳ zu 5% in 17 Tagen berechnet werden.

Ansatz und Auflösung.

100 ℳ geben in 360 Tagen
1 „ gibt „ 1 Tag
435 „ geben „ 17 Tagen

$\left(\frac{5\text{ ℳ} .}{100 . 360}\right) \frac{435 . 17}{} = 7395 : 7200 = 1{,}027$

19500 = 1,03 ℳ
51000
600

Das Kind findet bald, daß bei 5% der Zins von 1 ℳ in 1 Tag stets $\frac{5}{100 . 300} = \frac{1}{7200}$ ℳ ist, daß also das Vielfache aus der Kapitalangabe und der Anzahl der Tage geteilt durch 7200 die Zinsen ergibt. Wenn die Zinsen zu 4% berechnet werden sollten, so würde 1 ℳ in 1 Tag zu 4% $\frac{4}{100 . 360} = \frac{1}{9000}$ ℳ bringen, das Vielfache aus Kapital und Zeit (Tage) müßte also bei 4% durch 9000 geteilt werden. Die Zahlen, durch die wir bei einem gegebenen Prozentsatze das Vielfache aus Kapital und der Anzahl der Tage teilen müssen, um die Zinsen zu erhalten, nennt man Zinszahlen. Diese Zinszahlen ergeben sich nur bei geeigneten Prozentsätzen. Wir merken uns:

Bei	3%	heißt	die	Zinszahl	12000
„	$3\frac{1}{3}\%$	„	„	„	10800
„	$3\frac{3}{5}\%$	„	„	„	10000
„	$3\frac{3}{4}\%$	„	„	„	9600
„	4%	„	„	„	9000
„	$4\frac{1}{2}\%$	„	„	„	8000
„	5%	„	„	„	7200
„	6%	„	„	„	6000

Lassen sich durch diese wenigen Zahlen Erleichterungen im Rechnen erzielen, so ist die kurze Zeit, die zur Einführung derselben gebraucht wurde, reich belohnt. Im gewöhnlichen Verkehr kommen Verhältnisse, bei denen die Zinszahlen verwendet werden können, gar nicht selten vor. So wird bei hinausgeschobener Bezahlung von Waren in den meisten Fällen eine Zinsentschädigung eintreten, die mit Hilfe der Zinszahlen leicht gefunden wird.

Zum Schluß dieser Bemerkungen will ich noch auf einen in der Praxis häufig vorkommenden Mangel hinweisen. Sollen die Zinsen von einzelnen Mark berechnet werden, so kann sich der Schüler sehr schwer loslösen von der an und für sich ganz richtigen Ansicht, daß die Prozente die Zinsen von 100 ℳ in 1 Jahre angeben. Es wird ihm nicht leicht, den Begriff zu erweitern und zu verstehen, daß Prozent heißt „auf Hundert", daß also nicht nur Mark, sondern auch Pfennige eingesetzt werden können. 4% Zinsen heißt also auf 100 ℳ in 1 Jahre 4 ℳ; es heißt aber auch auf 100 Pf. (1 ℳ) in 1 Jahre 4 Pf. Zinsen. Diese letzte Erklärung ist besonders beim Kopfrechnen für die Bestimmung der Zinsen von kleinen (d. h. unter 100 ℳ liegenden) Kapitalen sehr wichtig.

Gruppierung der Aufgaben (Schroeter, Tafelrechenhefte, Ausg. A, 6. Heft, Gruppe 1 bis 3; Ausg. B, 3. Heft, Gruppe 62 bis 64).

1. Wieviel Zinsen bringen in 1 Jahre: a) 400 ℳ zu 4%; b) 600 ℳ zu $3\frac{1}{3}\%$; c) 800 ℳ zu $3\frac{3}{5}\%$? (Gesucht werden die jährlichen Zinsen von reinen Hundertern zu nach und nach schwerer werdendem Prozentsatze.)
2. Wieviel Zinsen bringen in 1 Jahre: a) 60 ℳ zu 5%; b) 475 ℳ zu 4%; c) 830 ℳ zu $3\frac{1}{3}\%$? (Gesucht werden die jährlichen Zinsen von Teilen von Hundert und von zusammengesetzten Kapitalzahlen zu einem Prozentsatze, der noch ganze Mark als Zinsen ergibt.)
3. Wieviel Zinsen bringen in 1 Jahre: a) 840 ℳ zu $3\frac{1}{3}\%$; b) 1470 ℳ zu $4\frac{1}{2}\%$; c) 625 ℳ zu $3\frac{3}{5}\%$? (Gesucht werden die jährlichen Zinsen von schwereren Kapitalzahlen zu einem schwierigeren Prozentsatze.)
4. Wieviel Zinsen bringen: a) 500 ℳ zu 3% in 2 Jahren; b) 620 ℳ zu 5% in 4 Jahren; c) 845 ℳ zu $3\frac{1}{2}\%$ in $6\frac{1}{2}$ Jahren? (Die Schwierigkeit der Aufgaben wird gesteigert durch die Heranziehung der Jahre; zuerst werden volle Jahre, dann auch Bruchteile der Jahre und gemischte Zahlen als Zeitangabe verwendet werden.)

Bemerkung: Jetzt folgt die Einführung der Formel und die ausreichende Übung derselben an Beispielen, wie: Wieviel Zinsen bringen a) 627 ℳ zu $3\frac{2}{3}$ % in $5\frac{1}{4}$ Jahren; b) 835 ℳ zu $3\frac{4}{5}$ % in $7\frac{3}{4}$ Jahren? usw.

5. Wieviel Zinsen bringen: a) 816 ℳ zu $3\frac{1}{2}$ % in 4 Monaten; b) 728 ℳ zu $3\frac{3}{4}$ % in 5 Monaten; c) 2050 ℳ zu $3\frac{1}{3}$ % in 1 Jahr 7 Monaten? (Die Schwierigkeiten steigern sich in der Zeitangabe dadurch, daß zuerst Monate, dann Jahre und Monate herangezogen werden.)

6. Wieviel Zinsen bringen: a) 282 ℳ zu 5 % in 14 Tagen; b) 137 ℳ zu 4 % in 25 Tagen; c) 718 ℳ zu $3\frac{1}{3}$ % in 1 Monat 7 Tagen? (Einführung der Zinszahlen und Lösung der Aufgaben mit diesen Zahlen.)

2. Das Kapital wird gesucht.

Die hierher gehörenden Aufgaben kommen im Leben seltener vor, da größtenteils das Kapital gegeben ist. Doch ist nicht ausgeschlossen, daß auch ab und zu das Kapital gesucht wird, das zu einem gegebenen Prozentsatze in einer gegebenen Zeit eine verlangte Zinssumme bringt. Auch hier müssen die zusammengesetzten Aufgaben den einfachen Aufgaben folgen, doch werden die gegebenen Verhältnisse nicht allzu schwierig sein dürfen. Die einklassige Volksschule wird auf Bruchjahre oder Tage vollständig verzichten müssen, sie wird es aber auch können, da derartige Aufgaben den wenigsten ihrer Schüler je begegnen dürften.

Die Hauptschwierigkeit der Aufgaben wird immer darin bestehen, daß ein unmögliches Kapital sich ergibt. Der Lehrer hat also bei der Auswahl der Aufgaben darauf zu sehen, daß zunächst volle Hunderter, dann wenigstens volle Mark sich ergeben. Bruchmark dürfen in den Resultaten nicht vorkommen.

Die schulgemäße Lösungsform für das Kopfrechnen berechnet zunächst die Zinsen von 100 ℳ (dem Normalkapital), zu dem gegebenen Prozentsatz in der gegebenen Zeit und vergleicht dann diese Zinsen mit der in der Aufgabe gegebenen Zinssumme. Welches Kapital gibt zu $3\frac{1}{2}$ % in 5 Jahren 154 ℳ Zinsen? Lösung: 100 ℳ geben in 5 Jahren zu $3\frac{1}{2}$ % $17\frac{1}{2}$ ℳ Zinsen. So oft nun $17\frac{1}{2}$ ℳ in 154 ℳ enthalten sind, so viel mal 100 ℳ beträgt das Kapital. $17\frac{1}{2}$ ℳ sind $\frac{35}{2}$ ℳ, 154 ℳ sind $\frac{308}{2}$ ℳ; $\frac{35}{2}$ ℳ sind in $\frac{280}{2}$ ℳ 8mal und in $\frac{28}{2}$ ℳ $\frac{28}{35}$, d. i. $\frac{4}{5}$mal, also in $\frac{308}{2}$ ℳ $8\frac{4}{5}$ mal enthalten, (oder $17\frac{1}{2}$ ℳ sind $\frac{35}{2}$ ℳ, 35 ℳ sind in 140 ℳ 4mal und in 14 ℳ $\frac{2}{5}$mal, also in 154 ℳ $4\frac{2}{5}$mal enthalten, $\frac{35}{2}$ ℳ sind aber 2mal so oft enthalten, also $8\frac{4}{5}$mal); folglich beträgt das Kapital $8\frac{4}{5} \cdot 100$ ℳ $= 880$ ℳ.

Bei der schriftlichen-Form ist auch hier wieder der Bedingungssatz im Prozentsatz gegeben. Welches Kapital bringt zu 3 % in 5 Jahren 177 ℳ Zinsen?

Ansatz und Auflösung:

3 ℳ bedingen in 1 Jahr ein Kapital von 100 ℳ
1 „ bedingt „ 1 „ „ „
177 „ bedingen „ 5 Jahren

$$\frac{100 \cdot \overset{59}{\cancel{177}}}{\cancel{3} \cdot 5} = 1180 \text{ ℳ}$$

Zu beachten ist hier, daß das Verhältnis zwischen Kapital und Zeit ein umgekehrtes ist. Je mehr Jahre das Kapital aussteht, desto kleiner muß es sein und umgekehrt. An vielen Aufgaben ergibt sich dann, daß stets das 100 fache der Zinsen durch das Vielfache aus Kapital und Zeit geteilt werden muß, daher die Formel $K = \frac{100 \cdot \text{Zinsen}}{\% \cdot Z}$

Auch hier wird der freie Gebrauch der Formel durch zahlreiche Übungsaufgaben gesichert und dabei, wie schon oben erwähnt, das Kürzen der 100 möglichst vermieden.

Gruppierung der Aufgaben (Schroeter, Tafelrechenhefte, Ausgabe A, 6. Heft, Gruppe 4 und 5; Ausgabe B, 3. Heft, Gruppe 65.)

1. Welches Kapital bringt: a) in 5 Jahren zu 4% 40 ℳ Zinsen; b) in 2 Jahren zu $3\frac{3}{8}$% 14,40 ℳ Zinsen? (Bestimmung des Kapitals, das in vollen Jahren zu dem gegebenen Prozentsatz die gegebenen Zinsen bringt; die Schwierigkeiten der Auflösung werden nacheinander im Zinsfuß und auch in den Zinsen gesteigert.)
2. Welches Kapital bringt: a) in $\frac{1}{4}$ Jahr zu 4% 33,80 ℳ Zinsen; b) in $1\frac{1}{3}$ Jahr zu $3\frac{3}{5}$% 35,40 ℳ Zinsen; c) in $3\frac{1}{2}$ Monaten zu 3% 5,25 ℳ Zinsen? (Bruchjahre, gemischte Zahlen als Zeitangabe und Monate steigern hier die Schwierigkeit.)

3. Die Zeit wird gesucht.

Auch für diese Aufgaben gilt, was von denen des vorigen Abschnittes gesagt worden ist. Nur hin und wieder kommen Zinsrechnungsaufgaben vor, bei denen die Zeit gesucht wird. Die schulgemäße Lösungsform gleicht der bei der vorigen Unterabteilung eingeführten Form; es werden nämlich die Zinsen des gegebenen Kapitals zu dem gegebenen Prozentsatz in 1 Jahr (der Normalzeit) gesucht, und durch Vergleichung mit den gegebenen Zinsen wird dann die Anzahl der Jahre gefunden. In welcher Zeit bringen 575 ℳ zu 4% 230 ℳ Zinsen? 575 ℳ bringen zu 4% in 1 Jahr 23 ℳ. So oft nun 23 ℳ in 230 ℳ enthalten sind, so viel mal 1 Jahr steht das Kapital aus. 23 ℳ sind in 230 ℳ 10 mal enthalten; folglich ist das Kapital 10 Jahre ausgeliehen. Auch die schriftliche Form ist den früheren Formen entsprechend.

Ansatz und Auflösung:

100 Mark bringen 4 ℳ in 1 Jahre
1 „ bringt 1 „
575 „ bringen 230 „

$$\frac{\overset{25}{\cancel{100}} \cdot \overset{10}{\cancel{230}}}{\cancel{4} \cdot \underset{23}{\cancel{575}}} = 10 \text{ Jahre.}$$

Im Anschluß an die früher entwickelten Formeln ergibt sich hier mit Leichtigkeit: $Z = \frac{\text{Zinsen} \cdot 100}{\% \cdot K}$

Die Gruppierung der in Gruppe 6 des 6. Heftes der Ausg. A gegebenen Aufgaben wird bedingt durch die allmählich eingeführten schwereren Zahlen bei Kapital und Zeitangabe.

1. In welcher Zeit geben 500 ℳ zu 5% 75 ℳ Zinsen?
2. In welcher Zeit geben 732 ℳ zu 5% 158,60 ℳ Zinsen?
3. In welcher Zeit geben 850 ℳ zu $3\frac{3}{10}$ % 213,18 ℳ Zinsen?

Für die einklassige Schule finden sich in Gruppe 66 des 3. Heftes der Ausg. B 10 Aufgaben.

4. Der Prozentsatz wird gesucht.

Nur selten wird es notwendig sein, den Prozentsatz, zu dem ein Kapital ausgeliehen ist, zu berechnen, da die Feststellung von dem Prozentsatze mit zu den Bedingungen gehört, unter welchen ein Kapital ausgeliehen wird. Da aber diese Aufgaben keine nennenswerten Schwierigkeiten bieten, so kann, wenn es möglich ist, der Vollständigkeit wegen zur Übung eine kurze Zeit zu ihrer Lösung nicht ohne Nutzen verwendet werden. Als schulgemäße Lösungsform für das Kopfrechnen wird es sich empfehlen, wenn die Zinsen des gegebenen Kapitals in der gegebenen Zeit zuerst zu einem Prozent (dem Normalprozentsatz) gesucht werden. Eine Enthaltenseinsaufgabe führt dann in gleicher Weise wie bei dem gesuchten Kapital und der gesuchten Zeit zum Ziele. Diese Form schließt sich den bei den anderen Unterabteilungen geübten Formen eng an und ist der Einheitlichkeit wegen für das Kopfrechnen zu empfehlen. Der Prozentsatz, zu dem 425 ℳ ausgeliehen sind, wenn sie in $3\frac{1}{2}$ Jahren 59,50 ℳ Zinsen bringen, wird demnach folgendermaßen gefunden werden: 425 ℳ bringen zu 1% in 1 Jahr $4\frac{1}{4}$, in $3\frac{1}{2}$ Jahren $3\frac{1}{2} \cdot 4\frac{1}{4} = \frac{119}{8}$ ℳ Zinsen. So oft nun $\frac{119}{8}$ ℳ in 59,50 $= \frac{119}{2}$ ℳ enthalten sind, zu so viel mal 1% ist das Kapital ausgeliehen. $\frac{119}{8}$ ℳ sind in $\frac{119}{2}$ ℳ so oft enthalten, als $\frac{1}{8}$ ℳ in $\frac{1}{2}$ ℳ = 4 mal; folglich ist das Kapital zu 4% ausgeliehen. Diese Aufgabe dürfte immerhin zu den schwereren Aufgaben dieser Art gehören. Ein anderer Weg, um den Prozentsatz zu bestimmen, wird der bei der Prozentrechnung eingeschlagene sein, daß man nämlich die Zinsen von 100 ℳ in 1 Jahr berechnet. Diese Form entspricht der schriftlichen Form, bei welcher wir ansetzen

Ansatz und Auflösung:
425 ℳ bringen in $3\frac{1}{2}$ Jahren 59,50 ℳ
1 „ bringt „ 1 Jahre
100 „ bringen „ 1 „

$$\frac{\overset{\overset{0{,}50}{\cancel{8{,}50}}}{\cancel{59{,}50}}\ ℳ \cdot 2 \cdot \overset{4}{\cancel{100}}}{\underset{\cancel{17}}{\cancel{425}} \cdot \cancel{7}} = 4\%$$

Bei den drei ersten Unterabteilungen der Zinsrechnung war der Bedingungssatz stets im Prozentsatz gegeben, nur mußten wir diesen Bedingungssatz umformen je nach der erfragten Größe. Mit 4% war also gesagt: a) 100 ℳ bringen in 1 Jahr 4 ℳ Zinsen; b) 4 ℳ Zinsen verlangen in 1 Jahr ein Kapital von 100 ℳ und c) 100 ℳ bringen 4 ℳ in 1 Jahr. Die eigentliche Aufgabe bildet dann stets den Fragesatz. Bei der vierten Unterabteilung ist aber die Aufgabe der Bedingungssatz und der erfragte Prozentsatz der Fragesatz.

Auch hier ergibt sich durch Vergleichung die Formel: $\% = \frac{100 \cdot \text{Zinsen}}{K \cdot Z}$

Die in Gruppe 7 des 6. Heftes gegebenen Aufgaben gehen in den gegebenen 3 Größen von einfachen Zahlen nach und nach zu schwereren Zahlen über; das ist auch hier die naturgemäße Stufenfolge der Aufgaben.

1. Zu wieviel Prozent bringen 900 ℳ in 4 Jahren 108 ℳ Zinsen?
2. Zu wieviel Prozent bringen 875 ℳ in $1\frac{1}{3}$ Jahren 35 ℳ Zinsen?
3. Zu wieviel Prozent bringen 750 ℳ in $3\frac{1}{3}$ Jahren 87,50 ℳ Zinsen?

Gruppe 66 des 3. Heftes der Ausg. B bringt 10 passende Aufgaben, die in einklassigen Schulen bei entsprechender Zeit gerechnet werden können.

Noch einmal soll hier erwähnt werden, daß die zum Schluß der einzelnen Abschnitte aufgeführten Formeln für das praktische Rechnen eine nicht zu unterschätzende Bedeutung haben. Zunächst ist es, wie oben schon ausgeführt wurde, die Aufgabe der Schule, beim schriftlichen Rechnen die klare Erkenntnis an dem Bruchsatze zu erzielen. Nach vielfacher Übung mit ausgeführten Schlüssen und wenn eine vollständige Sicherheit erzielt ist, darf dann die Formel entwickelt werden. Den umgekehrten Verhältnissen zwischen K und Z und zwischen Z und K ist besondere Aufmerksamkeit zuzuwenden. — Noch zu erwähnen dürfte sein, daß bei längerer Zeit und bei bequemem Prozentsatze der Teil des Kapitals, der jährlich als Zinsen gebracht wird, berücksichtigt werden kann. So bringt ein Kapital zu 4% in 1 Jahre $\frac{1}{25}$ seines Wertes; es verdoppelt sich also in 25 Jahren und bringt in $12\frac{1}{2}$ Jahren die Hälfte seines Wertes an Zinsen. Zu $3\frac{1}{3}$ % bringt ein Kapital in 30 Jahren den vollen Wert, in 15 Jahren die Hälfte, in 10 Jahren $\frac{1}{3}$ und in 20 Jahren $\frac{2}{3}$ seines Wertes. Das Kopfrechnen wird diese Überlegungen verwerten können.

II. Kapital und Zinsen zusammengezogen.

1. Die Summe von Kapital und Zins wird gesucht.

Welchen Wert eine Summe nach einer Reihe von Jahren hat, wenn sie zu einem gegebenen Prozentsatze verzinst wird, ist eine Frage, deren Lösung das Leben genug verlangt. Bei Ein- und Verkäufen handelt es sich vielfach um die Entscheidung darüber, ob eine kleinere Barzahlung oder eine größere nach gewisser Zeit zu zahlende Summe annehmbarer ist. Die Berechnung, wie hoch die in Aussicht gestellte Barzahlung in der gegebenen Zeit zu dem zeitgemäßen Zinsfuß anwachsen wird, und die Vergleichung dieser Summe mit der anderen angebotenen Zahlung löst diese Frage. — Bei der Lösung der Aufgabe, wie hoch ein Kapital anwächst, ist von Anfang an darüber Klarheit zu verschaffen, daß in jedem neuen Jahre dasselbe Kapital Zinsen bringt, daß also mit der Anzahl der Jahre sich nur der Zins, nicht das Kapital vervielfacht. Es ist ja leicht einzusehen, daß, wenn 100 ℳ in 1 Jahr zu 4% auf 104 ℳ anwachsen, sie in 2 . 1 Jahre nicht auf 2 . 104 ℳ = 208 ℳ anwachsen können.

Anders ist es, wenn das Kapital, dessen Größe nach einer Reihe von Jahren gesucht ist, ein Vielfaches von 100 ℳ ist. 100 ℳ wachsen in 3 Jahren auf 112 ℳ an, 3 . 100 ℳ wachsen in derselben Zeit auf 3 . 112 ℳ = 336 ℳ an. Der unklare Kopf wird beides in einen Topf

werfen, und hieraus erklären sich die häufigen Fehler. Wir wiederholen deshalb: *Man achte darauf, daß bei diesen Aufgaben die Zeit nur die Zinsen, nicht das Kapital vervielfacht.* — In Beziehung auf die vorstehende Ausführung bieten sich zwei schulgemäße Lösungsformen dar. Die erste Form trennt Kapital und Zins; die zweite faßt beides zu einem Normalkapital zusammen. Ein Beispiel möge das erläutern: Wie hoch wachsen 500 ℳ zu 4% in 6 Jahren an? 1. *Lösung:* 500 ℳ bringen in 6 Jahren zu 4% 120 ℳ Zinsen, folglich wachsen 500 ℳ in 6 Jahren zu 4% auf 500 ℳ + 120 ℳ = 620 ℳ an! 2. *Lösung:* 100 ℳ wachsen in 6 Jahren zu 4% auf 124 ℳ an, 500 ℳ demnach auf 5 . 124 ℳ = 620 ℳ. Für die Volksschule eignet sich die erste Form für das Kopfrechnen; die zweite Form führt zum Tafelrechnen. Für das Kopfrechnen ist es wesentlich, daß durch Trennung von Kapital und Zins die schon bekannte Lösungsform verwertet werden kann, so daß am Schluß nur noch das Zusammenziehen von Kapital und Zins hinzukommt. Bei dem Tafelrechnen muß noch zunächst die in der zweiten Lösungsform versteckte Aufgabe, wie hoch 100 ℳ in der gegebenen Zeit zu dem gegebenen Prozentsatze anwachsen, in einer Nebenaufgabe gelöst werden. Hierauf sind Ansatz und Auflösung die einer einfachen Regeldetriaufgabe:

100 ℳ wachsen in 6 Jahren zu 4% auf
1 „ wächst „ 1 Jahre
500 „ wachsen „ 6 Jahren

$$\frac{124\ \mathcal{M}\ .\ 500}{100} = 620\ \mathcal{M}$$

2. *Das Kapital wird gesucht.*

Hierzu müssen Summe von Kapital und Zins, Prozentsatz und Zeit gegeben sein. Die Frage wird lauten: Welches Kapital wächst in 7 Jahren zu 4% auf 640 ℳ an? Wir erinnern uns, gefunden zu haben, daß die Summe von Kapital und Zins in der gegebenen Zeit sich mit dem Kapital verändert. Demnach werden wir die Größe eines Normalkapitals (100 ℳ) in der gegebenen Zeit zu dem gegebenen Prozentsatze berechnen und dann durch die Vergleichung dieser Summe mit der gegebenen die Größe des Kapitals bestimmen. 100 ℳ wachsen in 7 Jahren zu 4% auf 128 ℳ an; so oft 128 ℳ in 640 ℳ enthalten sind, so viel mal 100 ℳ beträgt das Kapital. 128 ℳ sind in 640 ℳ 5 mal enthalten; demnach beträgt das Kapital 5 . 100 = 500 ℳ. Eine Trennung von Kapital und Zins ist hier selbstverständlich nicht möglich. — Bei der schriftlichen Form wir auch hier die Vorbereitung des Ansatzes durch die Berechnung der Höhe des Normalkapitals zu den angegebenen Bedingungen vorausgehen müssen; es wird sich dann ergeben:

128 ℳ (in 7 Jahren zu 4%) verlangen
1 „
640 „

$$\frac{100\ \mathcal{M}\ .\ 640}{128} = 500\ \mathcal{M}$$

3. *Der Prozentsatz wird gesucht, und* 4. *die Zeit wird gesucht.*

Wir fassen beide Unterabteilungen zusammen, nicht nur deshalb, weil sie selten angewendet werden, sondern weil beide in gleicher Weise auf Auf-

gaben der einfachen Zinsrechnung zurückgeführt werden können. Bei beiden Formen ist die Summe von Kapital und Zins, das Kapital und entweder die Zeit oder der Prozentsatz gegeben. In selteneren Fällen kann auch an Stelle des Kapitals die Angabe der Zinsen treten. Stets aber wird eine Trennung der Summe von Kapital und Zinsen in Kapital und in Zinsen möglich sein, und so kommen dann hier die unter I. 3. und 4. erkannten und geübten Formen von neuem zur Anwendung und dadurch zur Befestigung. Wir prägen uns demnach ein: Die Kopfrechenlösungsform der zweiten Hauptabteilung der einfachen Zinsrechnung ist, wenn Kapital und Zins getrennt werden kann, die von der ersten Abteilung her bekannte. Diese Trennung ist nicht möglich, wenn das Kapital gesucht wird; dort ist demnach eine neue Lösungsform einzuführen. Die Aufgabe der Schule wird hier vornehmlich die sein, die Schüler in der Auffassung der Aufgaben sicher zu machen. Ganz besondere Bedeutung gewinnen die Aufgaben, bei denen Kapital und Zins zusammengezogen ist, bei der Rabattrechnung. Die Gesamtsumme ist dort gleich der Summe von Kapital und Zins; die gesuchte Barzahlung ist der gegenwärtige Wert der späteren Zahlung, also das Kapital. Dort (Abschnitt 47) wolle man das weitere nachsehen.

Gruppierung der Aufgaben. (Schroeter, Tafelrechenhefte, Ausg. A, 6. Heft, Gruppe 8—10, Ausg. B, 3. Heft, Gruppe 67.)

In den vier Unterabteilungen werden jedesmal zuerst einfache Zahlen (volle Hunderter und ganze Zahlen in Prozentsatz und Zeit), dann nach einander schwierigere Zahlen gegeben. Für das Kopfrechnen sind die zuletzt genannten Aufgaben nicht geeignet. Auch bei scheinbar einfachen Zahlen muß der Lehrer vorsichtig sein, damit die Aufgaben sich nicht allzuweit von der Wirklichkeit entfernen.

1. a) Wie hoch wachsen 600 ℳ in drei Jahren zu 4% an?
   b) Wie groß ist die Summe von Kapital und Zins von 87 ℳ zu $3\frac{2}{3}$ % in $6\frac{1}{4}$ Jahren?
2. a) Welches Kapital wächst in 4 Jahren zu $3\frac{1}{2}$ % auf 342 ℳ an?
   b) Welches Kapital wächst in $5\frac{1}{3}$ Jahren zu $3\frac{1}{3}$ % auf 742 ℳ an?
3. In welcher Zeit wachsen 444 ℳ zu 4% auf 470,64 ℳ an?
4. Zu wieviel Prozent wachsen 875 ℳ zu $3\frac{1}{3}$ % auf 914 ℳ an?

B. Die Zinseszinsrechnung.

Zinsen von den Zinsen (also Zinseszinsen) dürfen ohne besondere Abmachung zwischen Gläubiger und Schuldner nicht verlangt werden. Nun gibt es aber Einrichtungen, bei welcher Zinseszinsen gerechnet werden. Es sind dies Geldinstitute, welche kleine Summen annehmen, zu größeren vereinigen und diese zinstragend anlegen. Das bekannteste derartige Geldinstitut ist die Sparkasse. Die Sparkasse nimmt Einlagen von 1 ℳ ab an und verzinst dieselben. Die nicht abgehobenen Zinsen werden am Schluß des Jahres zum Kapital gezählt und nun mitverzinst. Die Sparkassen sind entweder von Ortschaften (Stadtsparkassen) oder von

größeren Verbänden (Kreissparkassen) eingerichtet und gesichert. Dadurch, daß die Sparkasse die aus den kleineren Einzahlungen entstandenen größeren Summen in Hypotheken, Wertpapieren oder dgl. zu einem höheren Zinsfuße anlegen kann als sie selbst zahlt, entsteht ein Überschuß, der die Verwaltungskosten deckt und aus dem ein Reservefonds angelegt wird; ein Teil des Überschusses kommt auch der Ortschaft oder dem Verbande zugute.

Die Sparkassen regen den Sparsamkeitstrieb ganz besonders an; sie sind deshalb von hoher volkswirtschaftlicher Bedeutung. Damit auch kleinere Beträge als 1 ℳ gespart werden können, werden von den Sparkassen häufig auch Sparmarken zu je 10 Pf. ausgegeben; außerdem sind Schulsparkassen eingerichtet worden. Viele Arbeitgeber belohnen treue und fleißige Arbeiter dadurch, daß sie denselben einen entsprechenden Teil des Geschäftsüberschusses in Sparkasseneinlagen anlegen. Erst der Besitz eines Sparkassenbuches gibt den Ansporn zum Sparen.

Auch Lebensversicherungsgesellschaften, Rentenbanken und ähnliche Einrichtungen rechnen mit Zinseszins. Die Lebensversicherungsgesellschaften gleichen den Sparkassen darin, daß sie kleine Beträge, die sonst nicht zinstragend angelegt werden würden, zu größeren Kapitalen vereinigen.

Das Kopfrechnen tritt hier zurück, da die Aufgaben der unbequemen Zahlen wegen dem Tafelrechnen zugehören. Der Schule wird die doppelte Aufgabe zufallen, nämlich die Kinder zu befähigen, zuerst auf eine geringe Anzahl von Jahren das Kapital mit seinen Zinseszinsen zu berechnen und sie dann in das Verständnis der Tabellen einzuführen und mit dem Gebrauch derselben bekannt zu machen.

Bei der Berechnung des Kapitals mit den Zinseszinsen geht man davon aus, daß dasjenige Kapital vom Anfang eines Jahres an zinstragend ist, das sich aus Kapital und Zins am Schluß des verflossenen Jahres ergeben hat. Wie hoch also 450 ℳ bei 4% Zinseszinsen am Schluß des 3. Jahres angewachsen sind, wird gefunden werden, wenn wir folgern:

100 ℳ wachsen im 1. Jahre zu 4% auf $\frac{104\ ℳ\ .\ 450}{100}$ an.
1 „ wächst „ „
450 „ wachsen „ „

Diese $\frac{104\ .\ 450}{100}$ ℳ stehen am Anfang des 2. Jahres als Kapital aus.

Es wachsen auch im 2. Jahre 100 ℳ zu 4% auf $\frac{104\ ℳ\ .\ 104\ .\ 450}{100\ .\ 100}$ an.
1 „ „
$\frac{104\ .\ 450}{100}$ „ „

Im 3. Jahre stehen $\frac{104\ .\ 104\ .\ 450}{100\ .\ 100}$ ℳ aus; jede Mark wächst im 3. Jahr auf $\frac{104}{100}$ ℳ an. $\frac{104\ .\ 104\ .\ 450}{100\ .\ 100}$ ℳ wachsen also im 3. Jahre auf $\frac{104\ .\ 104\ .\ 104\ .\ 450}{100\ .\ 100\ .\ 100}$ ℳ an. Die Vergleichung ergibt, daß bei 4% für

jedes Jahr der Faktor $\frac{104}{100}$ hinzukommt. Einige Übung wird bald dahin führen, daß die Kinder ansetzen, wenn der Betrag von 775 ℳ zu 3 % in 2 Jahren berechnet werden soll: $\frac{103 \,.\, 103 \,.\, 775}{100 \,.\, 100}$ ℳ. Das Verständnis dieses Ansatzes ist bald erzielt; unbequem ist aber die Vereinigung so vieler Faktoren in Zähler und Nenner; deshalb ist es die zweite Aufgabe der Schule, die Kinder in das Verständnis der Tabellen einzuführen und sie mit dem Gebrauch derselben bekannt zu machen.

Die 1. Tabelle gibt an, wie hoch 1 ℳ in 1 bis zu 30 Jahren zu den gebräuchlichsten Prozentsätzen anwächst. Da die Kinder das Wesen der Zinsrechnung erfaßt haben, so verstehen sie diese Tabelle leicht. Man hält zunächst eine Prozentbestimmung fest, vielleicht 4 %, und läßt angeben,

1. Tabelle.

1 ℳ wächst an:

J.	Zu 3 %	Zu $3\frac{1}{3}$ %	Zu $3\frac{1}{2}$ %	Zu $3\frac{3}{5}$ %	Zu $3\frac{3}{4}$ %	Zu 4 %	Zu $4\frac{1}{4}$ %	Zu $4\frac{1}{2}$ %	Zu 5 %
1	1,030	1,033	1,035	1,036	1,037	1,040	1,042	1,045	1,050
2	1,060	1,068	1,071	1,073	1,076	1,082	1,087	1,092	1,103
3	1,092	1,103	1,109	1,112	1,117	1,125	1,133	1,141	1,158
4	1,125	1,140	1,148	1,152	1,159	1,170	1,181	1,193	1,216
5	1,159	1,178	1,188	1,193	1,202	1,217	1,231	1,246	1,277
6	1,194	1,217	1,229	1,236	1,247	1,266	1,284	1,302	1,341
7	1,229	1,258	1,272	1,281	1,294	1,317	1,338	1,361	1,408
8	1,267	1,299	1,317	1,327	1,342	1,370	1,395	1,422	1,478
9	1,305	1,343	1,363	1,375	1,393	1,425	1,454	1,486	1,552
10	1,344	1,388	1,411	1,424	1,445	1,482	1,516	1,553	1,630
11	1,384	1,431	1,460	1,476	1,499	1,541	1,581	1,623	1,712
12	1,426	1,482	1,511	1,529	1,555	1,603	1,648	1,696	1,798
13	1,469	1,532	1,564	1,584	1,614	1,667	1,710	1 772	1,888
14	1,513	1,583	1,619	1,641	1,674	1,734	1,791	1,852	1,982
15	1,558	1,635	1,675	1,700	1,737	1,803	1,867	1,935	2,081
16	1,605	1,690	1,734	1,761	1,802	1,875	1,946	2,022	2,185
17	1,653	1,746	1,790	1,824	1,870	1,950	2,029	2,113	2,294
18	1,702	1,804	1,857	1,890	1,900	2,028	2,115	2,208	2,409
19	1,753	1,865	1,923	1,958	2,013	2,109	2,205	2,308	2,529
20	1,806	1,927	1,990	2,029	2,088	2,193	2,299	2,412	2,655
21	1,860	1,991	2,059	2,102	2,166	2,281	2,397	2,520	2,788
22	1,916	2,057	2,132	2,177	2,248	2,372	2,498	2,634	2,927
23	1,974	2,127	2,206	2,256	2,332	2,467	2,605	2,752	3,073
24	2,032	2,197	2,283	2,337	2,419	2,566	2,715	2,876	3,227
25	2,094	2,270	2,363	2,421	2,510	2,669	2,831	3,005	3,388
26	2,157	2,346	2,446	2,508	2,604	2,776	2,951	3,141	3,557
27	2,221	2,424	2,532	2,598	2,702	2,887	3,076	3,282	3,735
28	2,288	2,504	2,620	2,692	2,803	3,002	3,207	3,430	3,922
29	2,357	2,588	2,712	2,798	2,908	3,122	3,344	3,584	4,118
30	2,427	2,674	2,807	2,889	3,017	3,247	3,486	3,745	4,324

wie hoch 1 ℳ in 1, 3, 7, 9 usw. Jahren zu 4% anwächst. Da jede Mark in derselben Weise anwächst, so folgt daraus, daß 15 ℳ z. B. in 3 Jahren 15mal soviel ergeben als 1 ℳ. Eine Anzahl von Aufgaben wird hiernach gelöst. Dasselbe nun vielleicht zu 4½%, dann zu 3⅓% usw. Nun werden Übungen folgen, nach denen die Kinder angeben, wie hoch 1 ℳ in 3 Jahren zu 3%, 4%, 4½% usw. anwächst, dasselbe wird auch für verschiedene andere Jahre bestimmt. Die Kinder suchen die Angaben in der wagerechten Reihe der Jahre und in der senkrechten Reihe der Prozentbestimmungen. Bald werden sie jede Aufgabe schnell und sicher lösen können.

Gewöhnlich bieten die Rechenbücher noch andere Tabellen; die bekannteste derselben ist die, welche angibt, wie hoch 1 ℳ jährliche Einlage in 1 bis zu 30 Jahren zu den gebräuchlichen Prozentsätzen anwächst.

2. Tabelle.

1 ℳ jährliche Einlage beträgt nach:

J.	Zu 3%	Zu 3⅓%	Zu 3½%	Zu 3⅗%	Zu 3¾%	Zu 4%	Zu 4¼%	Zu 4½%	Zu 5%
1	1,030	1,033	1,035	1,036	1,037	1,040	1,042	1,045	1,050
2	2,090	2,101	2,106	2,109	2,113	2,122	2,129	2,137	2,153
3	3,182	3,204	3,215	3,221	3,230	3,247	3,262	3,278	3,311
4	4,307	4,344	4,362	4,373	4,389	4,417	4,443	4,470	4,527
5	5,466	5,522	5,550	5,566	5,591	5,634	5,674	5,717	5,804
6	6,660	6,739	6,779	6,802	6,838	6,900	6,958	7,019	7,145
7	7,889	7,997	8,052	8,083	8,132	8,217	8,296	8,380	8,553
8	9,156	9,296	9,368	9,410	9,474	9,587	9,691	9,802	10,031
9	10,461	10,639	10,731	10,785	10,867	11,012	11,145	11,288	11,583
10	11,800	12,027	12,142	12,209	12,312	12,494	12,661	12,841	13,213
11	13,189	13,461	13,602	13,685	13,811	14,035	14,242	14,464	14,925
12	14,615	14,943	15,113	15,214	15,366	15,638	15,890	16,160	16,723
13	16,084	16,475	16,677	16,798	16,980	17,305	17,600	17,932	18,611
14	17,579	18,058	18,296	18,439	18,654	19,039	19,391	19,784	20,593
15	19,155	19,693	19,971	20,139	20,391	20,842	21,258	21,719	22,674
16	20,760	21,383	21,705	21,900	22,193	22,717	23,204	23,742	24,859
17	22,413	23,129	23,500	23,724	24,060	24,667	25,233	25,855	27,153
18	24,115	24,933	25,357	25,614	25,960	26,695	27,348	28,064	29,562
19	25,868	26,798	27,280	27,572	27,973	28,804	29,553	30,371	32,091
20	27,674	28,725	29,269	29,601	30,061	30,997	31,852	32,783	34,746
21	29,534	30,716	31,329	31,703	32,227	33,278	34,249	35,303	37,534
22	31,450	32,773	33,460	33,880	34,475	35,650	36,747	37,937	40,461
23	33,424	34,900	35,667	36,136	36,807	38,117	39,352	40,689	43,534
24	35,456	37,097	37,950	38,473	39,226	40,683	42,067	43,565	46,761
25	37,550	39,367	40,313	40,894	41,736	43,352	44,898	46,571	50,149
26	39,607	41,713	42,759	43,402	44,340	46,128	47,849	49,711	53,706
27	41,828	44,137	45,291	46,000	47,042	49,015	50,925	52,993	57,441
28	44,116	46,641	47,911	48,692	49,845	52,017	54,132	56,423	61,363
29	46,473	49,229	50,623	51,481	52,753	55,139	57,476	60,007	65,481
30	48,900	51,903	53,430	54,370	55,770	58,386	60,962	63,752	69,805

Das Verständnis der 2. Tabelle (S. 271) wird ebenfalls auf die angegebene Weise erschlossen, und es bereitet dem Kinde Vergnügen, wenn es die Höhe seiner jährlichen Ersparnisse berechnen kann.

Gruppierung der Aufgaben (Schroeter, Tafelrechenhefte, Ausg. A, 6. Heft, Gruppe 11 und 12; Ausg. B, 3. Heft, Gruppe 63).

1. a) Wie hoch wachsen mit Zinseszinsen 376 ℳ zu $3\frac{1}{2}$ % in 15 Jahren an?
   b) Welches Kapital wächst zu 4 % Zinseszinsen in 2 Jahren auf 459,85 ℳ an?
2. a) A legt jährlich 25 ℳ auf die Sparkasse, die $3\frac{1}{3}$ % Zinseszinsen rechnet. Wieviel hat er nach 20 Jahren?
   b) In dem preußischen Beamtenverein zahlt ein gesunder Mann im Alter von 35 Jahren für je 1000 ℳ, die er auf den Todesfall versichert, jährlich 24,90 ℳ Prämie. Wieviel hat er, wenn Zins auf Zins zu 4 % gerechnet wird und die Dividenden unberücksichtigt bleiben, in einem Alter von 60 Jahren eingezahlt?

Aus dem reichhaltigen Stoffe der Zinsrechnung will nun der Lehrer auswählen, was für seine Schule sich eignet. Die einklassige Schule wird sich ja vielfach beschränken müssen, das Aufsuchen von Kapital, Prozentsatz und Zeit und gewisse Teile der Zinseszinsrechnung können fortfallen oder müssen in engbegrenzter Ausdehnung vorgeführt werden; im allgemeinen gebietet aber die Bedeutung der Zinsrechnung, daß der nicht allzusehr gekürzte Stoff eine möglichst eingehende Behandlung erfährt, um die Schüler für das Leben vorzubereiten. Auch hier ist das letzte Ziel die Befähigung der Schüler zu selbständiger und sicherer Lösung aller hierher bezüglichen Aufgaben.

Diese Selbständigkeit der Schüler muß auch in der Aufstellung von Schuldscheinen geübt werden. Die Schüler werden belehrt, welche Stücke ein ordentlicher Schuldschein enthalten muß, und nach behandelten Mustern stellen sie dann derartige Schuldscheine auf. Vermeidung alles überflüssigen Ballastes und aller Redensarten, aber Betonung der notwendigen Stücke ist überall zu beachten.

46. Über Staatspapiere und Aktien.

Wenn wir den Rechenstoff vor Jahrzehnten mit dem Rechenstoff der Jetztzeit vergleichen, so finden wir, daß einesteils eine große Erleichterung der Schulen stattgefunden hat durch das Ausscheiden von einer Reihe von Stoffen, die durch Verbesserung der Methode und durch Vereinfachung der das gewerbliche Leben beherrschenden Münzen, Maße und Gewichte überflüssig geworden sind, daß aber anderenteils auch neue Rechenstoffe der Schule zugewiesen wurden durch neue Beziehungen des öffentlichen Lebens und durch Verallgemeinerung einzelner früher nur besonderen Kreisen zugänglichen Kenntnisse. Zu diesen neuen Stoffen gehört das in der Überschrift dieses Abschnitts erwähnte Gebiet der Staatspapiere und Aktien. Nicht, daß es Staatspapiere und Aktien vor Jahrzehnten nicht

gegeben hätte, aber diese waren den breiten Schichten des Volkes unbekannt und viele Schulen hielten es nicht für ihre Pflicht, die zukünftigen Staatsbürger über Sachen zu belehren, die den wenigsten etwas nützen konnten; überhaupt waren die Anforderungen nicht hoch, die Lehrer und Eltern an die Leistungen der Schüler im Rechnen stellten. Seit längerer Zeit ist es anders geworden. Die Anstrengungen einzelner Pädagogen, die eine derartige Betreibung des Rechenunterrichts forderten, daß Verstandesbildung und praktische Bildung Hand in Hand gehen und sich gegenseitig fördern sollten, wurden von den Anforderungen, welche das Leben an jeden Erwachsenen stellt, tatkräftig unterstützt. Die Pflicht der Schulen ist es, auch diese neuen Stoffe dem Kinde durch planmäßigen Unterricht nahezubringen. Von bekannten Verhältnissen aus müssen die Kinder zu den zunächst ihrem Anschauungskreise noch ferner liegenden Sachgebieten geführt werden.

Die Begriffe: Gläubiger, Schuldner, Schuldschein, Prozentsatz usw. sind bei der Zinsrechnung genügend erläutert worden. Die Belehrung über Staatspapiere und Aktien knüpft an diese Begriffe an. Wie eine Privatperson bei außerordentlichen Gelegenheiten (Kauf, Bau usw.) gezwungen ist, Schulden zu machen, ebenso auch der Staat. Kriege, Kanäle, Eisenbahnbauten usw. sind es, die den Staat veranlassen, Geld zu leihen. Der Staat ist der Schuldner; wer aber sind die Gläubiger? Da der Staat nicht kleine Summen gebrauchen kann, so kann auch eine Person nicht das ganze Geld hergeben; es müssen mehrere, ja viele sein, welche Gläubiger des Staates werden. Jedem stellt der Staat einen Schuldschein aus, der deshalb Staatsschuldschein heißt. Die Staatsschuldscheine sind mit fortlaufenden Nummern versehen und unterscheiden sich von den gewöhnlichen Schuldscheinen vor allem dadurch, daß nicht eine Person als Gläubiger genannt wird, sondern daß der jedesmalige Besitzer des Scheines die Rechte des Gläubigers ausübt und daß eine Kündigung des Geldes dem Inhaber nicht zusteht. Die Staatsschuldscheine müssen aber verzinst werden. Da nicht bestimmte und bekannte Personen Inhaber der Staatsschuldscheine sind, müßte die Zinszahlung viele Unbequemlichkeiten verursachen und auf bedeutende Schwierigkeiten stoßen. Um diese zu vermeiden, ist dem Staatsschuldschein ein Zinsbogen beigegeben. Dieser Zinsbogen besteht aus einzelnen Zetteln, die (Koupons) Zinsscheine genannt werden und aus der Überschrift, d. i. der Anweisung zur Erhebung neuer Zinsscheine (dem Talon). Jeder Zinsbogen führt im Talon und auf jedem Zinsscheine die Nummer des Staatsschuldscheins, zu dem er gehört; auf dem Zinsschein sind außerdem noch der Prozentsatz, die Höhe der Zinsen und die Zeit, auf die sie bezahlt werden sollen, vermerkt. Zu jedem Zinsbogen gehören 12 oder mehr Zinsscheine, der erste berechtigt zur Erhebung der Zinsen auf das 1. Halbjahr, der 2. auf das dann folgende usw. Die Zinsscheine müssen vom Zinsbogen abgetrennt und bei der Staatskasse eingelöst werden; das braucht aber nicht am Fälligkeitstermine zu geschehen, sondern sie haben mehrere Jahre (gewöhnlich 4 Jahre) Giltigkeit; deshalb werden die Zinsscheine häufig wie anderes Papiergeld ausgegeben. Sind

alle Zinsscheine eines Zinsbogens abgeschnitten, so wird der übrigbleibende Talon an vorher bestimmte Staatskassen eingesendet, die dem Inhaber einen neuen Zinsbogen übersenden. Auch einzelne Provinzen oder auch Städte schließen ähnliche Anleihen ab wie der Staat. Diese Papiere nennt man Stadtschuldscheine, Pfandbriefe usw.

Da die Papiere auf den Inhaber ausgestellt sind, so sind sie verkäuflich. Nicht immer wird der auf dem Papiere genannte Wert, der Nennwert, bezahlt, sondern bald mehr, bald auch weniger. Die Höhe des Wertes richtet sich wie bei jeder Ware 1. nach der Sicherheit, die der Schuldner bietet, 2. nach der Höhe der Zinsen und 3. nach dem Angebot. Letzteres wieder wird durch die sonstigen öffentlichen Verhältnisse bedingt. Kann man Geld auf andere Weise, z. B. in Hypotheken usw., besser anlegen, so kauft man keine Staatspapiere, sondern verkauft sie, und der Preis derselben sinkt. Dieser wechselnde Preis heißt Kurs. Ist der Kurs gleich dem Nennwert, so sagt man, die Papiere stehen al pari; sie können aber auch über und unter pari stehen. Die Staatspapiere werden an den Börsen verkauft; in den Börsenberichten ist der Kurs der Staatspapiere verzeichnet. Hierbei wird ein doppelter Preis notiert: 1. der Preis, für den die Papiere angeboten wurden (bezeichnet durch B., d. i. Brief), 2. der Preis, der von Käufern geboten wurde (bezeichnet durch G., d. i. Geld). Sind wirklich Geschäfte abgeschlossen worden, so wird es durch „bz." d. h. bezogen ausgedrückt. (An Börsennachrichten der letzten Zeit ist dies durch Beispiele zu erläutern.) Papiere, die auf eine lange Zeit hin nicht gekündigt werden dürfen, nennt man auch Rentenbriefe. Unter Konvertierung einer Staatsanleihe versteht man die Umwandlung derselben in eine Anleihe mit anderen Anleihebedingungen, gewöhnlich mit anderem Zinsfuße. Die Anleihen werden amortisiert, d. h. sie werden nach und nach zurückgezahlt, und zwar nach einem im Gesetz bestimmten Prozentsatz, also jährlich ein gewisser Teil der Summe.

Ähnlich wie bei den Staatsschuldscheinen ist es bei den Aktien. Zu größeren Unternehmungen, wie Eisenbahnbauten, Fabrikanlagen usw. treten eine Anzahl von Leuten zu einer Gesellschaft zusammen, die das gemeinschaftlich ausführen wollen, was einem einzelnen nicht möglich war. Zu diesem Zwecke schießen sie Geld zusammen; die hierüber ausgestellten Scheine, heißen Aktien. Jeder dieser Aktieninhaber (Aktionär) ist Mitbesitzer der Eisenbahn usw. Gewinn oder Verlust treffen die Aktionäre. Der Gewinn wird nach der Höhe der Einzahlung (nach Prozenten) berechnet und heißt Dividende. Die Aktiengesellschaften bedürfen zur Ausgabe der Aktien der Genehmigung des Staates. Die Aktien, die einen Anteil an dem Unternehmen bedingen, heißen Stammaktien. Wenn der zuerst in Aussicht genommene Geldbetrag nicht reicht, oder wenn das Unternehmen erweitert werden soll, können entweder neue Stammaktien ausgegeben, also neue Mitbesitzer herangezogen werden, oder die Aktiengesellschaft kann Schulden machen. Bei diesen Schulden ist die Aktiengesellschaft der Schuldner, die Gläubiger sind die Inhaber der von dem Schuldner ausgegebenen Schuldscheine. Diese Schuldscheine werden auch Aktien, aber Prioritäts-Aktien, schlechthin auch Prioritäten,

genannt. Die Inhaber der Prioritäten sind nicht Teilhaber des Unternehmens; sie werden auch nicht direkt vom Gewinn oder Verlust betroffen, sondern erhalten die auf den den Schuldscheinen beigegebenen Zinsscheinen verzeichneten Zinsen. Werden später von der Aktiengesellschaft neue Prioritäten ausgegeben, so werden diese Prioritäten der zweiten Reihe (Serie) oder der zweiten Ausgabe (Emission) genannt. — Stammaktien und Prioritäten können verkauft werden; sie sind also wie die Staatspapiere Kursschwankungen unterworfen. Der Kurs der Stammaktien richtet sich nach der Sicherheit der Anlage und der Höhe des Gewinns. Stammaktien, die durchschnittlich höhere Dividende geben, als der gebräuchliche Zinsfuß beträgt, werden über pari stehen. Der Kurs der Prioritäten ist von denselben Faktoren abhängig wie der der Staatspapiere. Es kann also vorkommen, daß die Stammaktien weit unter pari stehen, während die gut verzinsten Prioritäten über pari gekauft werden. Das Unternehmen wird dann zwar soviel einbringen, daß die Zinsen der Prioritäten prompt bezahlt werden können, aber es wird für die Stammaktionäre keine oder nur eine unbedeutende Dividende abwerfen.

Bei der Berechnung der Staatspapiere und Aktien wird zweierlei zu beobachten sein. 1. Wieviel kosten die Papiere und zwar a) ohne, b) mit Rücksicht auf die Zinsscheine? 2. Wie hoch verzinst sich ein Kapital, das bei dem vorhandenen Kurse in Papieren angelegt wird?

Bei dem Kauf oder Verkauf der Papiere ist zunächst auf den derzeitigen Kurs Rücksicht zu nehmen. Kaufe ich 3% preußische Staatspapiere zum Kurse von 91,20, so muß ich soviel mal 91,20 ℳ bezahlen, soviel mal 100 ℳ der Nennwert der Papiere beträgt. Die Rechnung würde also recht einfach sein, wenn ich keine Rücksichten auf die Zinsscheine zu nehmen brauchte. Den verkauften Papieren müssen die Zinsbogen beigegeben werden. Geschieht der Verkauf nun zufällig an einem Zinstermine, so wird der Verkäufer die fälligen Zinsscheine noch abtrennen und die andern, auf die er keinen Anspruch mehr erheben kann, dem Käufer übergeben. 600 ℳ 3% preußische Staatspapiere zum Kurse von 91,20 kosten am Zinstermine also 6 . 91,20 ℳ = 547,20 ℳ. Gesetzt nun, die Zinstermine wären am 1. April und 1. Oktober, und ich kaufte am 1. Mai 600 ℳ 3% preußische Staatspapiere zum Kurse von 91,20, so hätte der Verkäufer auf die Zeit vom 1. April bis 1. Mai (denn so lange ist er Besitzer gewesen) Anrecht auf den laufenden Zinsschein, während der Käufer die Zinsen auf die übrigen 5 Monate beanspruchen kann. In den meisten Fällen verkauft der Verkäufer sein Anrecht auf den laufenden Zinsschein, d. h. der Käufer entschädigt dem Verkäufer beim Kaufabschluß die Zinsen auf die betreffende Zeit, hier auf einen Monat. Der Käufer würde also außer dem Kurswert von 547,20 ℳ noch die Zinsen von 600 ℳ (dieselben werden stets auf den Nennwert bezogen) auf 1 Monat zu bezahlen haben. 600 ℳ bringen in 1 Monat zu 3% 1,50 ℳ Zinsen; folglich zahlt der Käufer 547,20 ℳ + 1,50 ℳ = 548,70 ℳ. Nur in den Fällen, daß der Verkauf kurz vor dem Zinstermin abgeschlossen wird, kann es vorkommen, daß die Zinsscheine nicht mit verkauft werden; dann behält sie der Verkäufer zurück und entschädigt den Käufer, der also

nun den Zinsbetrag von dem Kurswerte abzieht. Der An- und Verkauf solcher Papiere wird vom Bankier besorgt, der hierfür eine Entschädigung (Provision), die nach Prozenten berechnet wird, bezieht. — Jede Berechnung des Wertes eines Papieres wird sich der vorstehenden Ausführung anschließen. Man berechnet zuerst den Kurswert, dann den Zinsbetrag und vereinigt dann durch Zusammenzählen oder Abziehen.

Äußerst wichtig ist die Lösung der 2. Frage, wie hoch sich bei dem vorhandenen Kurse das in Papieren angelegte Kapital verzinst. Es soll jeder selbst entscheiden können, ob diese oder jene Kapitalanlage bei sonst sicheren Papieren die vorteilhafteste ist; niemand wird sich dann weder durch einen scheinbar hohen Zinsfuß oder durch einen scheinbar niedrigen Kurswert verlocken lassen. Herr A hatte die Wahl, $3\frac{1}{2}$ % Papiere zum Kurse von 98,70, oder $4\frac{1}{2}$ % Papiere zum Kurse von 114,90 zu kaufen. Bei dem ersten Papiere erhielt er auf 100 ℳ Nennwert, also auch auf die dafür zu leistende Zahlung von 98,70 ℳ, $3\frac{1}{2}$ ℳ Zinsen; bei dem zweiten würde er auf 114,90 ℳ $4\frac{1}{2}$ ℳ erhalten.

Die Lösung der Aufgaben fällt naturgemäß dem schriftlichen Rechnen zu:

Herr A rechnet: 98,70 ℳ geben
1 „
100 „ $\frac{\cancel{7} \cdot \overset{50}{\cancel{100}}}{\cancel{2} \cdot \underset{14,10}{\cancel{98,70}}} = 3,55$ ℳ

und

114,90 ℳ geben
1 „
100 „ $\frac{\overset{3}{\cancel{9}} \cdot \overset{50}{\cancel{100}}}{\cancel{2} \cdot \underset{38,30}{\cancel{114,90}}} = 3,92$ ℳ

Trotz des hohen Kurswertes von 114,90 würden je 100 ℳ, die in dem $4\frac{1}{2}$ % Papiere angelegt sind, doch 0,37 ℳ jährlich mehr bringen als 100 ℳ, für die das $3\frac{1}{2}$ % Papier gekauft worden wäre. Dasselbe wäre zu berechnen zwischen den Sparkassenzinsen von $3\frac{1}{3}$ % und dem Ertrag eines in $3\frac{1}{2}$ % Staatspapieren zum Kurse von 101,50 angelegten Kapitals.

Die meisten zu diesem Abschnitt gehörenden Aufgaben fallen dem Tafelrechnen zu; doch muß auch hier der Schüler durch Kopfrechnen die schriftliche Lösung unterstützen und abkürzen können. Die Lösungsformen sind im Laufe der vorstehenden Ausführung schon erwähnt.

In neuerer Zeit hat die Königliche Hauptverwaltung der Staatsschulden in Berlin ein Preußisches Staatsschuldbuch eingerichtet. Besitzer von preußischen Staatspapieren können diese in das Staatsschuldbuch eintragen lassen. Sie senden zu diesem Zwecke die preußischen Staatspapiere mit den Zinsscheinen und Anweisungen für die Erhebung neuer Zinsscheine an die Königl. Hauptverwaltung der Staatsschulden; dort wird der Name des Besitzers, die Größe der Summe, die Höhe des Prozent-
tzes und die Art der Zinsenzahlung in das Staatsschuldbuch eingetragen,
d die Papiere werden aus dem Verkehr gezogen. Der Besitzer erhält eine

Bescheinigung über die Eintragung, und es werden ihm zu den festgesetzten Zinsterminen die Zinsen entweder direkt zugeschickt, oder er kann sie auch nach Wunsch bei einer Königl. Kasse (Kreiskasse) erheben. Das Staatsschuldbuch bietet also dem Kapitalisten eine Reihe bedeutender Vorteile. Unbedingte Sicherheit vor Diebstahl, Bequemlichkeit der Zinserhebung, sichere Rente usw. Auf Wunsch des Besitzers kann die Eintragung im Staatsschuldbuch gelöscht werden, und es erhält dann der Besitzer neue Staatspapiere. Die Kosten der Eintragung sind unerheblich; sie betragen für je 1000 ℳ 0,25 ℳ, jedoch mindestens 1 ℳ; bei der Löschung müssen eine notarielle Bescheinigung der Richtigkeit des Besitzes und die Kosten für den Ankauf neuer Staatspapiere eingesandt werden.

Zu den Papieren gehören auch die Lotterieanleihen. Lotterieanleihen sind Anleihen von Staaten oder Städten, für die entweder kein Zins, oder doch nur ein geringer Zins gezahlt wird. Die Amortisation erfolgt in der Weise, daß jährlich eine bestimmte Anzahl von Scheinen ausgelost und entweder mit dem Nennwerte oder auch mit einem bis 1000fachen Werte zurückgezahlt werden. Die aufgesparten Zinsen ermöglichen das letztere. Da die Scheine gewöhnlich auf kleine Beträge ausgestellt werden, der Zinsverlust also nicht allzu bedeutend ist, so lockt der möglichenfalls eintretende Gewinn vielfach zum Kaufe dieser Scheine.

Obwohl, wie in der Einleitung gesagt worden ist, das Kapitel von Staatspapieren und Aktien in der heutigen Zeit breite Schichten unseres Volkes berührt, so wird doch unsere einklassige Volksschule nicht den im vorstehenden Abschnitt dargebotenen Stoff vollständig verarbeiten können. In dieser werden, wie ja auch in der mehrklassigen Schule, die neu einzuführenden Begriffe möglichst eng auf die Zinsrechnung bezogen und die Aufgaben in einfachster Art zur Anwendungsstufe derselben herangezogen.

Gruppierung der Aufgaben (Schroeter, Tafelrechenhefte, Ausgabe A, 6. Heft, Gruppe 14 und 15; Ausgabe B, 3. Heft, Gruppe 69).

1. a) Berechne den Barwert von 1200 ℳ 4 % deutsche Reichsanleihe zum Kurse von 105,40!
   b) Welchen Wert haben die Coupons dieser 1200 ℳ: a) in einem Jahre; b) in $\frac{1}{2}$ Jahr; c) in 1 Monat; d) in 14 Tagen?
2. a) Was kosten 1200 ℳ 4 % deutsche Reichsanleihe zum Kurse von 105,40 am 1. Mai, wenn die Zinstermine am 1. April und 1. Oktober sind?
   b) Jemand vertauscht am 1. Juni für 5000 ℳ 4 % sächsische Rentenbriefe zum Kurse von 103,80 (Zinstermine am 1. 4. und am 1. 10.) gegen $3\frac{1}{2}$ % preußische Staatspapiere zum Kurse von 97,20 (Zinstermine am 1. 1. und am 1. 7.). Wie ist die Berechnung; wieviel Stück zu 200 ℳ kann er erhalten, und wie groß ist der Überschuß?
3. Wie hoch verzinst sich ein Kapital, das in 4 % preußischen Staatspapieren zum Kurse von 104,50 angelegt worden ist?

47. Über Rabattrechnung.

Zu der Rabattrechnung gehören Aufgaben der verschiedensten Sachverhältnisse.

1. Meine Kohlenrechnung beläuft sich auf 85 ℳ; bei der sofortigen Zahlung werden mir 1,70 ℳ erlassen, so daß ich nur 83,30 ℳ bezahle.
2. Ich nehme für einen in Berlin wohnenden Besitzer die Pachtgelder seines hiesigen Rittergutes ein; er verlangt nicht die eingezahlten 5300 ℳ, sondern ich sende ihm nach gegenseitigem Übereinkommen nur 5247 ℳ; 53 ℳ behalte ich als Belohnung für meine Arbeit.
3. Bei meinem Buchhändler habe ich 2 größere Bücher im Werte von 58 ℳ bezogen; die Rechnung, die mir zur Zahlung vorgelegt wird, lautet aber nur auf 55,10 ℳ, die ich auch bezahle, so daß ich 2,90 ℳ weniger bezahle, als auf den Büchern als Wert vermerkt ist.
4. Ich verkaufe einen Wechsel über 300 ℳ, der in 2 Monaten fällig ist und erhalte nur 297,60 ℳ ausgezahlt; 2,40 ℳ behält der Käufer als Zinsentschädigung.
5. Bei dem Verkauf meines Hauses wurden 20000 ℳ sofort gezahlt; das übrige Drittel der Kaufsumme sollte erst nach 1 Jahre und zwar ohne Zinsen gezahlt werden. Der Käufer kommt aber schon nach 4 Monaten und zahlt mit meiner Zustimmung, doch nicht 10000 ℳ, sondern nur 9708,74 ℳ, so daß er 291,26 ℳ von der zu leistenden Zahlung abzieht.

Die vorstehenden 5 Aufgaben gehören sämtlich zur Rabattrechnung. Bei aller Verschiedenheit der herangezogenen Verhältnisse bleibt das eine gleich, daß nämlich überall ein Abzug an der Zahlung stattfindet. Dieser Abzug heißt bald Dekort, bald Diskonto oder Skonto, bald Provision, bald Rabatt; der gemeinschaftliche Name dafür ist Rabatt. *Rabatt ist ein Abzug an der Zahlung*; Rabattrechnung ist Abzugsrechnung bei Zahlungen. Gebräuchlich ist es, den Rabatt in Prozenten auszudrücken. So gewährte mir mein Kohlenlieferant 2% Skonto; für meine Bemühungen bei der Einnahme der Pachtgelder erhielt ich 1% Provision; der Buchhändler hatte von dem notierten Werte der Bücher 5% Rabatt abgezogen; ich ließ vom Käufer des Wechsels $\frac{2}{5}$% Diskonto auf den Monat abziehen, und dem pünktlichen Zahler mußte ich für Vorausbezahlung $4\frac{1}{2}$% Rabatt aufs Jahr bewilligen. Überall ein Abzug, doch wie verschieden ist dieser. Nicht die verschiedene Höhe der Prozentsätze wird hier hervorzuheben sein, sondern die Eigentümlichkeit, daß der Erlaß bald ohne Rücksicht, bald mit Rücksicht auf die Zeit gewährt und berechnet wird.

Die drei ersten charakteristischen Aufgaben ziehen die Zeit nicht in Betracht, wohl aber die beiden letzten Aufgaben.

Wir unterscheiden also bei der Rabattrechnung 1. *Rabattrechnung ohne Berücksichtigung der Zeit* und 2. *Rabattrechnung mit Berücksichtigung der Zeit*.

1. Rabattrechnung ohne Berücksichtigung der Zeit.

Diese erste Art der Rabattrechnung ist eine einfache Anwendung der Prozentrechnung auf häufig vorkommende Aufgaben des praktischen Lebens. — Ich erhalte bei Barzahlung Rabatt, der gewöhnlich nach Prozenten berechnet wird. — Wie kommt der Händler dazu, mir Rabatt zu gewähren? Der Verkäufer rechnet zu dem Einkaufspreis den zum Bestande des Geschäfts notwendigen und von der Konkurrenz gestatteten Gewinn; das sollte der Verkaufspreis sein. Dabei ist aber Voraussetzung, daß die Ware bar bezahlt wird. Gerade aber im kleinen Verkehr ist die Unsitte des Borgens durch Mangel an Geldmitteln oder durch Gewohnheit sehr verbreitet. Der Verkäufer muß den Zinsverlust auf den Verkaufspreis legen, also teurer verkaufen. Dadurch werden die Konsumenten geschädigt, die bar bezahlen. Deshalb ist es in vielen Geschäften mit Recht Sitte geworden, daß bei Barzahlung ein jenem Aufschlage entsprechender Abzug am Preise, ein Rabatt, gewährt wird.

Derartige Aufgaben sind auf der Anwendungsstufe der Prozentrechnung schon gerechnet worden; ihre Wichtigkeit für das praktische Leben bedingt aber ihre nochmalige Einreihung in die in der Überschrift angegebene besondere methodische Einheit.

2. Rabattrechnung mit Berücksichtigung der Zeit.

In der obenstehenden Übersicht sind es die beiden letzten Aufgaben, die hierher gehören, zwischen denen aber trotz der scheinbaren Übereinstimmung durch Berücksichtigung der Zeit doch ein großer Unterschied besteht. Bei beiden Aufgaben wird ein unverzinsliches Kapital vor dem Zahlungstermine gezahlt. Der zur Zahlung Verpflichtete hätte von der zu früh gezahlten Summe noch Nutzen (Zinsen) ziehen können; auf dieses Recht verzichtet er durch die Zahlung; er hat also einen direkten Schaden. Der Empfänger der Zahlung kann die gezahlte Summe früher benutzen, als es ihm sonst möglich gewesen wäre; dieser also hat einen direkten Nutzen. Zur Ausgleichung von Nutzen und Schaden soll der Rabatt dienen.

Die Art der Berechnung des Rabatts ist bei beiden verschieden. Bei dem Wechsel wurde geschlossen, auf den Monat werden von je 100 ℳ $\frac{2}{5}$ ℳ abgezogen, das macht bei 300 ℳ auf 2 Monate $3 . 2 . \frac{2}{5} = \frac{12}{5} = 2{,}40$ ℳ. Wollte man bei der 2. Aufgabe in derselben Weise verfahren, so würde man, da auf das Jahr $4\frac{1}{2}$ % Rabatt gewährt werden, von je 100 ℳ in 8 Monaten 3 ℳ, von 10000 aber 100. 3 ℳ = 300 ℳ abzuziehen haben, so daß nur 9700 ℳ gezahlt zu werden brauchten. Wenn angenommen wird, daß bei der Bestimmung des als Rabatt zu gewährenden Prozentsatzes die Höhe gewählt worden ist, zu welcher der Empfänger das erhaltene Kapital benutzen kann, so ist unsere Rechnung falsch. Es bringen weder die 297,60 ℳ in 2 Monaten zu $\frac{2}{5}$ % auf den Monat nicht 2,40 ℳ, sondern nur 2,38 ℳ (zu 2,40 ℳ mußten ja 300 ℳ vorhanden sein), noch wachsen 9700 ℳ in 8 Monaten zu $4\frac{1}{2}$ % auf 10000 ℳ, sondern auf 9991 ℳ an, da zu 300 ℳ in 8 Monaten zu $4\frac{1}{2}$ % nicht 9700 ℳ, sondern 10000 ℳ Kapital gehören! Der Unterschied bei dem Wechselrabatt betrug

nur 0,02 ℳ, da das Kapital, wie gewöhnlich beim Wechsel, nicht allzu groß ist und die Zeit sich auch nur auf wenige Monate beläuft; bei dem 2. Kapitale ist der von uns berechnete Unterschied aber schon 9 ℳ groß. Um diese große Differenz zu vermeiden, betrachtet man den Rabatt nicht als die *Zinsen* des rechnungsmäßig zu zahlenden Kapitals, sondern man sucht das *Kapital*, das in der gegebenen Zeit (der Vorausbezahlung) zu dem festgestellten Prozentsatze auf die gegebene Summe anwächst, so daß der Rabatt dann gleich den Zinsen der Barzahlung ist. Dieses Kapital kann dann ohne Nachteil für Gläubiger und Schuldner gezahlt werden. Bei der ersten Art der Berechnung würden die Zinsen des Kapitals von 100 abgezogen; bei der zweiten Berechnung müßten wir in der bekannten Weise erst feststellen, wie hoch wachsen 100 ℳ in der gegebenen Zeit zu dem gegebenen Prozentsatze an, und durch die Vergleichung dieser Summe mit dem gegebenen Kapital erhielten wir den Multiplikator für 100. Anstatt also zu schließen wie beim ersten Wege, 100 ℳ bringen in 8 Monaten zu 4½ % 3 ℳ; so oft 100 ℳ in 10000 ℳ enthalten sind, soviel mal 3 ℳ werden abgezogen, schließen wir, 100 ℳ wachsen in 8 Monaten zur 4½ % auf 103 ℳ an; so oft 103 ℳ in 10000 ℳ enthalten sind, soviel mal 3 ℳ werden abgezogen. Weil bei der ersten Art diese 3 ℳ (Rabatt in 8 Monaten zu 4½ %) von 100 abgezogen, bei der zweiten aber auf 100 gelegt und dann von 103 ℳ abgezogen wurden, nennt man die erste Art der Rabattrechnung die *Rabattrechnung in 100*, die andere dagegen *Rabattrechnung auf 100*. Wir merken, daß diese gebräuchliche Bezeichnung das Wesen der Sache wenig trifft. Zu einer passenden Bezeichnung beider Rabattrechnungsarten kommen wir, wenn wir auf die vorstehende Entwicklung zurückgehen. Beide Rabattrechnungsarten lassen sich auf die Zinsrechnung zurückführen. Bei der ersten Art wird der Rabatt von der Rechnungssumme berechnet; diese also ist das Kapital; bei der zweiten Art berechnet man den Rabatt von der Barzahlung; die Rechnungssumme ist also die Summe von Kapital und Zins. Wir unterscheiden also hier bei der Rabattrechnung mit Berücksichtigung der Zeit a) *die Rechnungssumme ist gleich dem Kapital* (Rabatt in 100), b) *die Rechnungssumme ist gleich der Summe von Kapital und Zins* (Rabatt auf 100). Somit wird der sogenannte Rabatt in 100 auf die 1. Unterabteilung und der sog. Rabatt auf 100 auf die zweite Unterabteilung der einfachen Zinsrechnung zurückgeführt werden müssen.

Aus der obenstehenden Berechnung geht hervor, daß der Rabatt auf 100 überall angewendet werden müßte, wenn die Zeit in Betracht kommt. Da aber die Berechnung eine viel schwerere und besonders eine viel umständlichere ist, so wendet man bei kleinen Kapitalen auf kürzere Zeit die erste Art, also Rabatt in 100, an. Die Differenzen sind klein, und der Ausgleich wird durch die Gegenseitigkeit erzielt. — Dieser Rabatt in 100 ist nicht absolut falsch, wie vielfach angenommen wird. Der gewährte Erlaß wird bei allen Sachverhältnissen nicht durch Gesetz geregelt, sondern bleibt in jedem einzelnen Falle dem freien Ermessen der beteiligten Parteien überlassen. Wenn der Bäcker mit der Semmelfrau dahin übereinkommt, daß sie von je 3 ℳ 50 Pfennige haben soll, so wird dies fast allgemein in der

Praxis derart ausgelegt, daß die Semmelfrau von 3,50 ℳ 3 ℳ abliefert und 50 Pfennige für sich erhält; das ist also Rabatt auf 100. Wollte aber der Bäcker ihr von je 3 ℳ 50 Pfennige geben, so daß er nur 2,50 ℳ behielte, also Rabatt in 100 anwendete, so wäre das ein Übereinkommen, das vielleicht in besonders schwierigen Verkaufsverhältnissen seinen Grund haben mag, das aber doch nicht falsch genannt werden kann. Selbst bei Zeitzahlungen könnte man Rabatt in 100 nur dann absolut falsch nennen, wenn, wie oben schon einmal erwähnt, der gewährte Rabatt-Prozentsatz dem Prozentsatze gleichgemacht wird, zu dem das Kapital nun benutzt werden soll. Die Barzahlung eines Kapitals, welches 5 Jahre zu früh bei 4 % Rabatt in 100 gezahlt wird, kann in 5 Jahren zu 4 % nicht auf das ursprüngliche Kapital anwachsen, bei 1000 ℳ Kapital würde die Differenz 40 ℳ betragen. Wenn aber der Zahlungsempfänger, der das erwartete Geld zu 4 % benutzen kann, nur $3\frac{1}{3}$ % Rabatt in 100 gewährt hätte, so würde die Rabattrechnung in 100 doch nicht falsch sein. Es werden nämlich $833\frac{1}{3}$ % gezahlt; diese bringen in 5 Jahren zu 4 % $166\frac{2}{3}$ ℳ Zinsen, folglich sind die 1000 ℳ wieder vorhanden.

Da es aber nahe liegt, den gebräuchlichen Zins-Prozentsatz auch als Rabatt-Prozentsatz zu verwenden, so empfehle ich für Zeit-Rabatt (mit Ausnahme des Wechseldiskontos) den Rabatt auf 100. Derselbe wird im Verkehrsleben nur in der Form vorkommen, daß entweder der Rabatt oder die Barzahlung gesucht wird; beides wird durch dieselbe Rechnung erreicht. Die Frage ist die der Zinsrechnung: Welches Kapital wächst in x Jahren zu y % auf z ℳ an? Ist diese Aufgabe dort verstanden, so kann jeder Schüler, auch der der einklassigen Dorfschule, einfache Rabattrechnungsaufgaben mit Rabatt auf 100 und zwar im Anschluß (als Anwendungsstufe) an den betreffenden Abschnitt der Zinsrechnung rechnen; sie bieten nur den neuen Namen. Für Schüler anderer Schulen wird aber auch die Beziehung der Aufgaben mit Rabatt auf 100, die Prozentsatz oder Zeit suchen lassen, zu den Zinsrechnungsaufgaben lehrreich und möglich sein; die Schwierigkeiten des Rabatts auf 100, soweit sie das Verständnis angehen, schwinden durch diese enge Beziehung zur Zinsrechnung. Die bequemere Lösung bietet immer der Rabatt in 100. Die Aufgaben werden mit Leichtigkeit verstanden und gerechnet werden; ist es doch nur eine Anwendung der bekannten Prozentbestimmung, freilich mit einigen neuen Namen.

Fortgeschrittenere Schüler werden die Untersuchungen über diese beiden Rabattarten gern noch weiterführen; sie werden zunächst den Unterschied des verschiedenen Rabatts bei sonst gleichen Bedingungen feststellen und dann aus diesem Unterschiede, dem Prozentsatz und der Zeit die Rechnungssumme berechnen. Die Berechnung des Unterschiedes ist nicht schwer, das Ergebnis der Berechnung aber meistens recht lehrreich; schwerer aber ist die Bestimmung der Rechnungssumme. Zwei Wege führen zum Ziel. Ich kann erstens von einem Normalkapital ausgehen und den Unterschied zwischen Rabatt in und Rabatt auf 100 hieran berechnen. Die Vergleichung mit dem gegebenen Unterschiede gibt mir den Multiplikator zum Normalkapitale. Zweitens kann ich den jedesmaligen Rabatt als Teil

der ganzen Rechnungssumme bestimmen und aus dem Unterschiede dieser Teile und dem Unterschied des Rabatts die Rechnungssumme berechnen.

Beispiele zur Lösung: Bei zweijähriger Vorausbezahlung und 5 % Rabatt beträgt der Unterschied zwischen Rabatt auf und in 100 20 ℳ. Wie groß ist das vorausgezahlte Kapital?

1. Lösung: Bei Rabatt in 100 geben 100 ℳ in 2 Jahren zu 5 % 10 ℳ Rabatt; da 100 ℳ in 2 Jahren zu 5 % auf 110 ℳ anwachsen, geben bei Rabatt auf 100 110 ℳ 10 ℳ Rabatt, 10 ℳ also $\frac{10}{11}$ ℳ und 100 ℳ $\frac{100}{11}$ ℳ $= 9\frac{1}{11}$ ℳ. Der Unterschied zwischen Rabatt in und auf 100 beträgt also für je 100 ℳ Rechnungssumme 10 ℳ — $9\frac{1}{11}$ ℳ $= \frac{10}{11}$ ℳ. So oft nun $\frac{10}{11}$ ℳ in 20 ℳ enthalten sind, soviel mal 100 ℳ beträgt die Rechnungssumme. $\frac{10}{11}$ ℳ sind in 20 ℳ 22 mal enthalten; folglich ist das vorausgezahlte Kapital 2200 ℳ.

2. Lösung: Der Rabatt in 100 beträgt von 100 ℳ 10 ℳ, d. i. $\frac{1}{10}$ des Ganzen; der Rabatt auf 100 beträgt von 110 ℳ 10 ℳ, d. i. $\frac{1}{11}$ des Ganzen. Der Unterschied zwischen Rabatt in und auf 100 beträgt also $\frac{1}{10}$ des Ganzen — $\frac{1}{11}$ des Ganzen, d. i. $\frac{1}{110}$ des Ganzen. $\frac{1}{110}$ des Ganzen ist 20 ℳ, das Ganze also 2200 ℳ.

Hier sollen noch einige Erläuterungen folgen über Wechsel und den eigenartigen Rabatt bei Buchhändlern. Nicht alles wird für unsere einfache Volksschule geeignet sein; der Lehrer aber wird wissen, was er auszuscheiden hat; bezügliche Bemerkungen werden auch darauf hinweisen.

A. Wechsel.

Im Verkehrsleben ist der Wechsel eine notwendige Einrichtung. Es würde sehr umständlich, bei verschiedenen Münzsystemen fast unmöglich, wenigstens höchst unpraktisch sein, jeden Geldbetrag für jede bezogene Ware direkt zu senden, obwohl die Post alle Erleichterungen gewährt. Seit langer Zeit schon geschieht diese Bezahlung durch Wechsel. Die Bankhäuser der Handelsstädte stehen in fortwährendem Verkehr miteinander; sie besorgen die Auswechslung des Geldes (daher der Name Wechsel) zwischen den Handelsplätzen und rechnen dann zur gelegenen Zeit miteinander ab. Das Schriftstück, durch welches ein Bankhaus das andere zur Zahlung des betreffenden Betrages auffordert, heißt Wechsel. Hätte ich z. B. in Königsberg 1200 ℳ zu zahlen, so könnte das durch Vermittlung des Wechsels geschehen. Ich zahle den Betrag in Leipzig bei einem Bankhause ein und erhalte dafür einen Wechsel auf ein bekanntes Bankhaus in Königsberg.

Der Wechsel muß enthalten:

1. Die Bezeichnung Wechsel (zum Unterschied von den Schuldverschreibungen).
2. Die Angabe der Wechselsumme an der Spitze in Ziffern, im Text in Buchstaben.
3. Die Angabe des Ortes und des Tages der Ausstellung.
4. Die Angabe des Zahlungstages und zwar kann das geschehen:
   a) durch Angabe einer bestimmten Frist (zwei Monate nach heute),
   b) durch Angabe eines bestimmten Tages,
   c) durch Angabe einer Frist nach dem Eintreffen des Wechsels (8 Tage nach Sicht).

5. Die Bezeichnung der Person, an welche der Wechsel zu zahlen ist (Wechselempfänger).
6. Die Angabe des Ortes, an dem die Zahlung stattfinden soll.
7. Die Angabe des Namens oder der Firma des Bezogenen.
8. Die eigenhändige Unterschrift des Ausstellers.

Wir unterscheiden den Aussteller des Wechsels oder den Zieher desselben, den Bezogenen und den Wechselnehmer. Nach Ablauf der Frist ist der Wechsel von dem Wechselnehmer vorzuzeigen (präsentieren) und von dem Bezogenen entweder durch Auszahlung der Summe anzuerkennen (akzeptieren) oder durch Verweigerung der Zahlung zurückzuweisen (protestieren). Dieser Protest muß gerichtlich beglaubigt werden, und der protestierte Wechsel geht an den Zieher zurück. — Nun kann aber der Wechselnehmer während der Umlaufszeit den Wechsel verkaufen oder in Zahlung geben; man sagt, er remittiert denselben. Durch die Bemerkung auf der Rückseite des Wechsels, daß er den Wert empfangen habe, tritt er sein Recht an den neuen Besitzer ab, der ihn weiterhin in Umlauf setzen kann. Der Wechsel wird dadurch giriert, d. h. in Kreislauf gesetzt, und alle Inhaber heißen Giranten. Bei dem Girieren des Wechsels wird derselbe von den Giranten vor der Zeit bar bezahlt; es tritt deshalb eine Zahlungsermäßigung ein, die man Diskonto nennt. Die Berechnung desselben ist oben schon erläutert worden; hier soll nur noch erwähnt werden, daß nicht nur Barzahlung und Diskonto, sondern auch Wechselsumme, Diskontoprozente und Zeit gesucht werden können. Die Schlußformen sind denen der Zinsrechnung gleich.

Bei ausländischen Wechseln tritt die Umrechnung unseres heimischen Geldes in die fremde Währung (Valuta) hinzu. Ein Wechsel, der auf fremde Valuta lautet, wird Devise genannt. Die Beziehungen der verschiedenen Währungen aufeinander unterliegen einem Kurs, der auf der Börse bestimmt wird. Zugrunde liegt dem Kurse stets eine bequeme Einheit (100) der fremden Valuta.

Wechsel			
Amsterd., Rott.	100 Fl.	8 T.	168,80
Brüssel, Antw.	100 Fr.	8 T.	81,20
London	1 Lstrl.	8 T.	20,46
Paris	100 Fr.	8 T.	81,25
Wien	100 Fl.	8 T.	85,20
Schweiz	100 Fr.	10 T.	80,90
Ital. Plätze	100 Lire	10 T.	79,35

Heißt es in dem obenstehenden Auszug eines Börsenberichtes z. B. Paris 100 Fr. 8 T. 81,25 bz., so ist damit ausgesprochen, daß wir in Deutschland für 100 Franken, die wir nach Frankreich schicken sollen, 81,25 ℳ bezahlen müssen und daß das französische Bankhaus 8 Tage nach dem Eintreffen des Wechsels zur Zahlung verpflichtet ist. Bei der Bezahlung meiner Schuld habe ich diese Frist zu berücksichtigen; zahle ich später, so muß ich eine Entschädigung (Diskonto) zahlen; bei früherer Zahlung erhalte ich diese Entschädigung.

Neben diesem Wechsel, der vom Zieher auf den Bezogenen ausgestellt ist, gibt es noch einen Wechsel, in dem Zieher und Bezogener dieselbe Person ist, bei welchem also der Aussteller selbst zahlt. Für bezogene Waren, die nach 2 Monaten bezahlt werden müssen, gibt der Empfänger dem Verkäufer einen (eigenen) Wechsel (Promesse), in dem er sich verpflichtet, nach 2 Monaten an den Verkäufer oder dessen Order die betreffende Summe zu zahlen. Er unterwirft sich dadurch dem strengen Wechselrechte und bietet dem Gläubiger größere Sicherheit. Diese Art des Wechsels ist in der letzten Zeit allgemeiner geworden als man glaubt; Kaufleute, Handwerker usw. stellen bei dem Bezug der Ware Wechsel aus; der Schuldschein wird nur noch bei Anleihen gebraucht. Auch diese Wechsel sind verkäuflich und können hierbei sowie bei vorzeitiger Zahlung diskontiert werden.

Bemerkung: Der Geschäftsverkehr hat noch eine ziemliche Reihe hierher gehöriger technischer Ausdrücke, auf deren Einführung aber selbst Schulen mit weitgehenden Zielen, sobald sie nicht Fachschulen sind, verzichten können. Für die einklassige Volksschule genügt ein kurzer Hinweis auf die eigenen Wechsel, auf deren Notwendigkeit, Sicherheit und Gefahr.

B. Der eigenartige Rabatt der Buchhändler.

Bücher sind gedruckte Waren, denen meistenteils der Preis beigedruckt ist. Der Verlagsbuchhändler verkauft an den Sortimentsbuchhändler, dieser wieder an das Publikum. Soll nun das Publikum den auf dem Buche vermerkten Preis bezahlen, so liegt es nahe, daß der Sortimentsbuchhändler nicht den vollen Preis bezahlen kann. Der Verlagsbuchhändler muß also dem Sortimentsbuchhändler einen Abzug an der Zahlung, also Rabatt, gewähren. Lange Zeit war es gebräuchlich, daß der Sortimentsbuchhändler dem Publikum Rabatt gewährte, doch hat man seit einiger Zeit angefangen, diesen Rabatt zu beseitigen, und es ist zu erwarten, daß auch diese Art der Rabattrechnung bald ganz aufhören wird, die Schule zu beschäftigen, weil derselben nicht mehr wirkliche Sachverhältnisse zugrunde liegen.

Für fortgeschrittene Schüler wird es zur Befestigung und Vertiefung ihrer Kenntnis von den Prozentbestimmungen dienen, wenn folgende Aufgabenarten gerechnet werden: 1. Wieviel Prozent verdient ein Sortimentsbuchhändler, wenn der Verlagsbuchhändler 25 %, er selbst aber 10 % Rabatt gewährt? 2. Wieviel % Rabatt erhielt ein Sortimentsbuchhändler von dem Verlagsbuchhändler, wenn er dem Publikum $8\frac{1}{3}$ % Rabatt gab und dabei 25 % verdiente? 3. Wieviel % darf ein Sortimentsbuchhändler dem kaufenden Publikum Rabatt geben, wenn er vom Verlagsbuchhändler 20 % erhält und er 20 % verdienen will? — Die Lösung dieser Aufgaben kann auf zweifache Weise geschehen; entweder man nimmt eine Normalsumme an und berechnet danach die Aufgabe, oder man berücksichtigt das Ganze und seine Teile, die im Rabatt angegeben sind. Lösungsform von der 1. Aufgabe nach der ersten (leichteren) Art: Angenommen, der Sortimentsbuchhändler hätte für 100 ℳ vom Verlagsbuchhändler bezogen, so wird er bei 25 % Rabatt nur 75 ℳ zahlen. Da er selbst 10 % Rabatt gibt,

wird er 90 ℳ einnehmen. Auf 75 ℳ Auslage gewinnt er 15 ℳ, auf 25 ℳ demnach 5 ℳ und auf 100 ℳ 20 ℳ, also verdient er 20 %. Lösungsform der 2. Aufgabe nach der zweiten Art: Der Sortimentsbuchhändler gab dem Publikum $8\frac{1}{3}$ %, demnach nahm er $\frac{11}{12}$ des ganzen Wertes ein. Er gewann 25 %; demnach besteht seine Einnahme aus 5 Teilen, wie die Auslage aus 4 Teilen besteht. Sind 5 Teile $\frac{11}{12}$ des Ganzen, so ist ein Teil $\frac{11}{60}$ des Ganzen und 4 Teile sind $\frac{11}{15}$ des Ganzen. Der Sortimentsbuchhändler hat also nur $\frac{11}{15}$ des Wertes bezahlt, folglich $\frac{4}{15}$ des Ganzen $= 26\frac{2}{3}$ % Rabatt erhalten!

Bei der Anordnung des Stoffes der Rabattrechnung folgen wir den an die Spitze des Abschnittes gestellten Aufgaben, welche einzelne Gruppen charakterisieren. Daß der Rabatt abgezogen werden muß, mag an einigen Aufgaben, in denen Summe und Rabatt gegeben sind und die Barzahlung durch Abziehen gefunden wird, gezeigt werden; unbedingt notwendig ist es wohl nicht. Die Rabattrechnung entspricht der Zinsrechnung. Der Zins ist gleich dem Rabatt, welcher nach Prozenten bestimmt, dann aber abgezogen wird. Neu ist das Verhältnis der Barzahlung zur eigentlichen Rechnungssumme beziehungsweise zum Rabatt. Beträgt der Rabatt 5 %, so hat die Barzahlung 95 Teile, wie die Rechnungssumme deren 100 hatte. Diese Aufgaben werden vielfach verwertet; z. B.: Wie groß war die rechnungsmäßige Summe einer Bücherrechnung, wenn sie nach Abzug von $12\frac{1}{2}$ % Rabatt mit 52,50 ℳ bezahlt wird. Die Kinder finden bald, daß nach Abzug von $12\frac{1}{2}$ %, d. i. $\frac{1}{8}$ der Gesamtsumme, die Barzahlung sich zur Rechnungssumme wie 7 : 8 verhält. Sind 52,50 ℳ 7 Teile, so ist 1 Teil = 7,50 ℳ und 8 Teile sind 60 ℳ.

Gruppierung der Aufgaben (Schroeter, Tafelrechenhefte, Ausg. A, 6. Heft, Gruppe 16 bis 21; Ausg. B, 3. Heft, Gruppe 70 bis 73).

A. Rabatt ohne Berücksichtigung der Zeit.

a) Eine Warenrechnung beläuft sich auf 45 ℳ; bei Barzahlung derselben wird 5 % Rabatt gewährt. Wie groß ist die Barzahlung und wie groß der Rabatt?

b) Wieviel Prozent beträgt der Rabatt, wenn 1. von 150 ℳ 4,25 ℳ erlassen werden, 2. wenn für 6,60 ℳ 6,16 ℳ bar gezahlt werden?

c) Eine Bücherrechnung wird nach Abzug von 10 % Rabatt mit 65,70 ℳ bar bezahlt. Auf wieviel ℳ lautete die Rechnung?

B. Rabatt mit Berücksichtigung der Zeit.

1. Die Rechnungssumme ist gleich dem Kapital (Rabatt in 100).

a) Ein Wechsel über 500 ℳ, der am 1. Juli fällig ist, wird am 1. Juni mit $\frac{2}{3}$ % Diskonto auf den Monat bar gezahlt. Wie groß ist die Barzahlung?

b) Mit wieviel Prozent ist ein Wechsel diskontiert worden, wenn 500 ℳ 3 Monate vor dem Verfalltage mit 492,50 ℳ bar gezahlt werden?

c) Wieviel Monate ist ein Wechsel über 230 ℳ vor dem Verfalltage bezahlt worden, wenn er bei ½ % monatlichem Diskonto mit 227 ℳ bezahlt wurde?

2. Die Rechnungssumme ist die Summe aus Kapital und Zins (Rabatt auf 100).

a) Wie groß ist die Barzahlung für 500 ℳ zinsfreies Geld, das auf 4 Jahre mit 4½ % Rabatt vorausbezahlt wurde?

b) Jemand hatte nach 2 Jahren eine unverzinsliche Schuld abzutragen. Er zahlt bar 3750 ℳ bei 4 % Rabatt. Wie groß war seine Schuld?

c) Auch die Prozente und die Zeit könnten bei besonders guten Klassen berechnet werden.

48. Über Termin- und Tararechnung.

Die Zusammenstellung der Termin- und der Tararechnung ist nicht gebräuchlich. Man verbindet sonst wohl die Terminrechnung mit der Zinsrechnung, obwohl beide nur die Ausdrücke Kapital und Zeit gemeinsam haben und diese Begriffe sich in beiden Rechnungsarten keineswegs decken, und man fügt die Tararechnung bald dieser, bald jener Rechnungsart bei, ohne daß ein tieferer Zusammenhang besteht. Ihrem Wesen nach müßte die Terminrechnung mit der Rabattrechnung verbunden werden, da beide der gemeinsame Begriff des zinsfreien Kapitals vereinigt.

Der Grund, weshalb in diesem Abschnitt Termin- und Tararechnung vereinigt sind, ist ein sehr äußerlicher und doch bedeutender, weil praktischer. Termin- und Tararechnung sind die beiden aus den bürgerlichen Rechnungsarten, die in jeder Schule am ehesten ohne jeden Schaden für formale und praktische Bildung entbehrt werden können. Die Terminrechnung setzt zinsfreie Kapitale voraus. Abgesehen von den höchst seltenen Fällen, in denen bei einer Erbschaft nach Bestimmung des Testamentes Legate nach einer festgesetzten Zeit ohne Zinsen gezahlt werden sollen und von den ebenso seltenen Fällen von jährlichen Rentenzahlungen, kommen zinsfreie Kapitale wohl nirgends im Verkehre vor. Die Teilzahlungen bei Gutsverkäufen werden in der jetzigen Zeit wohl meistens bis zur Zahlung verzinst, und die Warenschulden der Kaufleute werden durch Wechsel beglichen, bei deren vorzeitiger Einlösung Diskontorechnung und nicht Terminrechnung angewendet wird. Wir werden hierdurch zu dem zweiten Grund geführt, weshalb Terminrechnung von dem Lehrplan der Volksschule zu streichen ist. Kommen wirklich zinsfreie Kapitale vor, und sollen dieselben oder ein Teil derselben früher gezahlt werden, so wird bei 99 % derselben nicht Termin-, sondern Rabattrechnung angewendet werden. Die Schule beschäftigt sich bei der Terminrechnung mit Aufgaben, die eigens für Schulzwecke gebildet sind; mir sind wenigstens bis jetzt aus der Praxis Terminrechnungsaufgaben noch nicht entgegengetreten. Dies ist aus dem vorstehenden erklärlich, da die Bedingungen, unter denen Terminrechnungsaufgaben vorkommen können, selten vorhanden sind und in diesen seltenen Fällen nicht Termin-, sondern Rabattrechnung angewendet wird.

Die Tararechnung hingegen ist weit verbreitet, und es würde ein Fehler sein, wollte man sie gänzlich vom Lehrplan der Volksschule streichen. Nichts aber rechtfertigt ihre Stellung unter den sogenannten bürgerlichen Rechnungsarten. Sie ist eine einfache Abzugsrechnung, deshalb findet sie ihre richtige Stelle bei dem Rechnen mit mehrfach benannten Zahlen als Stufe der Anwendung für Zusammenzählen und Abziehen oder an derselben Stelle der Bruchrechnung. Es sind nur drei Begriffe, Brutto, Netto und Tara, die eingeführt werden müssen; sonst rechnet man mit kg und g. Im geschäftlichen Verkehr wird die Tara höchst selten nach Prozenten bestimmt und dann nur im Großhandel. Es wäre eine solche Bestimmung auch unpraktisch; denn in den meisten Fällen ist der Prozentsatz der Tara in Beziehung zum Brutto um so geringer, je größer das Bruttogewicht der Ware ist. Käufer und Verkäufer wollen bei der teuren Ware aber genaue Gewichtsbestimmung des Netto. In vielen Fällen ist die Gewichtsbestimmung der Verpackung durch besonderes Übereinkommen festgestellt worden, so z. B. vielfach das Gewicht der Säcke. — Dagegen bestimmt aber unsere Zollgesetzgebung die Tara der einzuführenden und zu verzollenden Waren nach Prozenten des Bruttogewichtes. Wir haben deshalb diese Zollaufgaben auf der Anwendungsstufe der Prozentrechnung berücksichtigt. Dorthin gehören auch die sogenannten Gutgewichtsbestimmungen, die in Prozenten ausgedrückt sind. Die gesonderte Tararechnung ist also unnötig, und wir ersparen durch die Ausscheidung derselben Zeit für andere wichtigere Rechenstoffe.

Somit wäre die Zusammenstellung von Termin- und Tararechnung gerechtfertigt. Unsere Volksschule kann sie entbehren und hierdurch wesentlich zu der so oft erwähnten Vereinfachung des Rechenstoffes beitragen. Die folgenden kurzen Ausführungen sind nur zur Belehrung der Seminaristen bestimmt; vielleicht können aber auch solche Lehrer, die durch den vorhandenen und festgehaltenen Lehrplan gezwungen sind, noch Vierteljahre auf Termin- und Tararechnung zu verwenden, von denselben Gebrauch machen.

A. Terminrechnung.

Die Terminrechnung verlangt zinsfreie Summen, die nach festgesetzter Zeit zu zahlen sind. Sie gleicht hierin der Rabattrechnung. Der Pflicht, zu einem bestimmten Termine das Kapital zu zahlen, steht das Recht gegenüber, bis zu diesem Zeitpunkte dasselbe noch zu benutzen. Wird nun das gesamte Kapital vor dem Zahlungstermine gezahlt, so muß die Entschädigung für den nicht bezogenen Nutzen in einem Erlaß an der Zahlung (Rabatt) bestehen. Auch wenn nur ein Teil des Kapitals vor dem Zahlungstermin gezahlt würde, könnte die Entschädigung in derselben Weise gewährt werden; sie könnte aber auch dadurch erzielt werden, daß der nicht gezahlte Teil des Kapitals so viel Zeit länger benutzt wird, daß weder der Zahlende noch der Empfänger Nutzen oder Schaden hat. Wären zwei solche Summen zu zahlen, so könnte die eine früher, die andere dementsprechend später gezahlt werden, so daß oft beide Zahlungstermine zusammenfallen. Die sich mit solchen ausgleichenden Zahlungsterminen beschäftigende Rechnungsart heißt Terminrechnung.

500 ℳ sind nach 2 Jahren ohne Zinsen zu zahlen. Wann ist der Rest fällig, wenn 300 ℳ sogleich gezahlt werden? Der Pflicht, 500 ℳ nach 2 Jahren zu zahlen, steht das Recht gegenüber, diese 500 ℳ noch 2 Jahre zu benutzen. Diesen Nutzen könnte der Zahlungspflichtige auf sehr verschiedene Weise ziehen. Wir nehmen den einfachsten Fall an, daß er diese 500 ℳ besitzt und zu 4% ausleihen kann. In den 2 Jahren wird er also 40 ℳ Zinsen ziehen. Da 300 ℳ sogleich bezahlt werden, bleiben nur 200 ℳ, durch die er den Nutzen, 40 ℳ Zinsen, erhalten soll. 200 ℳ bringen zu 4% in 1 Jahre 8 ℳ, so oft 8 ℳ in 40 ℳ enthalten sind, soviel mal 1 Jahr muß er 200 ℳ benutzen; das ist 5 . 1 Jahr = 5 Jahr. 200 ℳ können also erst nach 5 Jahren gezahlt werden. Jeder andere Prozentsatz wird dasselbe Resultat ergeben. Die einfachsten Zahlen erhalten wir, wenn wir nach Anwendung anderer Prozentbestimmungen die angenommene Verzinsung endlich auf 1% feststellen. 500 ℳ bringen in 2 Jahren zu 1% 10 ℳ; da 300 ℳ sogleich bezahlt werden, bleiben noch 200 ℳ, die in 1 Jahre 2 ℳ und in 5 Jahren die geforderten 10 ℳ Zinsen bringen, also nach 5 Jahren bezahlt werden können. Der Übergang von 1% zu dem etwas abstrakteren Begriff „ein Teil Nutzen" ist nicht schwer. Überall, bei 5%, 4%, 3%, 2%, 1%, erhielten wir dasselbe Resultat, auf die Höhe des Prozentsatzes kommt es also nicht an. Wir nennen daher den Nutzen, den 100 ℳ in 1 Jahr bringen, 1 Teil; dann bringen 100 ℳ in 2 Jahren 2 Teile und 500 ℳ in 2 Jahre 10 Teile Nutzen. An anderen Beispielen ist das zu üben. Wenn 300 ℳ sofort gezahlt werden, bleiben nur 200 ℳ, welche 10 Teile Nutzen bringen sollen. 200 ℳ bringen in 1 Jahr 2 Teile Nutzen, also 10 Teile in so viel mal 1 Jahre, als 2 Teile in 10 Teilen enthalten sind, also in 5 . 1 = 5 Jahren. Bei andern Aufgaben kann man auch das einen Teil Nutzen nennen, was vielleicht 1000 ℳ in 1 Jahre oder was 100 ℳ in 1 Monate oder was auch 1 ℳ in 1 Tag usw. an Nutzen bringen.

Der Begriff „Teil Nutzen" wird von dem 13- und 14jährigen Kinde recht wohl verstanden werden können; er entspricht auch der Terminrechnung, die wohl den Nutzen des Kapitals, aber nicht speziell den Zinsgenuß behandelt; außerdem kann das Kind jederzeit für diese „Teile Nutzen" konkrete Größen einsetzen, und es wird bewahrt vor der so häufig falsch angewendeten, weil falsch verstandenen Form, daß 500 ℳ in 2 Jahren so viel Nutzen bringen als 100 ℳ in 10 Jahren. Wie oft hat man mir schon geantwortet, 500 ℳ nach 2 Jahren ist gleich 100 ℳ nach 10 Jahren usw.

Die gewöhnliche Gliederung der Terminrechnung ist die, daß 1. für mehrere Termine ein Termin, 2. für einen Termin mehrere und 3. für mehrere Termine mehrere gesucht werden. Die wichtigste dieser Gruppen ist wohl die 1. Gruppe der Aufgaben, nämlich die Aufsuchung des mittleren Zahlungstermines. 360 ℳ sind nach 4 und 540 ℳ nach 7 Jahren ohne Zinsen zu zahlen; wann ist der mittlere Zahlungstermin für beide Posten? Lösung: Nennen wir den Nutzen, den 100 ℳ in 1 Jahr bringen (auch was 20 ℳ in 1 Jahr bringen), 1 Teil Nutzen, so bringen 360 ℳ in 1 Jahr $3\frac{3}{5}$ und in 4 Jahren 4 . $3\frac{3}{5}$ Teile = $14\frac{2}{5}$ Teile und 540 ℳ in 1 Jahre $5\frac{2}{5}$ Teile und in 7 Jahren 7 . $5\frac{2}{5}$ Teile = $37\frac{4}{5}$ Teile Nutzen.

Zusammen bringen beide Kapitale $14\frac{2}{5}$ und $37\frac{4}{5} = 52\frac{1}{5}$ Teile Nutzen. Die Summe der Kapitale, also 900 ℳ, bringt in 1 Jahr 9 Teile Nutzen; so oft nun 9 Teile Nutzen in $52\frac{1}{5}$ Teilen Nutzen enthalten sind, nach soviel mal 1 Jahre kann die Summe der Kapitale gezahlt werden. 9 Teile sind in $52\frac{1}{5}$ Teilen $= 5\frac{4}{5}$ mal enthalten; folglich sind 900 ℳ nach $5\frac{4}{5}$ Jahren, d. i. nach 5 Jahren, 9 Monat, 18 Tagen, zu zahlen.

Für erweiterte Volksschulen könnten die Terminrechnungsaufgaben mit den Zins- und Rabattrechnungsaufgaben verbunden werden. Erfolgt die Zahlung nach dem mittleren Zahlungstermine, so müssen Verzugszinsen, d. i. Zinsen, die durch verzögerte Zahlung entstehen, bezahlt werden; wird aber die Zahlung vor dem Zahlungstermine geschehen, so wird Rabatt gewährt werden müssen. Die Umstellungen dieser Aufgaben, als die Berechnung des mittleren Zahlungstermines aus den Verzugszinsen oder dem Rabatt, und die Berechnung der Summen oder der Zeiten der ursprünglichen Kapitale stellen recht hohe Anforderungen an die Schüler, deshalb sind diese Stoffe nur mit sorgfältiger Auswahl zu behandeln.

Gruppierung der Aufgaben.

(In meinen Rechenheften ist weder die Terminrechnung noch die Tararechnung als gesonderte Rechnungsart aufgenommen worden. Im Anschluß an die nachstehenden Aufgaben wird sich der Lehrer, der die Rechnungsarten lehrplanmäßig behandeln muß, leicht einige passende Aufgaben bilden können. Doch wiederhole ich, daß die Aufgaben nicht in die Volksschulen, also auch nicht in die Volksschulrechenhefte gehören.)

1. B hat kontraktmäßig für besondere Bemühungen am 1. April und am 1. Oktober je 75 ℳ zu erhalten. Welches ist der mittlere Zahlungstermin? (Für mehrere Termine einen Termin.)
2. Ein Universalerbe hat 6 Monate nach der Testamentseröffnung ein Legat von 800 ℳ zu zahlen. Auf besonderen Wunsch zahlt er sofort 300 ℳ; wann ist der Rest zu zahlen? (Für einen Termin mehrere Termine.)
3. Ein Mieter bezahlt den Mietszins kontraktmäßig am Schluß eines jeden Vierteljahres. Auf besonderen Wunsch des Vermieters zahlt er die eine Hälfte der jährlichen Miete am 1. Mai. Wann wird der Zahlungstermin der 2. Hälfte sein? (Mehrere Termine für mehrere Termine.)
4. A hat an B 200 ℳ nach 3 Monaten und 300 ℳ nach 5 Monaten zu zahlen. Er bezahlt beide Posten auf einmal; weil er aber den mittleren Zahlungstermin nicht innegehalten hat, muß er bei 4% 5 ℳ Verzugszinsen entrichten. Wann hat die Zahlung stattgefunden? (Wegen der über den mittleren Zahlungstermin verzögerten Zahlung werden Verzugszinsen bezahlt.)
5. Es sollen 5000 ℳ nach 4 Monaten und 7000 ℳ nach 6 Monaten gezahlt werden. Der Zahlungsempfänger wünscht beide Kapitale nach 5 Monaten gezahlt zu erhalten; wieviel Rabatt (auf 100) muß der Zahlungsverpflichtete abziehen, wenn ihm 5% bewilligt worden waren? (Wegen der vor dem mittleren Zahlungstermine geleisteten Zahlung wird Rabatt gewährt.)

B. Die sogenannte Tararechnung.

Die Tararechnung behandelt das Gewicht der gekauften und versendeten Waren. Neben manchen allgemein zu verwertenden Verhältnissen werden oft Verhältnisse und Begriffe mit ihr verbunden, die zur speziellen Fachbildung, nicht zur allgemeinen Bildung gehören. Wir behandeln das Gesamtgewicht der Ware (Bruttogewicht), das Gewicht der Verpackung (die Tara) und das Sondergewicht der Ware (Nettogewicht); auch der Begriff „Gutgewicht" (natürliches Mindergewicht durch Eintrocknen u. dgl.) mag erwähnt werden; von den anderen Ausdrücken für Gewichtsabzüge, wie Leckage, Fusti usw. sehen wir ab.

Die Tara wird meistens direkt bestimmt, so daß die Beziehung vom Brutto zu der Tara und dem Netto die der Summe zu den beiden Posten ist. Brutto — Tara = Netto; desgleichen auch Brutto — Netto = Tara, und Tara + Netto = Brutto! Die hierher gehörigen Aufgaben werden bei dem Abziehen mit mehrfach benannten Zahlen behandelt. Das Gutgewicht wird in Prozenten bestimmt. Aufgaben der letzten Art, sowie die durch die Zollgesetzgebung bedingte Tararechnung finden bei der Prozentrechnung Verwendung.

49. Über Gesellschaftsrechnung.

Nicht immer sollen sich zwei oder mehrere Personen so in gegebene Größen teilen, daß sie gleich viel bekommen. Wenn A 8 Tage, B aber 3 Tage gearbeitet hat, und ihr Verdienst 37,40 ℳ beträgt, so kann B nicht so viel erhalten wie A erhält. Ihr Verdienst muß im Verhältnis ihrer Arbeit, die sich wahrscheinlich nach der Arbeitszeit richten wird, verteilt werden. A wird dan 8, B aber 3 Teile bekommen. 11 Teile sind = 37,40 ℳ; 1 Teil = $\frac{1}{11}$ von 37,40 ℳ = 3,40 ℳ. A erhält also 8 . 3,40 ℳ = 27,20 ℳ und B 3 . 3,40 ℳ = 10,20 ℳ. Ähnlich wird es bei der Verteilung von Gewinn, bei Feststellung von Prämien, bei Erbschaften, auch bei der Zusammensetzung oder Zerlegung von Körpern usw. sein. Überall werden mehrere nicht gleiche Teile gebildet werden müssen. Da wenigstens zwei, oft aber auch mehrere Personen, also eine Gesellschaft, beteiligt sein werden, welche die bestimmten Teile in Empfang nehmen sollen, so nennt man diese Rechnungsart Gesellschaftsrechnung. Die Aufgaben sind meistens einfach und daher leicht zu lösen; sie kommen im geschäftlichen Leben sehr häufig vor, deshalb werden sie in jeder Schule, auch in der einklassigen, behandelt werden müssen.

Die Arbeit des Schülers besteht nun 1. in der Feststellung des Verhältnisses und 2. in der Beziehung der gefundenen Verhältnisse auf die in der Aufgabe gegebenen zu verteilenden Größen. Häufig meint man, nur die zuletzt genannte Arbeit gehöre zur Lösung der Aufgabe. Mir scheint die Feststellung des Verhältnisses nicht nur die grundlegende, sondern auch die wichtigste und schwerste Arbeit zu sein. Die Beziehung der Teile zu den Zahlen der Aufgabe erfolgt nach wenigen leicht zu verstehenden, schon behandelten und darum auch leicht anzuwendenden Formen. Entweder

habe ich die Anzahl der Teile, dann führt ein oft geübter Regeldetrischluß zur Lösung, oder ich habe neben der Anzahl der Teile noch andere mit diesen verbundene Größen, dann muß ich zunächst diese Größen wegschaffen, und das geschieht in der einfachsten Weise durch Zuzählen oder Abziehen; der noch übrige Teil der Lösung ist dem ersten gleich. Anders ist es mit der die Lösung vorbereitenden Feststellung der Teile. Wie verschieden können die Forderungen über die Art der Verteilung sein. Da heißt es z. B.: 1. A erhält 3mal soviel wie B; 2. A erhält $\frac{1}{3}$ von dem was B erhält; 3. der Anteil des A verhält sich zu dem des B wie 2 : 3; 4. A erhält 25 % mehr oder auch weniger als B; 5. A erhält 100 ℳ mehr oder auch weniger als B; 6. die unter 5 gegebenen Forderungen werden mit jeder der vier zuerst genannten Arten verbunden. Wie mannigfaltig gestaltet sich aber erst die Verteilungsart, wenn unter mehr als 2 Personen verteilt werden soll?

Diese so wichtige Feststellung der Teile wird durch das Kopfrechnen eingeführt und geübt; doch sind auch in dem Tafelrechenhefte Aufgaben zu geben, die den Schüler veranlassen, allein, ohne besondere Leitung des Lehrers, aus den gegebenen Verhältnissen die Art der endlichen Verteilung zu finden. Diese richtig gelösten Aufgaben geben dem Lehrer die Gewißheit, daß der Schüler nicht nur zum Verständnis der Rechnungsart gekommen ist, sondern daß er auch befähigt ist, das Gelernte selbständig anzuwenden.

Die bekannte, auch in der oben angeführten Übersicht der Verteilungsart innegehaltene Gruppierung der Gesellschaftsrechnungs-Aufgaben ist die der Verteilung nach geometrischem, arithmetischem und geometrisch-arithmetischem Verhältnisse.

1. Das geometrische Verhältnis.

50 ℳ sollen unter 2 Personen, A und B, derart geteilt werden, daß A 3mal soviel erhält wie B! Lösung: B erhält 1 Teil, A also 3 Teile, beide 4 Teile, die gleich 50 ℳ sind. 1 Teil = $\frac{1}{4}$ von 50 ℳ = 12,50 ℳ usw. — 50 ℳ sollen unter A und B so geteilt werden, daß A $\frac{1}{2}$ von dem erhält, was B bekommt! Hier würde man den Teil des A 1 Teil, den des B demnach 2 Teile nennen usw. — A und B sollen sich derart in 50 ℳ teilen, daß A $2\frac{1}{2}$mal soviel erhält wie B usw.

An ähnlichen Aufgaben, die nacheinander gegeben werden, finden die Kinder die Anzahl der Teile, aus denen 50 ℳ nach der jedesmaligen Bestimmung bestehen. Der Hinweis auf die Verhältnisbestimmungen wird diese Feststellung der Teile wesentlich erleichtern.

Der gegebenen Lösungsform ähnlich sind die Lösungsformen der übrigen in der oben stehenden Übersicht unter 1 bis 4 gegebenen Aufgaben. Zuerst Feststellung der Teile, dann Beziehung der Teile zu den gegebenen Größen. — Besonderes Gewicht ist vornehmlich bei dem Kopfrechnen auf die Rückverwandlung der Prozentbestimmung in eine übersichtlichere Verhältnisbestimmung zu legen. Wie verhält sich der Anteil des A zu dem des B, wenn: a) A 25 % mehr erhält als B; b) A 30 % weniger erhält als B usw. Im ersten Falle erhält A $\frac{1}{4}$ des Ganzen mehr; folglich

verhalten sich die Teile des A zu dem des B wie 5 : 4; im zweiten Falle erhält A $\frac{3}{10}$ des Ganzen weniger, folglich 7 Teile, wie B dem 10 erhält.

Verwickelter können die Verhältnisse werden, wenn die Verteilung unter 3 oder mehrere Personen erfolgen soll. Auch hier ist die Feststellung der Teile die Hauptarbeit. Wenn A 50% mehr als B und B 25% mehr als C erhält, so erhält C 1 Teil, B $\frac{1}{4}$ des C mehr, also $1\frac{1}{4}$ Teil, A $\frac{1}{2}$ des B mehr, also $1\frac{1}{4} + \frac{5}{8}$ Teil $= 1\frac{7}{8}$ Teil, oder C erhält 8 Teile, B 10 Teile und A 15 Teile. Die weitere Lösungsarbeit verlangt nun nichts anderes, als ein Verteilen der gegebenen Summe auf 33 Teile und ein Vervielfachen mit 8, 10 und 15.

Besonders schwierig ist die Feststellung der Teile, wenn der Anteil des A sowohl zum Anteil des B als auch zum Anteil des C in ein Verhältnis gesetzt wird. Soll z. B. A $33\frac{1}{3}$% mehr als B und 40% mehr als C bekommen, so verhält sich der Anteil des A zu dem des B wie 4 : 3 und der des A zu dem des C wie 7 : 5. Hier muß ich dem A so viel Teile geben, daß sich diese sowohl auf B als auf C leicht verteilen lassen. Gebe ich dem A 4 . 7 = 28 Teile, so hat B, weil A 7 . 4 Teile hat, 7 . 3 = 21 Teile, und C, weil A 4 . 7 Teile hat, 4 . 5 = 20 Teile, es verhält sich also der Anteil des A zu dem des B zu dem des C wie 28 : 21 : 20. Werden mehrere ähnliche Aufgaben mit den vorgeschrittenen Kindern behandelt, so bestimmen diese mit großem Eifer die verlangten Teile.

Schwierig können auch die Aufgaben sein, bei denen sich die Teile aus Faktoren zusammensetzen; wenn z. B. 3000 ℳ Geschäftsgewinn unter 2 Teilhaber im Verhältnis ihres eingelegten Kapitals und der Zeit, in der dasselbe benutzt worden ist, geteilt werden soll. Wieviel erhält jeder, wenn von A 6000 ℳ auf 10 Monate und von B 5000 ℳ auf 11 Monate zum Geschäft gegeben waren? Hier werden auch die bei der Terminrechnung erwähnten Teile zur Verwendung kommen. Was 1000 ℳ in 1 Monat bringen, nennen wir 1 Teil; folglich hat A 60 und B 55 Teile oder gekürzt A 12 und B 11 Teile zu beanspruchen usw.

2. Das arithmetische Verhältnis.

A und B sollen sich 50 ℳ so teilen, daß A 10 ℳ mehr erhält als B! Lösung: A erhält zuerst seine 10 ℳ, die er mehr erhalten soll als B. Die übrigbleibenden 40 ℳ werden zwischen A und B in gleichem Verhältnis geteilt usw., oder: B erhält 1 Teil, A 10 ℳ mehr, also 1 Teil und 10 ℳ; 50 ℳ sind demnach 2 Teile und 10 ℳ; 2 Teile demnach 40 ℳ; 1 Teil = 20 ℳ usw. Dieselbe Aufgabe kann auch in der Form vorkommen, daß B 10 ℳ weniger erhält; also: 50 ℳ sollen unter A und B so geteilt werden, daß B 10 ℳ weniger als A erhält.

Bei der Lösung dieser Art von Aufgaben findet man, daß die Kinder es schwer verstehen, wenn man zu erklären versucht: B legt zuerst 10 ℳ, die er weniger erhalten soll, zu 50 ℳ, und nun teilen beide die 60 ℳ unter sich in gleiche Teile. So richtig diese Auffassung ist, so schwer wollen die Kinder begreifen, daß A einen Anteil haben darf an

dem von B hinzugelegten Gelde. Ich versuchte deshalb die Erklärung in der Weise, daß ich feststellen ließ: Wenn bei der Verteilung B eben soviel als A erhalten sollte, müßten 10 ℳ mehr, also 60 ℳ verteilt werden usw. Oder bei einer andern praktischen Aufgabe: 2 Jäger haben 33 Hasen geschossen und zwar hat A 3 Hasen weniger geschossen als B. Wieviel Hasen hat jeder Jäger geschossen? Lösung: Hätte A ebensoviel Hasen geschossen, als B, so würden 3 Hasen mehr, also 36 Hasen geschossen worden sein usw. Später, besonders bei dem Tafelrechnen, werden diese Aufgaben mit direkter Angabe der Teile gelöst werden; also 2 Teile — 10 ℳ = 50 ℳ, oder 2 Teile — 3 Hasen = 33 Hasen.

Auch hier sind Aufgaben, in denen mehrere Personen vorkommen und in denen die Teile der einen Person immer auf die der anderen bezogen werden, schwieriger zu lösen. Langsames, gleichmäßiges Fortschreiten führt zum Ziel. Sollen 100 ℳ unter 4 Personen derart geteilt werden, daß A 2 ℳ mehr als B, B 5 ℳ weniger als C und C 15 ℳ mehr als D erhalten soll, so würde D 1 Teil, C 1 Teil + 15 ℳ, B 1 Teil + 15 ℳ — 5 ℳ = 1 Teil + 10 ℳ und A 1 Teil + 10 ℳ + 2 ℳ = 1 Teil + 12 ℳ erhalten; zusammen sind es 4 Teile + 37 ℳ; diese sind gleich 100 ℳ usw.

3. Geometrisch-arithmetische Verhältnisse.

100 ℳ sollen unter A und B derart geteilt werden, daß A 4 ℳ mehr als das Doppelte von dem bekommt was B erhält! Lösung: Nimmt A die 4 ℳ vorher weg, so bleiben 96 ℳ, die dann in bekannter Weise in 3 Teile zerfallen oder: B erhält einen Teil, A 2 Teile und 4 ℳ; folglich sind 100 ℳ = 3 Teile und 4 ℳ, 3 Teile = 96 ℳ, 1 Teil = 32 ℳ usw.

Durch Zusammenstellungen können auch hier schwierigere Aufgaben erzielt werden, doch gehören diese nicht zu dem Pensum der Volksschule.

Bei dem Tafelrechnen ist auf Klarheit und Übersicht zu halten; besondere Ansatzformen lassen sich schwer als allgemein geltend aufstellen. Für alle Aufgaben gilt: 1. Angabe der Teile; 2. Vergleichung derselben mit der Gesamtsumme; 3. Verteilung der letzteren. Wenn 3800 ℳ so unter 4 Personen geteilt werden sollen, daß jede folgende 50 ℳ mehr erhalten soll als der doppelte Teil der vorhergehenden Person beträgt, so wird sich folgende schriftliche Form ergeben:

A erhält	1 Teil
B „ 2 Teile + 50 ℳ	= 2 Teile + 50 ℳ
C „ 2(2 „ + 50 ℳ) + 50 ℳ = 4 Teile + 100 ℳ + 50 ℳ	= 4 „ + 150 ℳ
D „ 2(4 „ + 150 ℳ) + 50 ℳ = 8 „ + 300 ℳ + 50 ℳ	= 8 „ + 350 ℳ
A + B + C + D erhalten	15 Teile + 550 ℳ

15 Teile + 550 ℳ = 5800 ℳ
15 „ = (5800 ℳ — 550 ℳ) = 5250 ℳ
1 Teil = $\frac{5250}{15}$ ℳ = 350 ℳ

A	erhält	1 Teil		= 350 ℳ
B	„	2 Teile	+ 50 ℳ	= 750 ℳ
C	„	4 „	+ 150 ℳ	= 1550 ℳ
D	„	8 „	+ 350 ℳ	= 3150 ℳ.
				Summe 5800 ℳ

Gruppierung der Aufgaben (Schroeter, Tafelrechenhefte, Ausg. A, 6. Heft, Gruppe 22 bis 24; Ausg. B, Gruppe 74 und 75).

1. a) A und B verteilen 500 ℳ unter sich. Wieviel erhält jeder: a) wenn A 3 mal so viel erhält als B; b) wenn sich der Anteil des A zu dem des B verhält wie 4 : 1; c) wenn A 50% mehr erhält als B; d) wenn A $\frac{1}{4}$ mal so viel erhält wie B?
   b) Verteile 6961,50 ℳ so unter 4 Personen, daß jede folgende Person 10% mehr erhält als die vorhergehende. Wieviel erhält jede Person? (Geometrisches Teilungsverhältnis.)
2. A und B verteilen 500 ℳ unter sich. Wieviel erhält jeder: a) wenn A 50 ℳ mehr erhält als B; b) wenn A 120 ℳ weniger erhält als B? (Arithmetisches Teilungsverhältnis.)
3. A und B verteilen 500 ℳ so unter sich, daß A das 3fache von dem Anteil des B und 100 ℳ erhält. Wieviel erhält jeder? (Geometrisch-arithmetisches Teilungsverhältnis.)
4. 3 Gutsbesitzer haben einen Weg von 2,800 km Länge gründlich zu bessern. Auf A kommen 0,600 km, auf B 1,300 km und auf C 0,900 km. A sendet 1 Gespann Pferde und 1 Mann; B und C je 2 Gespann Pferde und 2 Männer; auf gemeinschaftliche Kosten werden noch 2 Gespann Pferde und 2 Männer eingestellt. Diese erhalten nach Beendigung der Arbeit 124,80 ℳ. Wieviel hat jeder dieser 3 Besitzer hiervon zu tragen? (Zusammengesetzte Anwendungsaufgaben.)

50. Über Mischungsrechnung.

Milch und Wasser werden zusammengeschüttet, die hierdurch hergestellte Vereinigung läßt sich auf mechanischem Wege nicht wieder lösen; werden aber Hafer und Wicken vereinigt, so ist es möglich, den Hafer wieder von den Wicken zu trennen. Die erste Verbindung nennt man eine Mischung; die zweite heißt Gemenge. Mit beiden beschäftigt sich die Mischungsrechnung, wenn sie den Wert oder die Güte, d. i. die Qualität der Mischung, oder die Größenverhältnisse, d. i. die Quantität der gegebenen Stoffe für eine bestimmte Mischung suchen lehrt. Die Stoffe, welche in den Aufgaben verwendet werden, bestimmt das Bedürfnis des Lebens. Mischungen von verschiedenartiger Ware, Metallmischungen oder Legierungen, Sole, Spiritusverbindungen usw. sind Sachverhältnisse, denen unsere Aufgaben sich anschließen müssen. Bei den Warenverbindungen ist es nicht leicht, der Anforderung, daß die Aufgaben wahr sein sollen, gerecht zu werden. Die Aufgabe kann ja vieles mischen lassen; ob solche Mischungen aber in Wahrheit versucht und ausgeführt werden können oder

dürfen, ist oft höchst zweifelhaft. Ein ziemlich gewagtes Unternehmen würde es schon sein, Reis von verschiedenem Werte zu mischen, gefährlich aber könnten die Mischungen von Milch und die von Wein werden; denn die Milch- und Weinmischer kommen mit dem Strafgesetzbuch in unangenehme Berührung. Wir wollen also hier bei der Stoffauswahl sehr vorsichtig sein. Legierungen, Sole und Spiritusverbindungen sind notwendig und gestattet; sie werden jetzt so häufig erwähnt, daß auch das Kind der einfachen Volksschule einige Stunden oder Wochen diesen Beziehungen widmen muß.

Die Legierungen sind notwendig, damit die weichen, edlen Metalle besser bearbeitet werden und im allgemeinen kräftigeren Widerstand leisten können. Gold, Silber und Nickel werden gewöhnlich mit Kupfer legiert. Reines Gold oder Silber heißt auch feines Gold oder Silber. Das Legierungsverhältnis wird auf 1000 bezogen, d. h. der Wert des Metalls wird nach der Anzahl der Tausendstel des feinen Metalls bestimmt, die eine Einheit der Legieruug in sich faßt. Gold von 700 fein bedeutet, daß unter 1000 Teilen der Legierung 700 Teile feines Gold und 300 Teile Zusatz sind. Die deutschen Gold- und Silbermünzen haben einen Feingehalt von 900, die Nickelmünzen von 250. (Früher nannte man feines Gold 24 karätig und feines Silber 16 lötig. 14 karätiges Gold war also Gold, daß unter 24 Teilen 14 Teile feines Gold und 10 Teile Zusatz hatte, und bei 10 lötigem Silber waren 10 Teile feines Silber und 6 Teile Zusatz.)

Das aus der Erde quellende Salzwasser heißt Sole. Der Salzgehalt der Sole wird nach Prozenten bestimmt. 11 prozentige Sole enthält daher 11 Teile Salz unter 100 Teilen Sole. Man sagt auch oft 11 lötige Sole. Die Bedeutung ist dieselbe.

Ebenfalls auf 100, also in Prozenten, wird der Weingeistgehalt des Spiritus bestimmt. 1 % Spiritus auf 100 Teile Spiritus wird 1 Literprozent genannt. 45 % Spiritus enthält also unter 100 Teilen Mischung 45 Teile reinen Weingeist und 55 Teile Wasser. Die Preisangaben für Spiritus sind stets auf 100 l reinen Spiritus berechnet; 100 l reiner Spiritus = 100 . 100 % = 10000 Literprozent. Spiritus kostet 45 ℳ, das heißt, 10000 Literprozent kosten 45 ℳ. Die Anzahl der Literprozente der Mischung lassen den Preis derselben finden.

Unsere Schulen werden nur die einfacheren der Mischungsrechnungsaufgaben lösen. Diese genügen, um die vorstehenden Erläuterungen je nach Bedürfnis anzuschließen und zu befestigen; sie befriedigen auch die Ansprüche, welche das Leben an die Bildung der Volksschüler erheben kann. Ausführlicheres mag der besonderen Fachbildung vorbehalten bleiben. — Wir suchen, wie oben schon erwähnt wurde, zuerst die Qualität der Mischung, dann die Quantität der zu mischenden Stoffe. Die meisten der Aufgaben, welche zur ersten Gruppe gehören, könnte man nach den notwendigen stofflichen Erläuterungen zur Durchschnittsrechnung zählen. 3 kg Tabak zu 2,40 ℳ à kg und 2 kg à 1,90 ℳ würde eine Quantität von 5 kg ergeben; jedes kg kostet dann den 5. Teil der Summe des Preises. Dasselbe bei 4 kg feinem Silber und 1 kg Kupfer. Die Summe des Feingehaltes ist 4000 Tausendteile, die nach Hinzunahme von dem kg Kupfer in 5 Teile

zerfallen; jeder dieser Teile beträgt 800. Ebenso wird es sein, wenn bei den Legierungen usw. zusammengesetzte Stoffe verbunden werden. 4 l 35 % Spiritus und 3 l 45 % Spiritus haben zusammen $4 . 35 + 3 . 45$ Literprozente reinen Spiritus = 275 Literprozente; auf 1 l kommt dann der 7. Teil von 275 Literprozent = $39\frac{2}{7}$ Literprozent, also ist die Mischung $39\frac{2}{7}$ %. Schwierigkeiten werden Aufgaben dieser Art und auch ihre Umkehrungen nicht bieten.

Auch die zweite Gruppe der Aufgaben, bei der die Quantität der zu mischenden Teile gesucht wird, bietet einfache Aufgaben, die gelöst werden können, wenn Zeit vorhanden ist, die aber ohne Schaden für die Bildung der Schüler aus dem Stoffe der Volksschule entfernt werden können. Aufgabe: In welchem Verhältnisse ist 10 % und 15 % Sole zu mischen, um 12 % Sole zu erhalten? Lösung: In 1 l 15 % Sole sind 3 Teile Salz mehr, als 1 l der 12 % Sole erfordert; in 1 l der 10 % Sole sind 2 Teile Salz zu wenig. Diese 2 Teile werden aus den 3 Teilen, die 1 l der 15 % Sole zu viel hatte, ersetzt werden (es wird Salz mit Wasser umgetauscht), und der übrige eine Teil wird noch durch $\frac{1}{2}$ l der schlechteren Sole aufgebraucht werden (oder so oft nun 2 Teile in 3 Teilen enthalten sind, so viel mal 1 l der schlechteren Sole muß genommen werden); folglich wird man 1 l der 15 % und $1\frac{1}{2}$ l der 10 % Sole zu 12 % Sole verbinden können. Das Verhältnis der Mischung ist also wie 2 : 3. Nach mehreren ähnlichen Lösungen wird sich herausstellen, daß, um bei der 1. Aufgabe zu bleiben, die 15 % Sole 3 Teile Salz Überschuß, die 10 % Sole 2 Teile Salz Mangel haben, und daß 2 . 3 Teile Überschuß durch 3 . 2 Teile Mangel aufgehoben werden, daß man also die Sorte, welche den Überschuß gibt, so viel mal setzt, als Einheiten des Mangels und die Sorte, welche den Mangel angibt, so viel mal, als Einheiten des Überschusses vorhanden sind. Nachdem das Verhältnis festgestellt ist, läßt sich leicht berechnen, wieviel von jedem Stoffe zu einer gegebenen Quantität, vielleicht zu 85 l 12 % Sole gehören würde oder wieviel von der einen Art zu der gegebenen Quantität der anderen gefügt werden müßte. Übersichtlich ist die schriftliche Darstellung. Aufgabe: In welchem Verhältnis muß 800 teiliges Gold und 650 teiliges Gold verbunden werden, damit die Legierung 760 teilig ist? Wir schreiben:

800 teiliges Gold	+ 40	110 Teile	11 Teile
760 „ „			
650 „ „	— 110	40 „	4 „
			15 Teile.

Daß alle hierher gehörenden Aufgaben einer mannigfaltigen Ausbildung fähig sind, ist leicht einzusehen. Aber auch für die mehrklassige Volksschule wird der in vorstehenden Übersichten angedeutete Stoff vollständig genügen, vielleicht das erreichbare Ziel schon überschreiten.

Vielfach werden zur Mischungsrechnung noch Aufgaben herangezogen, die von zusammengesetzter Arbeit handeln. Wenn z. B. A ein Gartengrundstück allein in 3 Tagen, B aber allein in 5 Tagen umgräbt, so läßt

sich annähernd berechnen, wie lange beide brauchen. (Annähernd, weil aus der vereinigten Arbeit besondere Vorteile oder auch Nachteile sich ergeben können, die nicht mit in Rechnung zu ziehen sind.) A braucht zur Arbeit 3 Tage, er gräbt in 1 Tage $\frac{1}{3}$ des Gartens um; B gräbt dagegen in 1 Tage nur $\frac{1}{5}$ des Gartens um. Beide graben in 1 Tage $\frac{8}{15}$ des Gartens. Zu $\frac{8}{15}$ des Gartens brauchen sie 1 Tag, zu $\frac{1}{15}$ des Gartens $\frac{1}{8}$ Tag und zu $\frac{15}{15}$ $15 \cdot \frac{1}{8} = 1\frac{7}{8}$ Tag. (Auch durch Enthaltenseinsschluß zu lösen.) Auch diese Aufgaben können verschiedentlich erweitert werden. Wenn z. B. zu den Bedingungen der eben angeführten Aufgabe noch hinzukäme, daß nach Anstellung eines 3. Arbeiters die drei den Garten dann in $1\frac{1}{4}$ Tag umgraben würden, so könnte die Frage z. B. lauten: Wieviel % arbeitet der 3. Arbeiter langsamer oder weniger, als der 1. Arbeiter? Der 1. gräbt an 1 Tage $\frac{1}{3}$, der 2. $\frac{1}{5}$ des Gartens um; zusammen graben beide $\frac{8}{15}$ des Gartens in 1 Tag um; in $1\frac{1}{4}$ Tag werden diese beiden Arbeiter $1\frac{1}{4} \cdot \frac{8}{15} = \frac{2}{3}$ des Gartens umgraben. Der 3. Arbeiter wird also in $1\frac{1}{4}$ Tag $\frac{1}{3}$ des Gartens, in $\frac{1}{4}$ Tag $\frac{1}{15}$ und in 1 Tag $\frac{4}{15}$ des Gartens umgraben. An $\frac{5}{15}$, die der 1. täglich umgräbt, fehlt dem 3. also $\frac{1}{15}$, also der 5. Teil; also arbeitet er um 20 % langsamer, als der 1. Arbeiter.

Ähnliche Aufgaben sind nur, wenn ausreichende Zeit vorhanden ist, in mehrklassigen Schulen zu lösen.

Gruppierung der Aufgaben (Schroeter, Tafelrechenhefte, Ausg. A, 6. Heft, Gruppe 26 bis 29; Ausg. B, 3. Heft, Gruppe 76).

1. a) Was ist 1 l der Mischung wert, wenn 15 l zu je 1,80 ℳ und 26 l zu je 1,40 ℳ gemischt werden?
   b) Welchen Feingehalt hat eine Mischung, die aus 15 g 700 teil. Golde und aus 25 g 800 teil. Golde besteht? (Aufsuchen des Wertes oder der Güte [Qualität] der Mischung.)
2. a) Ein Geschäftsmann will 1 hl 25 % Spiritus aus 90 % Spiritus und Wasser zusammengießen. Wieviel muß er von jeder Sorte nehmen?
   b) Jemand hat 15 l Milch. Wieviel Wasser muß er dazugießen, damit das Wasser 20 % der Mischung beträgt? (Die Quantität wird gesucht.)

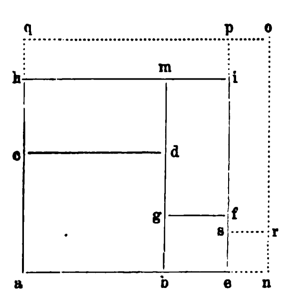
51. Die Quadrat- und die Kubikwurzel.

A. Das Quadrieren einer Zahl und die Quadratwurzel.

Die „Allgemeinen Bestimmungen" sagen: „In der mehrklassigen Schule erweitert sich das Pensum in den bürgerlichen Rechnungen durch Aufnahme der schwierigeren Arten und das in der Rechnung mit Dezimalen durch die Lehre von den Wurzelextraktionen." Die „Allg. Best." verlangen also in der vorstehenden Bemerkung für die mehrklassige Schule die Lehre von den Wurzelextraktionen. Die Wurzelextraktionen bilden nicht rein formalen Stoff, wie vielfach angenommen wird, da Verhältnisse

gar nicht so selten vorkommen, in denen das Ausziehen der Quadrat- oder der Kubikwurzel notwendig ist; andrerseits aber bieten sie die Möglichkeit in hohem Maße, den formalen Zweck des Rechenunterrichts zu erreichen. Nichts würde verwerflicher sein, als wenn der Lehrer hier der Praxis zu viel Raum gönnte; wenn er nämlich nur das Verfahren angeben und einprägen wollte, ohne die notwendige auf klarer Erkenntnis beruhende und zu klarer Erkenntnis des Verfahrens führende Anschauung zugrunde zu legen. Schleunigstes Vergessen der mechanisch eingeprägten und mechanisch gebrauchten Formeln würde die unausbleibliche Folge sein, da nur Verstandenes sicher im Gedächtnisse haftet. — Wenn nun auch für manche Schulen eine eingehende Behandlung der Wurzelextraktionen nicht möglich ist, so können die einfachsten Fälle in allen mehrklassigen Schulen behandelt werden; die Ausdehnung des Stoffes hängt natürlich von der Schule und dem Schülerjahrgange ab. Selbst die einklassige Schule könnte unter günstigen Verhältnissen und wenn sie von der als Anschauungslehre betriebenen Raumformenlehre gehörig unterstützt wird, die einfachsten Quadrate und ihre Wurzeln mit in den Rechen-, beziehungsweise Raumlehrstoff hineinziehen, da das Abziehen der bei dem Quadrieren zusammengezählten Posten einfach und leicht auszuführen ist.

Die Raumformenlehre bietet die Anschauung. Wir zeichnen eine Seite und über derselben das Quadrat; wir tragen auf der Verlängerung der ersten Seite eine andere kleinere Seite ab und zeichnen auch über dieser das Quadrat. Jetzt wird festgestellt: Erste Seite; zweite Seite; Summe der Seiten; Quadrat über der ersten Seite; Quadrat über der zweiten Seite; Summe der Quadrate über beiden Seiten. Da die Figur zugrunde gelegt wird, werden die Seiten und Quadrate auch benannt werden. Die Kinder stellen auch fest, daß a e (die Summe der Seiten)



um b e größer ist als a b oder a c und um a b größer als b e oder als e f. Wenn nun a c um b e und e f um a b verlängert wird und die Endpunkte h und i verbunden werden, dann ist Figur a h i e ein Quadrat und zwar das Quadrat über der Summe der Seiten. Nach der Einführung von jedem neuen Begriff werden die früher eingeführten Begriffe wiederholt und durch Gegenüberstellung zur vollständigen Klarheit gebracht. Jetzt muß der Gegensatz zwischen der Summe der Quadrate über zwei Seiten und dem Quadrate über der Summe der beiden Seiten durch häufiges Angeben der betreffenden

Größen hervorgehoben werden. Nun wird untersucht, um welchen Streifen **das Quadrat** über der Summe der Seiten größer ist als die Summe der **Quadrate** über den Seiten. Dieser Streifen wird durch Verlängerung **der** Seite b d bis m in 2 Rechtecke geteilt. Jedes Rechteck hat die **Seite** a b als Grundlinie und die Seite b e als Höhe; es besteht also **aus** beiden Seiten. Endergebnis: **Das Quadrat über der Summe zweier Seiten ist um das doppelte Rechteck aus beiden Seiten größer als die Summe der Quadrate über beiden Seiten.** — **Nun** ist die Übertragung auf Zahlen nicht schwer. Setzen wir für die **größere** Seite eine Zehnerzahl und für die kleinere eine Einerzahl ein, z. B. 30 und 6, so ist das Quadrat über a b $= 30^2$, das über b e $= 6^2$ und das doppelte Rechteck aus beiden Seiten gleich $2 . 30 . 6$; demnach ist das Quadrat über der Summe zweier Zahlen um das doppelte Vielfache (Rechteck) aus beiden Zahlen größer als die Summe der Quadrate über beiden Zahlen. 36^2 demnach gleich $900 + 36 + 360 = 1296$. An vielen Aufgaben wird nun das Quadrieren zweistelliger Zahlen geübt und die Zahlen dann auch der Größe nach, wie sie sich meistens ergeben, geordnet, also $900 + 360 + 36 = 1296$. — Man wird diese Posten auch bei dem Vervielfachen erhalten. (Beim Kopfrechnen: $36 . 36 = 30 . 36 + 6 . 36 = 30 . 30 + 30 . 6 + 6 . 30 + 6 . 6 = 30^2 + 2 . 30 . 6 + 6^2$; beim Tafelrechnen: $36 . 36 = 6 . 6 + 6 . 30 + 30 . 6 + 30 . 30 = 30^2 + 2 . 30 . 6 + 6^2$.) Doch möchte ich gerade hier die Veranschaulichung durch die obenstehende Figur nicht missen. Der Begriff Quadrat tritt an ihr deutlicher hervor, und die Praxis wird ja für das Ausziehen der Quadratwurzel zunächst immer quadratische Flächen bieten, deren Seitenlänge gefunden werden soll.

Sind nun die Quadrate einer Reihe von zweistelligen Zahlen gefunden, so bleibt man wohl bei dem zuletzt gefundenen stehen; es sei

$$\begin{array}{r} 3600 \\ 480 \\ 16 \\ \hline 4096 \end{array}$$

Die Kinder stellen unter der Leitung des Lehrers fest, daß in 4096 zunächst das Quadrat der 60 steckt ($70^2 = 4900$ ist zu groß); 60^2 wird von 4096 abgezogen, bleibt 496. In 496 steckt das doppelte Vielfache aus der Zehner- und Einerzahl und das Quadrat der Einerzahl. Uns fehlt die Einerzahl. Da wir aber die Zehnerzahl kennen, so ist uns auch die doppelte Zehnerzahl gegeben. Daß wir aus dem Vielfachen und einem Faktor den andern Faktor durch Teilen finden, ist den Kindern nicht unbekannt. So wird auch hier 496 durch $2 . 60 = 120$ geteilt; es ergibt 4. Das ist die Einerzahl. Das doppelte Vielfache aus Zehner- und Einerzahl ist 480; 480 abgezogen von 496 ergibt 16; 16 ist das Quadrat der Einerzahl. — Somit ist das Abziehen der beim Quadrieren zusammengezählten Posten das Ausziehen der Quadratwurzel. Vielfache Übung an Quadraten von zweistelligen Zahlen, zunächst in unmittelbarem Anschluß

an die durch Quadrieren gefundenen Quadrate, dann in freier Bewegung bei gegebenen Quadraten verleiht den Kindern eine gewisse Fertigkeit. Die Schüler suchen gern, und es macht ihnen Vergnügen, durch die Probe die Richtigkeit des Resultates feststellen zu können.

Auch das Quadrieren dreistelliger Zahlen kann an einem Quadrate veranschaulicht werden. Zu der Seite a e tritt noch die punktierte Seite e n. Das Quadrat über e n ist e n r s; das Quadrat über der Summe von a b + b e + e n = a n ist a q o n; es ist um das doppelte Rechteck aus der Summe zweier Seiten = a e und der dritten Seite = e n größer als die Summe der Quadrate von a e und e n, nämlich als a h i e und e s r n. Es wird hierbei nötig sein, das Quadrat über der Summe von a b und b e als eine Größe aufzufassen. Auch diese durch die Raumformenlehre gebotene Anschauung wird sich leicht auf Zahlen übertragen lassen. Sollen wir eine dreistellige Zahl quadrieren, so suchen wir zunächst das Quadrat der Hunderter- und Zehnerzahl, d. i. das Quadrat der Hunderterzahl, das doppelte Vielfache der Hunderter- und der Zehnerzahl und das Quadrat der Zehnerzahl. Hierzu kommt das doppelte Vielfache aus der Summe der Hunderter- und Zehnerzahl und der Einerzahl und endlich das Quadrat der Einerzahl. Auch hier werden vielfache Übungen im Quadrieren angestellt. Nach erlangter Fertigkeit wird die Umkehrung des Quadrierens, das Quadratwurzelausziehen, direkt angeschlossen. Die Aufgabe laute z. B.: Welche Zahl muß ich mit sich selbst vervielfachen, um das Quadrat 278784 zu erhalten. — Lösung: Wir suchen die Grenzwerte der Quadratzahlen und der Quadratwurzeln. 100^2 ist 10000; 10000 ist viel zu klein; $1000^2 = 1000000$; 1000000 ist zu groß; folglich liegt das Quadrat zwischen 1000 und 1000000 und die Wurzel zwischen 100 und 1000. Welches ist nun die größte Hunderterzahl, deren Quadrat in 278784 enthalten ist? Wir suchen wieder die Grenzwerte. 100^2, 200^2, 300^2, 400^2 und 500^2 sind zu klein, 600^2 aber ist zu groß; folglich liegt das Quadrat zwischen 250000 und 360000 und die Wurzel zwischen 500 und 600. Weiterhin sollen der Kürze wegen nur die Antworten oder Resultate angegeben

$$\begin{array}{r}
278784 \\
250000 \\
\hline
28784 \\
20000 \\
\hline
8784 \\
400 \\
\hline
8384 \\
8320 \\
\hline
64 \\
64 \\
\hline
\end{array}$$

werden. 250000 wird abgezogen. In 28784 ist das doppelte Vielfache aus der Hunderterzahl und der Zehnerzahl enthalten. Die doppelte Hunderterzahl ist 1000. Durch 1000 geteilt ergibt 20; 20 . 1000 oder

20000 wird abgezogen, bleibt 8784. Hiervon wird das Quadrat der **Zehnerzahl** abgezogen = 400, bleibt 8384. In 8384 ist wieder das doppelte **Vielfache** aus der Summe von der Hunderter- und Zehnerzahl und der **Einerzahl** enthalten. Letztere finden wir durch Teilen. 2 . 520 = 1040. 8384 : 1040 = 8. Das doppelte Produkt ist 8320; 8320 abgezogen, bleibt 64; **das** ist das Quadrat der Einerzahl. — Die gefundene Zahl heißt die **Quadratwurzel**. Die schriftliche Form ist nun folgende:

$$\begin{array}{rrl}
 & \sqrt{123904} & = 300 \\
300^2 = & 90000 & \\
\hline
(2 . 300) & 33904 & : 600 = 50 \\
2 . 300 . 50 = & 30000 & \\
\hline
 & 3904 & \\
50^2 = & 2500 & \\
\hline
(2 . 350) & 1404 & : 700 = 2 \\
2 . 350 . 4 = & 1400 & \\
\hline
 & 4 & \\
2^2 = & 4 & \\
\hline
\end{array}
\quad \Bigg\} \; 352$$

Das Zeichen $\sqrt{}$ bedeutet r, d. i. die Abkürzung für Radix, d. h. Wurzel.

Jetzt folgen auch Übungen, bei denen nicht alles so glatt verläuft, z. B.:

$$\begin{array}{rrl}
 & \sqrt{86436} & = 200 \\
200^2 = & 40000 & \\
\hline
(2 . 200) = & 46436 & : 400
\end{array}$$

Der 400. Teil von 46436 ist 110. Bald aber wird das Kind einsehen, daß dieser selbst nicht 100 sein kann; denn erstens bliebe für 100^2 keine genügende Vollzahl übrig und außerdem würde die Wurzel 300 das Quadrat 90000 bedingen, während die gegebene Quadratzahl nur 86436 ist; die Zehnerzahl muß also 90 sein usw.

Es wird nun an der Zeit sein, zu Abkürzungen zu schreiten. Zunächst werden die Quadratseiten a und b genannt; daraus ergibt sich eine wesentliche Abkürzung auch für den mündlichen Ausdruck. Wir sagen nun $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; erforderlichenfalls fassen wir a + b zu einem neuen a zusammen und suchen das neue b. Wenn mit Hilfe von dieser Formel wiederholt Quadratwurzeln gesucht sind, werden wir nun die Lösungsform selbst abkürzen. Die von den Kindern angestellte Untersuchung der Quadrate der einstelligen Zahlen ergibt, daß dieselben ein- und zweistellig sind; die der zweistelligen Zahlen sind drei- und vierstellig; die der dreistelligen Zahlen sind fünf- und sechsstellig. Umgekehrt also wird eine ein- und zweistellige Quadratzahl eine einstellige Wurzel haben usw.; es gehören also die beiden letzten Stellen der Quadratzahl zur Einerstelle

der Quadratwurzel, die beiden nächsten zur Zehnerstelle usw. Aus der Stellenanzahl der Quadratzahl ergibt sich also die Anzahl der Stellen der Quadratwurzel. Wir teilen deshalb eine Quadratzahl von rechts nach links in Gruppen zu je 2 Stellen. Aus einer in dieser Weise geteilten Zahl wird nun die Quadratwurzel in der bisher geübten Form gezogen. Die vielen Nullen aber brauchen nicht geschrieben zu werden; das zeigen wir, indem wir neben eine ausführliche Lösung die kürzere stellen, z. B.:

$\sqrt{123904} = 300$			$\sqrt{12\vert 39\vert 04} = \overset{a\,b}{35}2$	
90000		$a^2 =$	9	$\underset{a\,b}{52}$
$33904 : 600 = 50$		$(2a) =$	33	$: 6$
30000	352	$2ab =$	30	
3904			39	
2500		$b^2 =$	25	
$1404 : 700 = 2$		$(2a) =$	140	$: 70$
1400		$2ab =$	140	
4			4	
4		$b^2 =$	4	

Erklärung: a^2, ist 9, $a = 3$; 9 von 12 abgezogen gibt 3, hierzu die erste Stelle der nächsten Gruppe, $= 33$, das geteilt durch $2a = 6$ usw.

Später wird weiterhin noch dahin gekürzt werden, daß wir stets die ganze Gruppe herunterziehen und alle Stellen der Zahl, mit Ausnahme der letzten, durch $2a$ teilen, dann zunächst b^2 bestimmen, die Einer desselben unter die letzte Stelle schreiben, die Zehner aber zu $2ab$ zählen. Durch das Nebeneinanderstellen der beiden Auflösungsweisen wird die vollständige Übereinstimmung erkannt.

$$
\begin{array}{ll}
\sqrt{12|39|04} = 352 & \\
9 & \\
\hline
339 & : 6 \\
325 & \\
\hline
1404 & : 70 \\
1404 & \\
\hline
\end{array}
$$

Endlich wird auch diese Form durch Anwendung des „östreichischen Subtrahierens" gekürzt. Zum Schluß also heißt es:

$$
\begin{array}{ll}
\sqrt{12|39|04} = 352 & \\
\hline
339 & : 6 \\
\hline
1404 & : 70 \\
\hline
\end{array}
$$

Die Einführung von größeren Quadratzahlen und demzufolge auch größeren Quadratwurzeln ist nun nicht schwer, da stets $a + b$ als neues a

aufgefaßt wird. Ebenso leicht werden die Kinder aus den Dezimalbrüchen **die Wurzel** ziehen. Aus dem Quadrieren der Brüche folgt, daß aus Zähler **und Nenner** der Brüche die Wurzel gezogen werden muß. Bei den **Dezimalbrüchen** ergeben Zehntel stets Hundertstel, Hundertstel stets Zehn**tausendstel** usw. als Quadrat; also nur aus diesen Nennern läßt sich die **Quadratwurzel** bestimmen; es gehören also auch hier stets zwei Stellen **der Quadratzahl** zu einer Stelle der Quadratwurzel. Bei Dezimalzahlen **wird deshalb** die Teilung in Gruppen zu je zwei vom Komma angefangen **und nach** links und rechts ausgeführt.

Im Laufe des Unterrichts wird sich ungesucht ergeben, daß sich nicht **aus allen** Zahlen eine bestimmte Quadratwurzel ausziehen läßt. Es bleiben **bei einer** solchen Zahl Reste, und die Wurzel ist ungenau. Genauer wird **dieselbe**, wenn wir die Wurzel noch in Zehnteln usf. berechnen, d. h. wenn **wir den** Rest in Zehntel, auch in Hundertstel verwandeln und durch 2a **teilen** usw. Ein letztes Beispiel möge das noch erläutern:

$$\sqrt{4|78} = 21{,}8$$

$$\begin{array}{rl} a^2 = & 4 \\ \hline (2a) & 78:4 \\ 2ab+b^2 = & 41 \\ \hline (2a) & 3700:42 \\ 2ab+b^2 = & 3424 \\ \hline & 27600:436 \\ & 26196 \\ \hline & 1404 \end{array}$$

Wenn also unsere bisher bekannte Lösung zu Ende ist, heißt die Wurzel 21, aber 37 bleiben Rest; 21^2 ist nicht 478. Fassen wir jetzt in bisher geübter Weise 21 als a auf und teilen $37 : 2a = 42$, so ergibt sich, daß der 42. Teil von 37 kein Einer von 370 Zehnteln, aber wohl 8 Zehntel (9 Zehntel ist zu groß) ist. 8 Zehntel im Quadrat aber ist 64 Hundertstel; es folgt also daraus, daß wir auch hier 2 Stellen (Nullen) herunterziehen und alle Stellen mit Ausnahme der letzten durch 2a teilen. Wenn die Wurzel 21,8 wäre, so betrüge der Rest nur 2,76. Ziehen wir wieder 2 Nullen herunter oder hängen wir wieder 2 Nullen an und teilen nochmals durch $2a = 436$, so erhalten wir 6, das sind 6 Hundertstel. Nach dem Abziehen von b^2 und $2ab = 26196$ bleiben 1404; der Rest beträgt jetzt nur noch 0,1404. Durch weiteres Teilen durch 2a wird dieser Rest immer kleiner, zuletzt unwesentlich werden. Letztere Wurzeln heißen *irrationale* im Gegensatz zu den früheren, die *rationale* genannt werden.

Angewandte Aufgaben zum Quadratwurzelausziehen.

(Vergl. auch Schroeter, Tafelrechnen, Ausgabe A, 5. Heft, Gruppe 32 und 33 und 6. Heft, Gruppe 33).

1. Ein Bauplatz von 7,50 a soll die Form eines Quadrates erhalten. Wie lang muß eine Seite dieses Quadrates sein?

2. Bei der Anlage einer Baumschule pflanze ich in jede Reihe ebensoviel Bäumchen, als Reihen auf dem Gartenstück gepflanzt werden. Wieviel Bäumchen müssen auf jeder Reihe stehen, wenn überhaupt 784 Bäumchen gepflanzt wurden?
3. Wie groß ist die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten 3,6 und 1,5 m lang sind?
4. Die Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks ist 27 cm lang; ein Schenkel dieses Dreiecks mißt 30 cm. Wie groß ist die Höhe dieses Dreiecks?
5. In einem Kreise, dessen Radius 16 cm beträgt, ziehe ich eine Sehne, die 4 cm weit vom Mittelpunkt, entfernt ist. Wie lang ist diese Sehne?
6. Der Durchmesser der Grundfläche eines geraden Kegels beträgt 0,25 m; die Entfernung der Spitze des Kegels von einem Punkte des Umfangs der Grundfläche beträgt 0,46 m. Wie hoch ist der Kegel?
7. Ein Kreis soll einen Flächeninhalt von 2,75 qm erhalten. Wie groß muß der Halbmesser dieses Kreises genommen werden?
8. Wie lang muß eine Leiter sein, welche ein Bodenfenster erreichen soll, das 6,75 m von der Erde entfernt ist, wenn die Entfernung zwischen Haus und Leiter 1,5 m betragen soll?
9. In einer stetigen Proportion heißen die äußeren Glieder 3,5 und 224; wie heißt eins der inneren Glieder?

B. Das Kubieren und die Kubikwurzel.

Als Veranschaulichungsmittel dient ein Würfel, dessen Kante aus a und b besteht. Dadurch, daß stets die Ausdehnungen a und b durch parallele Schnitte zu den Seitenflächen getrennt werden, ergeben sich nacheinander 8 Körper, nämlich ein Kubus von a Kantenlänge $= a^3$, drei Scheiben, deren Grundfläche a^2 und deren Höhe b ist $= 3a^2b$, drei Säulen, deren Grundfläche b^2 und deren Höhe a ist $= 3b^2a$ und endlich ein Würfel mit b als Kantenlänge $= b^3$. Diese so gewonnene Formel $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3b^2a + b^3$ wird nun zum Kubieren von zweistelligen Zahlen benutzt.

Durch diese eigenartige Veranschaulichung wird das Kubieren der Zahlen begründet; es ist das nur dadurch möglich, daß die Schüler bei der Auffassung des Quadrierens die hierzu notwendige Vorbereitung erhalten haben. So manche bei dem Quadrieren gewonnene Kenntnis kann hier benutzt werden. Ebenso wird nun bei dem Ausziehen der Kubikwurzel das bei dem Quadratwurzelausziehen Gelernte in freier Weise verwendet. Wir können uns deshalb hier kürzer fassen. Dem Kubieren, d. h. dem Zusammenzählen der einzelnen Posten, wird das Abziehen derselben, also das Ausziehen der Kubikwurzel, gegenübergestellt. Wenn dieses Verfahren durch viele ausgeführte Lösungen befestigt ist, wird das Kubieren dreistelliger Zahlen und das Ausziehen der betreffenden Kubikwurzeln angeschlossen. Eine Vergleichung

der Kuben der verschiedenstelligen Zahlen ergibt dann die Einteilung der Kubikzahl von rechts nach links in Gruppen zu je drei Stellen. Dem ausführlichen Verfahren wird das abgekürzte gegenübergestellt und letzteres dann eingeübt, auch in der bei den Quadratwurzeln vorgeführten Form auf Dezimalbrüche und irrationale Wurzeln angewendet. Zuletzt wird durch Anwendung des östreichischen Subtrahierens die kürzeste Form gegeben.

Drei gelöste Aufgaben, die erste in ausführlicher, die zweite in abgekürzter und die dritte in der kürzesten Form, werden das eben Gesagte bestätigen.

1. Ausführliche Lösung:

	$\sqrt[3]{148035889}$	= 500	529
$500^3 =$	125000000		
$(3 \,.\, 500^2)$	23035889	: 750000 = 20	
$3 \,.\, 500^2 \,.\, 20 =$	15000000		
	8035889		
$3 \,.\, 20^2 \,.\, 500 =$	600000		
	7435889		
$20^3 =$	8000		
$(3 \,.\, 520^2)$	7427889	: 811200 = 9	
$3 \,.\, 520^2 \,.\, 9$	7300800		
	127089		
$3 \,.\, 520 \,.\, 9^2 =$	126360		
	729		
$9^3 =$	729		

1. Ausführliche Lösung: Durch vergleichende Untersuchung, d. i. durch Feststellung der Grenzwerte, findet man, daß die größte Zahl der Kubikwurzel eine Hunderterzahl sein muß; denn $100^3 = 1000000$, während 1000^3 schon 1000000000 beträgt und daß diese Hunderterzahl = 500 ist, da $600^3 = 216000000$ beträgt. Die Zehnerzahl wird gefunden, wenn der Rest, in dem $3 \,.\, a^2 \,.\, b$ enthalten ist, durch den einen Faktor $(3a^2) = 3 \,.\, 500^2$, geteilt wird. Hierauf wird $3 \,.\, 500^2 \,.\, 20$, dann $3 \,.\, 500 \,.\, 20^2$ und endlich 20^3 abgezogen. Jetzt wird $500 + 20 = 520$ in der von dem Quadratwurzelausziehen bekannten Weise als das neue a angesehen, dessen Kubus gleich den berechneten und schon abgezogenen 4 Posten ist. Der Rest wird wieder als das Vielfache aus $3a^2 \,.\, b$ aufgefaßt und durch $3 \,.\, a^2 = 3 \,.\, 520^2$ geteilt. Mit Hilfe des neuen b wird dann der Reihe nach abgezogen $3 \,.\, 520^2 \,.\, 9$, $3 \,.\, 520 \,.\, 9^2$ und 9^3. Die Kubikwurzel heißt also 529. — Bei der Bestimmung von 20 konnte zunächst 30 als b genommen werden; doch wird sich bald herausstellen, daß dann $3a \,.\, b^2$ und b^3 nicht abgezogen werden kann.

2. Abgekürzte Lösung.

$$\sqrt[3]{148|035|889} = 529$$

$a^3 =$ 125

$(3 . a^2) =$ 230 : 75

$3 a^2 . b =$ 150

803

$3 a b^2 =$ 60

7435

$b^3 =$ 8

$(3 a^2) =$ 74278 : 8112

$3 a^2 b =$ 73008

12708

$3 a b^2 =$ 12636

729

$b^3 =$ 729

2. Abgekürzte Lösung: Die Zahl wird in Gruppen zu je 3 Stellen von rechts nach links geteilt und in der schon oben angedeuteten Weise verfahren. Wir ersparen das Berechnen und Schreiben der Nullen.

3. Kürzeste Lösung.

$$\sqrt[3]{148|035|889} = 529$$

23 035 : 75

— { 150, 60, 8 }

7 427 889 : 8112

— { 73008, 12636, 729 }

3. Kürzeste Lösung: Die letzte Lösungsform unterscheidet sich von der 2. Lösungsform nur dadurch, daß wir die ganze dreistellige Gruppe herunterziehen, die Zahl mit Ausnahme der letzten 2 Stellen durch $3 a^2$ teilen und dann die drei Posten $3 a^2 b$, $3 a b^2$ und b^3 so darunter setzen, daß $3 a^2 b$ unter die geteilte Zahl und jeder nächste Posten eine Stelle weiter nach rechts gesetzt wird. Unter Benutzung des östreichischen Subtrahierens werden dann die drei Posten mit einem Male abgezogen.

Auch irrationale Wurzeln können berechnet werden. Die Schwierigkeiten liegen hauptsächlich bei den Quadratwurzeln; dort werden neue Vorstellungen gegeben und befestigt; auf das Kubikwurzelausziehen können diese dann leicht übertragen und angewendet werden. Aus dem umfangreichen Stoffe wird für jede Schule das Notwendige ausgewählt.

Angewandte Aufgaben zum Kubikwurzelausziehen.

(**Vergl.** auch Schroeter, Tafelrechnen, Ausg. A, 6. Heft, Gruppe 34 u. 35.)

1. **Ein** Würfel soll 884 736 ccm groß sein. Wie lang muß eine Kante dieses Würfels sein?
2. **Ein** Würfel soll den Inhalt einer rechtwinkligen, geraden, vierseitigen Säule haben. Wie lang muß die Kante dieses Würfels sein, wenn die Säule 5 m lang, 3 m breit und $10\frac{1}{2}$ m hoch ist?
3. **Wie** groß ist der Radius einer Kugel, deren Inhalt 1,5 cbm ist?
4. **An** einer Ecke soll eine Nische angebracht werden, die die Form einer Viertelkugel haben und einen Raum von $1\frac{1}{8}$ cbm einnehmen soll. Wie lang muß der Radius dieser Nische sein?

52. Über Versicherungen.

Zu den im Rechenunterricht der Volksschule notwendig zu behandelnden Sachgebieten gehört jetzt auch das Versicherungswesen. Obwohl die Versicherungen im heutigen wirtschaftlichen Leben eine hervorragende Stellung einnehmen, ist doch immer noch nicht die Bedeutung des Versicherungswesens in allen Kreisen genügend erkannt. Auch hier kann die Volksschule segensreich wirken, wenn sie durch Belehrungen und durch rechnerische Verwertung der Verhältnisse das Verständnis des Versicherungswesens und das Interesse am Versicherungswesen in weiten Kreisen erweckt.

Es gibt eine Reihe von Ereignissen, die viele bedrohen, aber in Wirklichkeit nur wenige treffen. Diese wenigen würden durch die Folgen solcher Ereignisse schwer geschädigt, vielleicht wirtschaftlich ruiniert werden. Wenn nun viele der Bedrohten imstande und geneigt sind, einen verhältnismäßig kleinen Betrag sicher zu opfern und sich dadurch vor den Folgen eines nicht sichern, aber verhältnismäßig großen Schadens zu schützen, so entsteht eine Versicherung. Durch die Versicherungen werden also die nachteiligen Folgen von einzelnen zufälligen Ereignissen für das Vermögen einer Person dadurch beseitigt oder vermindert, daß dieselben auf eine Reihe von Personen verteilt werden, denen die gleiche Gefahr droht.

Die Versicherung kann vom Staate angeordnet sein; sie kann freiwillig auf Gegenseitigkeit abgeschlossen werden; sie kann endlich auch ein Erwerbsunternehmen bilden.

Die vom Staate angeordneten Versicherungen sind **Zwangsversicherungen**; sie stehen direkt unter staatlicher Aufsicht und beziehen meistens staatliche Beihilfen. Die in Gruppe 42 ausführlich behandelten Kranken-, Unfall- und Invalidenversicherungen sind solche vom Staate angeordneten Versicherungen.

Wenn sich viele oder alle Personen, denen eine gleiche Gefahr droht, zu einer Versicherung gegen diese Gefahr zusammentun, so daß ein zufällig den einzelnen treffender Schaden von der Gesamtheit getragen wird, so entsteht eine auf **Gegenseitigkeit** beruhende Versicherungsgesellschaft. So haben z. B. die Pastoren und Lehrer in vielen preußischen Provinzen eine auf Gegenseitigkeit beruhende Feuerversicherungsgesellschaft

gebildet. Bei einer auf Gegenseitigkeit beruhenden Versicherung werden entweder nur Beiträge bei eingetretenem Schaden erhoben, oder die Mitglieder zahlen feste Beiträge (Prämien). Im letzteren Falle werden die eintretenden Überschüsse wieder unter die Mitglieder verteilt; doch sind auch Nacherhebungen nicht unbedingt ausgeschlossen. Um diese Nacherhebungen unmöglich oder möglichst selten zu machen, wird aus einem Teil der Beiträge eine Reserve gebildet, über die bei außergewöhnlichen Ereignissen verfügt werden kann. Zur richtigen Bemessung der Beiträge gehört eine auf statistischen Ermittelungen gegründete Kenntnis von der Wahrscheinlichkeit des Eintritts des Ereignisses, gegen das die Versicherung schützen soll.

Versicherungen, die ein Erwerbsunternehmen bilden, liegen meistens in den Händen von Aktiengesellschaften. Diese suchen in einem weiten Kreise durch bezahlte Agenten diejenigen auf, die zur gleichen „Gefahrengemeinschaft" gehören und veranlassen sie, sich gegen etwa eintretenden Schaden zu versichern. Dadurch, daß von vielen etwas erhöhte Beiträge gezahlt werden, wird sich ein Gewinn für die Unternehmer ergeben; doch ist es nicht ausgeschlossen, daß bei außergewöhnlicher Häufigkeit der Schäden die Prämien zur Deckung nicht ausreichen, so daß die Unternehmer von dem eingezahlten Aktienkapitale zuschießen müssen. Manche Aktiengesellschaften geben den Versicherten einen Teil des Überschusses als Dividende zurück; man nennt diese Gesellschaften gemischte Versicherungsanstalten.

Eine Versicherungsanstalt kann die von ihr übernommene Pflicht dadurch weiter verteilen, daß sie sich ihrerseits bei anderen Gesellschaften versichert; man nennt das Rückversicherung. Ist ein einzelnes Unternehmen so umfassend, daß die zu zahlenden Prämien in jedem Falle größer sein würden als der nach der Wahrscheinlichkeit möglichenfalls eintretende Schaden, so unterläßt der Unternehmer jede Versicherung. Es ist dies die Selbstversicherung. So versichert der preußische Staat seine zahlreichen Gebäude nicht gegen Feuersgefahr.

Man unterscheidet Sach- und Personenversicherungen. Zu den Sachversicherungen gehören: 1. die Feuerversicherung (gewiß die älteste der Versicherungsarten); 2. die Hagelversicherung; 3. die Viehversicherung; 4. die Transportversicherung; 5. die Versicherung gegen Einbruchsdiebstahl; 6. die Kapitalversicherung (einmalige Auszahlung); 7. die Rentenversicherung (periodische Auszahlung); 8. die Aussteuer- bzw. Militärversicherung u. a. m. Zu den Personenversicherungen rechnet man 1. die Lebensversicherung; 2. die Witwen- und Waisengeldversicherung; 3. die Kranken-, Unfall-, Invaliditäts- und Altersversicherung; 4. die Haftpflichtversicherung u. a. m.

Der Lehrer gibt die vorstehenden Belehrungen nicht mit einem Male, sondern nach und nach und unterbrochen durch praktische Rechenaufgaben. Bei den Rechenaufgaben wird zuerst die zu zahlende Prämie berücksichtigt werden, und zwar 1. die Prämie an und für sich, 2. die Summe der Prämien in Beziehung zur Versicherungssumme und 3. die Prämie in Beziehung zur Dividende. Im ersten Falle sind die Aufgaben meistens einfache Multiplikationsaufgaben und bieten weder ...h technische Schwierigkeiten; Aufgabengruppen aus diesen ...rden schon bei der Multiplikation benannter Zahlen heran-

gezogen. Im zweiten Falle soll die Summe der gezahlten Beiträge mit der u. U. einzunehmenden Versicherungssumme verglichen werden. Diese Aufgaben bieten etwas größere Schwierigkeiten, da mehrere Rechnungsarten zur Verwendung kommen. In vielen Fällen müssen den Berechnungen Tabellen zugrunde gelegt werden. Die Schülerhefte bieten jetzt häufig Proben von solchen Tabellen, und an ihnen soll die Selbständigkeit nicht nur in der Berechnung, sondern auch in der Beurteilung der Aufgaben erzielt werden. Überall wird man von einfachen zu zusammengesetzten Aufgaben fortschreiten. Der 3. Fall bietet besondere Schwierigkeiten, da die Tabellen die zu gewährende Dividende nicht berücksichtigen können. Es ist also Aufgabe des Lehrers, richtige Verhältnisse zu erkunden und den von den Kindern auszuführenden Rechenarbeiten zugrunde zu legen. Häufig bietet sich ungesucht Gelegenheit, bisher unbekannte und doch naheliegende Gebiete heranzuziehen und dadurch den geistigen Horizont der Kinder zu erweitern. Die Begriffe „Mortalitätstabellen", „Gefahrenklassen", „Prämienreserven" u. a. m. dürften kaum bei einem anderen Unterrichtsfache erwähnt werden.

Es ist nun nicht nötig, daß sämtliche im Bereich des Anschauungskreises der Kinder liegende Versicherungen herangezogen werden. Das an einigen charakteristischen Versicherungen Gelernte läßt sich leicht auf die verwandten Gebiete übertragen. Neben den ihrer sozialen Bedeutung wegen unbedingt notwendigen staatlichen Arbeiterversicherungen genügt vielleicht in den Städten die Lebens-, die Kapital- und die Feuerversicherung; auf dem Lande würde außerdem Hagel- und Viehversicherung heranzuziehen sein. Übertragungen auf andere Versicherungsarten dürfen nicht vergessen werden und geben ungesucht einen prächtigen Übungsstoff.

Es darf vielleicht unter den jetzt bestehenden Verhältnissen nicht unerwähnt bleiben, daß der Lehrer nicht etwa als Agent dieser oder jener Versicherung parteiisch urteilt und dadurch die Schüler und deren Eltern einseitig beeinflußt. Ich weise zwar in einem Lehrerseminar die Zöglinge auf den Vorteil der Lebensversicherung des Preußischen Beamtenvereins in Hannover hin; denn dort habe ich lauter spätere Beamte vor mir; in einer Volksschule aber, in der Kinder der verschiedensten Berufszweige zusammensitzen, würde ich bei einem ähnlichen Hinweise stets wenigstens drei andere gute und in der Gegend vielleicht bekannte Gesellschaften gleichzeitig erwähnen.

Gruppierung der Aufgaben (Schroeter, Tafelrechnen, Ausg. A, 6. Heft, Gruppe 37 bis 40; Ausg. B, 3. Heft, Gruppe 79 und 80).

1. Wie groß ist die jährliche Prämie bei jährlicher und wie groß bei vierteljährlicher Prämienzahlung, wenn jemand sich nach Tarif I im Alter von a) 29 Jahren, b) 32 Jahren, c) 36 Jahren, d) 40 Jahren mit 6000 ℳ Kapital versichert? (Versicherung auf den Todesfall.)
2. Wieviel Prämie hat jemand jährlich bei jährlicher und wieviel bei vierteljährlicher Prämienzahlung zu zahlen, wenn er ein Kapital von 7000 ℳ nach Tarif III so versichert, daß diese 7000 ℳ bei

dem Tode bzw. bei einem Alter von 60 Jahren ausgezahlt werden und das Eintrittsalter beträgt: a) 24 Jahr; b) 30 J.; c) 34 J.; d) 36 J.? (Versicherung auf den Erlebensfall.)

3. Wie groß wird bei jährlicher Prämienzahlung die jährliche Prämie a) im 20., b) im 25., c) im 30. Versicherungsjahre sein, wenn jemand im Alter von 30 Jahren 4000 ℳ nach Tarif I versichert hat und wenn $4\frac{1}{2}$ % der Prämienreserve als Dividende gewährt wird? (Berücksichtigung der Dividende nach gegebener Tabelle.)
4. Ein Vater will für seinen ein Jahr alten Sohn für dessen Militärdienstzeit ein Kapital von 1500 ℳ versichern. Wieviel muß er jährlich einzahlen bei jährlicher und wieviel bei vierteljährlicher Zahlung, wenn das Kapital nach 18 Jahren gezahlt werden soll? (Kapitalversicherung.)
5. Wieviel jährliche Prämie ist für 500 ℳ Begräbnisgeld bei jährlicher Prämienzahlung zu bezahlen, wenn das Eintrittsalter beträgt: a) 25 Jahr; b) 32 Jahr; c) 44 Jahr; d) 50 Jahr? (Begräbnisgeldversicherung.)
6. Ein Ingenieur wird zur 2. Gefahrklasse gerechnet. Derselbe versichert bei der Unfallversicherung 30000 ℳ für den Todesfall, 50000 ℳ für bleibende Invalidität und 8 ℳ Tagesentschädigung bei vorübergehender Erwerbsunfähigkeit. Wie groß wird die jährliche Prämie sein? (Unfallversicherung.)
7. Jemand besitzt 2 Häuser und versichert das 1. mit 16500 ℳ und das 2. mit 14750 ℳ gegen Feuersgefahr. Wieviel beträgt die jährliche Prämie im 1. Jahre und wieviel vom 2. Jahre ab, wenn die Prämie für das 1. Haus $1\frac{3}{4}$ ‰ und die für das 2. Haus $2\frac{1}{4}$ ‰ beträgt und vom 2. Jahre ab 75 % Dividende gewährt werden? (Feuerversicherung.)

Bemerkung: Auszüge aus den Tarifen und Tabellen sind in den Rechenheften zu suchen.

53. Aus dem Haushalt der Familie, der Gemeinde und des Staates.

Nicht Haushaltungsaufgaben, wie Einkaufsaufgaben von Kaffee, Butter und Heringen sollen hier gerechnet werden (diese finden an anderen Stellen ihre passende Verwertung), sondern es soll eine Verteilung der Einnahmen zur Bestreitung der verschiedenen notwendigen Bedürfnisse erfolgen, so daß die spätere Aufstellung des so notwendigen Ausgabeetats vorbereitet wird. Was nun in der Familie im Kleinen auftritt, findet sich im Leben der Gemeinde und des Staates im Großen. Das Rechnen soll mit dazu beitragen, daß gewisse Einrichtungen der Gemeinde und des Staates, wie Aufstellung eines Etats, verstanden werden.

Die Rechenaufgaben findet der Lehrer in den Rechenheften; selbstverständlich wird er hier und da sichten oder ergänzen müssen, zunächst was die Form, mehr aber noch was den Inhalt derselben angeht. In Verbindung mit dem Rechnen werden auch hier soziale Belehrungen gegeben werden müssen, die die Berechtigung des Sachgebietes bedingen. Es versteht sich von selbst, daß auch hier auf andere Unterrichtsfächer zurückgegangen werden

muß, so daß wir bei diesem wie bei den meisten anderen Sachgebieten die Berechtigung der Konzentrationsidee erkennen.

Das Einkommen des Familienvaters soll in normalen Fällen für den Unterhalt der Familie ausreichen. Die Aufwendungen in der Einzelwirtschaft hängen nun nicht allein von der Höhe des Einkommens und von der Zahl der Familienglieder ab, sondern sie werden wesentlich mit beeinflußt durch Sitten und Gewohnheiten, durch Wohnort, Bildungsgrad und Tradition, wohl auch durch Vorurteil. Trotzdem zeigt sich bei verschiedenen Familien, besonders bei der unbemittelten Bevölkerungsklasse, bei ähnlichen allgemeinen Verhältnissen und annähernd gleicher Zusammensetzung eine große Übereinstimmung ihrer Haushaltungskosten hinsichtlich der prozentmäßigen Verteilung der Ausgaben auf Nahrung, Kleidung, Wohnung, Heizung und Beleuchtung. Im allgemeinen hat sich der Satz bestätigt, daß eine Familie durchschnittlich um so mehr Prozent ihrer Gesamtausgabe auf Nahrung verwendet, je ärmer sie ist. Genaue Untersuchungen haben ergeben, daß für die notwendigsten Lebensbedürfnisse in Prozenten des Einkommens ausgegeben werden bei einem Einkommen von:

	für Nahrung,	Kleidung,	Wohnung,	Heizung
800 ℳ	67,37	13,16	8,33	5,51
1200 „	62,42	14,03	9,04	5,41
2500 „	51,94	14,29	8,35	3,47

Bei weiterer Steigerung des Einkommens vermindert sich die relative Ausgabe für Nahrung, so daß die Nahrungsausgaben bei 3000 ℳ Einkommen 40%, bei 4500 ℳ Einkommen 34% und bei 15000 ℳ Einkommen nur 22% betragen.

Der Lehrer mag selbst entscheiden, wieviel von den vorstehenden Bemerkungen er seinen Kindern geben kann. Versäumen aber darf er nicht, im Anschluß an die wenigen Zahlen recht viele praktische Aufgaben der mannigfaltigsten Form zu geben. Er beginne mit der einfachen Zusammenzählung der Prozente, die bei den verschiedenen Einnahmen auf die obenstehenden vier wichtigsten Bedürfnisse entfallen; dann berechne er bei diesen und anderen ähnlichen Summen die Beträge für die einzelnen Angaben; bis er endlich zur Aufstellung einfacher Haushaltungsetats übergeht.

Die notwendigen Belehrungen über Gemeinde und Staat werden sich, wie oben schon gesagt worden ist, aus anderen Unterrichtsfächern entnehmen und hier wiederholen lassen. So können z. B. je nach Bedarf folgende Fragen beantwortet und folgende Punkte berührt werden: Was versteht man unter einer Gemeinde? Die Selbstverwaltung der Gemeinde unter staatlicher Oberaufsicht! Ortsstatut! Pflichten und Lasten der Gemeindemitglieder! Unterstützungswohnsitz u. a. m. Rechnerisch werden aber besonders die Einnahmen und Ausgaben in ihren Summen und Differenzen und in ihren Ersparnissen und Überschreitungen herangezogen werden. Ebenso lassen sich recht treffliche Aufgaben bilden aus den Einwohnerzahlen, der Zunahme der Bevölkerung, der Zahl in einzelnen Berufszweigen usw.

Auch durch die Beziehung der Einwohnerzahlen zu der Einnahme oder der Ausgabe können Aufgaben gebildet werden.

Die Sachgebiete selbst lassen sich an den verschiedensten Stellen des Rechenunterrichts verwerten. Die großen Zahlen weisen auf die Verwertung im vierten Schuljahre hin; auch bei den Prozentbestimmungen lassen sich verschiedene Beziehungen verwerten; endlich ist es ein passender Wiederholungsstoff sowohl für das Rechnen, als auch für die in anderen Unterrichtsfächern gebotenen sachlichen Belehrungen.

Gruppierung der Aufgaben (Schroeter, Tafelrechnen, Ausgabe A, 6. Heft, Gruppe 41 und 42).

1. Ein Beamter hat ein Einkommen von 1900 ℳ; wieviel wird er für Nahrung in seinen Wirtschaftsetat einstellen dürfen, wenn er die 2. und wieviel, wenn er die 3. der obenstehenden Reihen zugrunde legt?
2. Ein Beamter hat ein Einkommen von 1600 ℳ. Er rechnet auf Nahrung 55%, auf Kleidung $16\frac{2}{3}$% und auf Heizung 5% seines Einkommens. Wieviel muß er von dem Vierteljahrsgehalte für diese drei Bedürfnisse zurücklegen? (1. und 2. sind Aufgaben, die zur Etatsaufstellung anleiten sollen.)
3. Wieviel Einnahme erzielt die Stadt durch einen Zuschlag von $133\frac{1}{3}$% zur Staatseinkommensteuer, wenn die veranlagte Summe der Staatseinkommensteuer 66000 ℳ beträgt? (Aus dem Haushalt der Gemeinde.)

54. Über Nährstoffe, Nahrungsmittel, Nahrung und Genußmittel.

Zu den Sachgebieten, die im Anschluß an die Prozentrechnung in der Volksschule nicht nur behandelt werden können, sondern behandelt werden müssen, gehört das Gebiet der Nährstoffe, Nahrungsmittel usw. Es ist das ein wichtiges, noch lange nicht genug gewürdigtes Gebiet, und wenn unser Rechenunterricht in der Volksschule nur ein wenig dazu beitragen kann, daß das bisher mehr der Wissenschaft zufallende Gebiet in volkstümlicher Gestaltung in weiteren Kreisen unseres Volkes mit Interesse verfolgt und verstanden wird, so ist der Gewinn ein reichhaltiger.

Die Rechenarbeit fällt vorwiegend in das Gebiet der Prozentrechnung, also in den Stoff des 7. Schuljahres. Wenn wir aber trotzdem diesen Stoff dem 8. Schuljahr zugewiesen haben, so liegt dies daran, daß zur wünschenswerten Würdigung dieses spröden Stoffes ein möglichst gereifter Verstand und ein tieferes Eindringen in die im letzten Schuljahre zu behandelnden naturwissenschaftlichen Gebiete gehört. Das Kind soll verstehen, was es rechnet; daher mag der Lehrer vor der Einführung und während der Behandlung des Sachgebietes die nachfolgenden Auseinandersetzungen dem Kinde in geeigneter Weise übermitteln. Das wird um so weniger zeitraubend sein, je mehr der naturwissenschaftliche Unterricht vorgearbeitet hat; je mehr also die im Rechenunterricht zu gebende Einführung der Sachgebiete Wiederholung sein kann.

Unser Körper braucht zum Ersatz verbrauchter Bestandteile gewisse Stoffe, ohne die er nicht bestehen kann, deren Zuführung also unbedingt notwendig ist. Diese Stoffe nennt man Nährstoffe. So sind z. B. Wasser, Eiweiß, Kohlenhydrate u. a. Nährstoffe. Wir genießen die Nährstoffe nur selten in reinem Zustande, sondern in verschiedenen Zusammensetzungen. Die Stoffe, die aus Nährstoffen zusammengesetzt sind, heißen Nahrungsmittel. Keines der Nahrungsmittel ist allein geeignet, den Menschen auf die Dauer zu ernähren; der Mensch gebraucht vielmehr ein Gemisch der verschiedensten Nahrungsmittel zur völligen Ernährung; diese Zusammensetzung nennt man Nahrung. Den Nahrungsmitteln stehen die Genußmittel gegenüber. Genußmittel sind Stoffe, die nicht absolut notwendig sind, um die Lebenstätigkeit zu erhalten, die aber einen wohltuenden und behaglichen (nicht immer nützlichen) Einfluß auf die Nerven ausüben. So gehören Kaffee wegen seines Koffeins, Tabak wegen des Nikotins, Bier und Wein wegen des Alkohols zu den Genußmitteln. Die wichtigsten Nährstoffe sind außer den obengenannten noch Fette, stickstofffreie Extraktivstoffe und Salze. Die Zusammenstellung der verschiedenen Nährstoffe eines Nahrungsmittels ergibt den Nahrungswert des Nahrungsmittels. Das Maß des Nahrungswertes der Nahrungsmittel sind Nährwerteinheiten. Es sind Tabellen aufgestellt worden, in denen wir die Nährwerteinheiten der verschiedenen Nahrungsmittel auf 1 kg und daneben den Durchschnittspreis dieses Kilogramms angegeben finden. Lehrhaft und interessant sind nun die Vergleiche zwischen der Anzahl der Nährwerteinheiten und dem Preise der Nahrungsmittel. So hat 1 kg Spargel 120 Nährwerteinheiten und kostet 150 Pfennig, während 1 kg Erbsen 1700 Nährwerteinheiten hat und nur 30 Pfennig kostet. — Ein geschickter Lehrer wird an der Hand seines Rechenbuches die scheinbar toten Zahlen beleben und durch die hierin enthaltene Belehrung einen dauernden Einfluß auf die Kinder ausüben. Die verschiedensten Rechnungsarten können hierbei herangezogen werden und durch jede kann das erstrebenswerte Ziel erreicht werden. Jetzt verwende ich die allgemeine Verhältnisbestimmung, dann die praktischere Gleichung, dann wieder die Prozentbestimmung; jetzt lasse ich durch einfachen Regeldetrischluß die auf eine bestimmte Summe entfallende Anzahl von Nährwerteinheiten der verschiedensten Nahrungsmittel bestimmen, nachher halte ich die Kinder an, diese Ergebnisse zu vergleichen usw.

Daß keins der Nahrungsmittel für sich allein geeignet ist, den Menschen auf die Dauer zu ernähren, läßt sich ebenfalls rechnerisch verwerten. Genaue Untersuchungen haben nämlich ergeben, daß zu der normalen Nahrung eines gesunden Arbeitsmannes täglich gehören 226 g Eiweiß, 54 g Fett und 500 g Kohlenhydrate, und daß eine Arbeitsfrau $\frac{3}{4}$ bis $\frac{4}{5}$ des Nährstoffbedürfnisses eines Mannes hat. Ist nun der Nährstoffgehalt eines Nahrungsmittels bekannt, so läßt sich feststellen, wieviel von diesem Nahrungsmittel täglich genossen werden müßte, so daß rechnerisch bewiesen würde, was oben gesagt ist, nämlich daß keins der Nahrungsmittel für sich allein geeignet ist, den Menschen zu ernähren.

Gruppierung der Aufgaben (Schroeter, Tafelrechnen, Ausgabe A, 6. Heft, Gruppe 44).

1. Wie verhält sich der Nahrungswert der Kartoffeln zu dem Nahrungswert: a) des Weizenmehls; b) der Erbsen; c) des Weißkrautes? (Vergleichung des Nahrungswertes der Nahrungsmittel nach den Tabellen.)
2. Gib an, wieviel Teile Nährwert wir für 1 ℳ erhalten: a) von den Erbsen; b) vom Weißkraut; c) vom Spargel! (Berechnung des Preises der Nahrungsmittel auf Grund von Tabellen.)
3. Wenn jemand täglich 0,125 kg Rindfleisch, 0,500 kg Weißbrot, 0,750 kg Kartoffeln ißt, wieviel g Eiweiß, Fett und Stärkemehl hat er dann aufgenommen? (Nahrungsmittel und Nahrung.)

55. Über „Algebraische Aufgaben“.

Hentschel sagt über den Wert der algebraischen Aufgaben für unsere Volksschulen: „Sie sind erstens ganz vorzüglich geeignet, durch Übung den formalen Zweck des Rechenunterrichts zu fördern, und zweitens ziehen sie durch das Rätselhafte, was ihnen mehr oder weniger eigen ist, die Kinder in hohem Grade an und werden so zur besonderen Würze, die den Magen nicht schwächt, sondern stärkt. Alle Pädagogen sind hierin einverstanden. Wir legen also recht oft gegen das Ende der Rechenstunde den Kindern einige solche Aufgaben vor.“

Was für Aufgaben sind algebraische Aufgaben? — Ausnahmsweise soll hier diesmal die Definition an die Spitze gestellt werden: Algebraische Aufgaben sind Aufgaben, in denen mit unbekannten Zahlen Operationen vorgenommen werden, aus deren Ergebnis diese Zahlen gefunden werden sollen. Ein Beispiel der einfachsten Art mag diese Erklärung rechtfertigen. Die Aufgabe, wie groß ist der fünfte Teil von 35, wird umgeändert in die Aufgabe: Wenn ich eine Zahl mit 5 vervielfache, so erhalte ich 35. In der ersten Aufgabe wird auch eine Zahl gesucht, nämlich das Ergebnis der in der Aufgabe verlangten Vervielfachung. Das ist nichts Neues; denn bei jeder Aufgabe ist zunächst das Ergebnis unbekannt, und die verlangte Operation kann an den in der Aufgabe gegebenen Zahlengrößen ausgeführt werden. Anders ist es bei der 2. Aufgabe. Hier ist die Operationszahl und das Ergebnis der genannten Operation bekannt; die Operation (das Vervielfachen) soll an einer unbekannten Zahl ausgeführt werden. Das ist das Wesen der algebraischen Aufgabe. In der unbekannten Zahl, welche hier vervielfacht werden soll, liegt das Rätselhafte, was die Kinder in hohem Grade anzieht. Da aber diese unbekannte Zahl doch nicht wirklich vervielfacht werden kann, das Vervielfachen auch deshalb nicht zum Ziele führen würde, da das Ergebnis schon bekannt ist, so sehen wir uns nach einer anderen Lösungsform um. Die betreffende Zahl war 5 mal genommen worden, als sich 35 ergab. 35 besteht also aus dem Fünffach[illegible]. Ist 35 das Fünffache, so ist die Zahl gleich dem

5. Teil von 35 = 7. In diesem Aufsuchen der Lösungsform und besonders der Operation, die bei der Lösung angewendet werden muß, liegt die formale Bedeutung der algebraischen Aufgaben für unsere Volksschulen. Die algebraischen Aufgaben fordern vom Kinde angestrengtes Denken, nämlich immer neue Überlegungen, sichere Urteile und klare Schlüsse; sie fördern die Selbständigkeit der Schüler im Erfassen, Beurteilen und Lösen auch anderer als algebraischer Aufgaben in hervorragender Weise, hierin liegt ihre Bedeutung für das formale Ziel des Rechenunterrichts; sie unterstützen die Rechenfertigkeit, da jeder Rechenstoff algebraisch verwertet werden kann, und sind deshalb auch für den praktischen Zweck des Rechenunterrichts nicht ganz ohne direkten Nutzen; sie üben endlich die Willenskraft und fördern hierdurch und durch den Inhalt der Aufgaben auch die Ziele des erziehenden Unterrichts.

Die algebraischen Aufgaben fordern vom Lehrer, daß er es versteht, durch seinen Unterricht die Aufgabe dem Verständnis der Kinder nahe zu bringen und die Kinder zu volkstümlichen, einfachen Urteilen und Schlußformen zu führen. Der Lehrer muß daher jede Aufgabe durchdenken, damit der Gang des Unterrichtsverfahrens schon vor der Stunde ihm klar vor Augen steht, so daß nicht diese oder jene nicht erkannte Schwierigkeit die Klarheit des Verfahrens stört. Diese volkstümlichen Lösungen der algebraischen Aufgabe sind ja meistens schwieriger als die Lösungen mit Gleichungen. Haben sich bei der letzteren erst die Gleichungen ergeben, geben sich aus den Operationen, die mit der Unbekannten ausgeführt und diese erwerden sollen, so wird nach bekannten Formeln gerechnet, und das Resultat wird der Aufgabe so mechanisch beigesellt, daß man dann oft nicht mehr weiß, wurde nach ℳ oder Pferden gefragt.

Wie anders aber bei der volkstümlichen Lösung der algebraischen Aufgabe. Die geforderten Operationen müssen umgedeutet, d. h. also, die Operationszahlen müssen in anderer Form auf das Ergebnis bezogen werden, um zur Lösungsform zu gelangen, die dann in bewußtem, stetigem Vorwärtsschreiten zum Ziele führt. Wenn z. B. die Aufgabe hieße: Ein Vater hat Nüsse gekauft und verteilt diese unter seine Kinder. Das erste Kind erhält die Hälfte des ganzen Vorrats weniger 6 Nüsse; das 2. Kind erhält die Hälfte des Restes weniger 6 Nüsse; ebenso macht er es bei dem 3. und 4. Kinde; dem 5. Kinde gibt er die noch übrigen 20 Nüsse. Wieviel Nüsse hat er gekauft? — Die Gleichung wird angesetzt; denn x ist die Anzahl der Nüsse, die der Vater verteilt hat, und dieses x wird geteilt, die 6 subtrahiert usw.; dann werden Brüche weggeschafft, Klammern aufgelöst usw.; bis sich endlich das Resultat 140 ergibt. Wie einfach und schlicht und dabei wie verständlich, klar und sicher ist aber die volkstümliche Lösungsform, wenn sie sagt: Das 5. Kind erhielt 20 Nüsse; diese 20 Nüsse waren übriggeblieben, nachdem das 4. Kind $\frac{1}{2}$ der vorhandenen Nüsse weniger 6 erhalten hatte. Hätte das 4. Kind die Hälfte der vorhandenen Nüsse erhalten, so würde es 6 Nüsse mehr erhalten haben; es würden also 20 — 6 Nüsse = 14 Nüsse übriggeblieben sein. Diese 14 Nüsse wären die 2. Hälfte der vorhandenen Nüsse; folglich hatte der Vater, ehe das 4. Kind die Nüsse bekam, 2 . 14 = 28 Nüsse. Diese 28 Nüsse waren

übriggeblieben, als das 3. Kind $\frac{1}{2}$ der Nüsse — 6 erhielt. $\frac{1}{2}$ der Nüsse würden dann $28 - 6 = 22$ Nüsse gewesen sein; folglich besaß der Vater, ehe er dem 3. Kinde die Nüsse gab, $2 \cdot 22 = 44$ Nüsse. Diese wieder waren übriggeblieben, als das 2. Kind $\frac{1}{2}$ der Nüsse — 6 Nüsse erhielt. $\frac{1}{2}$ der Nüsse waren also hier 38, und die Anzahl der Nüsse betrug vor der Verteilung an das 2. Kind 76 Stück. Diese 76 Stück blieben übrig, als das 1. Kind $\frac{1}{2}$ des ursprünglichen Vorrates, weniger 6 Nüsse, erhalten hatte. Hätte es die volle Hälfte des ursprünglichen Vorrates erhalten, so würden 6 Nüsse weniger, also 70 Stück übriggeblieben sein. Diese 70 hätten dann die andere Hälfte gebildet; folglich besaß der Vater von Anfang an $2 \cdot 70 = 140$ Nüsse. — Auch die andere Lösungsform, von vorn beginnend, reizt zu stetem Denken. Das 1. Kind erhielt $\frac{1}{2}$ der Nüsse — 6. Es blieben also übrig $\frac{1}{2}$ des Vorrats + 6; davon erhielt das 2. Kind die Hälfte weniger 6. Die Hälfte von $\frac{1}{2}$ des Vorrats $+ 6 = \frac{1}{4}$ des Vorrats + 3. Das 2. Kind erhielt also $\frac{1}{4}$ des Vorrats $+ 3 - 6$, also $\frac{1}{4}$ des Vorrats — 3. Es bleibt übrig $\frac{1}{4}$ des Vorrats + 9; denn wenn das 2. Kind nur $\frac{1}{4}$ des Vorrats erhielte, bliebe übrig $\frac{1}{4}$ des Vorrats + 6; nun erhielt es 3 weniger, diese bleiben mehr übrig, also $\frac{1}{4}$ des Vorrats + 9 Nüsse. Davon erhält das 3. Kind die Hälfte — 6. Die Hälfte beträgt $\frac{1}{8}$ des Vorrats $+ 4\frac{1}{2}$, davon 6 ab, bleibt für das 3. Kind $\frac{1}{8}$ des Vorrats $- 1\frac{1}{2}$. Es bleibt übrig $\frac{1}{8}$ des Vorrats $+ 10\frac{1}{2}$. Hiervon erhält das 4. Kind die Hälfte — 6. Die Hälfte $= \frac{1}{16}$ des Vorrats $+ 5\frac{1}{4}$, davon 6 ab, bleibt für das 4. Kind $\frac{1}{16}$ des Vorrats $- \frac{3}{4}$, so daß übrig bleibt $\frac{1}{16}$ des Vorrats $+ 11\frac{1}{4}$. Dieser Rest ist gleich 20 Nüsse. $\frac{1}{16}$ des Vorrats ist um $11\frac{1}{4}$ Nüsse kleiner, also $= 8\frac{3}{4}$ Nüsse. Der Vorrat demnach $16 \cdot 8\frac{3}{4} = 140$ Nüsse.

So können einfache und zusammengesetzte Aufgaben den Schülern geboten werden. Bei den einfachsten werden die 4 Grundrechnungsarten in algebraischer Form oder die Verbindung von mehreren derselben auftreten, während die zusammengesetzten durch mannigfache Beziehungen der Zahlen zueinander der Lösung einige Schwierigkeiten bereiten. Gewisse Formen der algebraischen Aufgaben sind seit alter Zeit her volkstümlich geworden; ich erinnere an die Alters-, die Röhren-, die Uhrenaufgaben, und wer kennt nicht die Aufgabe von den Knaben mit 100 Schafen! Die einklassige Schule wird auch hier die einfachsten Aufgaben herausheben und nur diese zum Verständnis bringen.

Über die Stellung der algebraischen Aufgaben zu dem übrigen Rechenstoff gibt Hentschel in dem obenangeführten Worte die Norm, daß sie stets am Schluß der Stunde auftreten sollen. Wenn dann durch langes Üben einer Rechnungsart die Schüler zu ermatten drohen, gewinnen sie neue Begeisterung, wenn die algebraische Aufgabe gegeben wird. Welche Freude, wenn das Knacken der Nuß gelungen ist! Ohne Vorteil aber wird es sein, wollte man nun zu einer zweiten Aufgabe weiter gehen, die von der ersten verschieden ist, oder müßte man eine zweite Aufgabe derselben Art ungelöst lassen, da die Zeit verstrichen ist. Erst mehrere Lösungsformen derselben Art befestigen die Erkenntnis und sichern die noch unbekannten Schlußformen. Notwendig wird es auch sein, daß die Kinder

an der Nachbildung dieser Aufgaben sich versuchen. Ob nun unter Berücksichtigung dieser Forderungen der Lehrer in jeder Stunde zu der Lösung von algebraischen Aufgaben kommen wird, ist mir sehr zweifelhaft. Die Zeit wird fehlen müssen, da wenige Minuten nach der oben entwickelten Ansicht über die Befestigung der einzelnen Aufgabe hierzu nicht genügen werden. Man lege also diese wenigen Minuten am Schluß von mehreren Rechenstunden zusammen und widme diese so gewonnene Zeit den interessanten Aufgaben.

In dem Kopfrechenhefte des Verfassers sind meistens nach jeder Rechnungsart 4 bis 5 algebraische Aufgaben gleicher Art gegeben worden, so daß in dem ganzen Hefte 31 charakteristische algebraische Aufgaben mit jedesmal 3 bis 4 Nachbildungen verzeichnet sind, von der je die erste mit ausführlicher Lösung versehen ist. Ich halte diese Zahl von typischen Aufgaben für vollständig ausreichend. In jedem Schuljahre werden ungefähr nur 4 bis 5 Formen zur Behandlung und zur Übung kommen. In dieser Ausdehnung erfüllen die algebraischen Aufgaben ihren formalen, praktischen und erziehlichen Zweck, ohne die rechtzeitige Durcharbeitung des sonstigen Rechenstoffes in Frage zu stellen.

56. Ein Schlußwort über Vereinfachung des Rechenunterrichts.

Die in der Überschrift erwähnte Forderung wird so häufig erwähnt und so vielfach erhoben, daß ich nicht umhin kann, in wenigen Zeilen darauf einzugehen und das zusammenzufassen, was in den vorstehenden Abschnitten an verschiedenen Stellen hierüber gesagt worden ist. Vereinfachung des Rechenunterrichts darf nicht von denen gefordert werden, die ein Zurückgehen der Bildung unseres Volkes für wünschenswert erachten, auch nicht von denen, die aus Bequemlichkeit niedere Ziele stecken möchten. Unsere Ziele des Rechenunterrichts sind nicht herabgemindert, wenn wir auf Seite 57 sagten, daß wir auf der Pestalozzischen Grundlage der Anschauung sowohl das Pestalozzische Formalprinzip als auch das Materialprinzip älterer und neuerer Methodiker deshalb erstreben wollen, um durch beide das Hauptziel des erziehenden Unterrichts, den religiös-sittlichen Charakter, auch durch den Rechenunterricht erreichen zu helfen. Wir verlangen, wie früher, eine tüchtige Geistesbildung an berechtigtem Stoffe und erstreben dadurch die Erkenntnis der sittlichen Güter und das zum sittlichen Handeln führende sittliche Urteil. Diese Ziele sind auch zu erreichen, wenn sonst Arbeitskraft und Arbeitsfreudigkeit dem Lehrer zur Seite stehen.

Vereinfachung des Rechenunterrichts muß aber von denen gefordert werden, die eine Zersplitterung der Kraft des Schülers vermeiden wollen, die den kritischen Maßstab an den gebräuchlichen Stoff legen, ob derselbe wirklich ein berechtigter Stoff ist, oder ob die Ziele des Rechenunterrichts nicht besser durch Ausscheiden dieses Stoffes erreicht werden können; Vereinfachung des Rechenunterrichts muß auch von denen verlangt werden, welche durch gründliche methodische Durcharbeitung des verminderten Stoffes mehr zu erreichen hoffen, als von dem oberflächlichen Vielerlei.

Es ist schon häufig darauf hingewiesen worden, daß dem heutigen Rechenunterrichte vielfach einfachere und leichter zu behandelnde Stoffe zugrunde liegen als noch vor 35 Jahren. Die unbequemen Währungszahlen, die häufigen Umrechnungen, die das Leben bot und forderte und die der Rechenunterricht der damaligen Zeit zu berücksichtigen gezwungen war, haben den einfacheren Währungszahlen der Zehnerordnung und dem (zum Teil) internationalen Maß und Gewicht den Platz eingeräumt. Ebenso ist schon an geeigneten Stellen darauf aufmerksam gemacht worden, wie auch der jetzt noch gebräuchliche Stoff eine Kürzung oder auch eine einheitlichere Gliederung erfahren könnte. Es ist demnach eine Vereinfachung des Rechenunterrichts anzustreben und zwar hinsichtlich der Stoffauswahl, der Stoffanordnung und der Behandlung des Stoffes.

Welche Stoffe können aus dem bisher behandelten Rechenstoffe ausgeschieden werden. Es kann hier nur auf die wichtigsten Stoffe hingewiesen werden.

Bei dem Rechnen im größeren Zahlenkreise werden häufig Aufgaben mit großen fünf-, sechs- und mehrstelligen Zahlen gegeben. Diese Aufgaben haben wenig Wert; das Leben verlangt sie selten, und die formale Seite des Rechnens kann ohne sie erreicht werden; sie verlangen einen unnötigen Kraft- und besonders Zeitaufwand und hindern dadurch die Durchnahme berechtigter, weil dem Anschauungskreise der Schüler entstammender Stoffe; sie sind also auszuscheiden oder mindestens sehr zu beschränken. Um Mißverständnisse auszuschließen, soll hier besonders betont werden, daß fünf- und mehrstellige Zahlen nicht unbedingt ausgeschlossen sind (vgl. des Verfassers Rechenhefte) und daß zweitens Kinder, die mit vierstelligen sicher rechnen können, auch befähigt sind, mit fünf- und mehrstelligen Zahlen zu rechnen.

In vielen Schulen und selbst einklassigen Volksschulen wird das sogenannte große Einmaleins immer noch auswendig gelernt, und dabei kann man den Lehrer selbst nicht allein verantwortlich machen, da viele Rechenhefte diese vorsündflutliche Plage konservieren. Oft aber treiben die Lehrer diesen unfruchtbaren Gedächtnisstoff, obwohl der Lehrplan von demselben nichts weiß und einsichtige Revisoren von der Unzweckmäßigkeit überzeugt sind. Fast scheint es, als ob der Lehrer dieses mechanische Aufsagen unverstandener Resultate als einen Gradmesser der Tüchtigkeit seiner Schule hinstellen möchte.

Das große Einmaleins ist vollständig unnötig; denn selbst geübte Rechner werden sich nicht auf die auswendig gelernten Resultate verlassen, sondern zu ihrer eigenen Sicherheit nachrechnen; auch genügt das kleine Einmaleins vollständig, um diejenige Rechenfertigkeit zu erreichen, die das Leben nur fordern kann. Außerdem sind es nur wenige Rechner, die wirklich das große Einmaleins können. Auf kurze Zeit mag der Rechenlehrer oder ein tüchtiger Schüler ohne Bedenken die richtigen Resultate wissen; aber bald tritt die bekannte Unsicherheit bei den kritischen Fällen, wie 6 . 17 und 7 . 16 oder 7 . 18 und 8 . 17 wieder ein. Ich habe in einer mehr als 30jährigen Tätigkeit als Rechenlehrer in Volksschule, Präparande und Seminar das große Einmaleins nie lernen lassen, aber

oft Gelegenheit gehabt, tüchtige junge Leute, die in guten Volksschulen und Präparandenanstalten unterrichtet waren und das große Einmaleins gelernt hatten, zu prüfen. Die Frage nach der sicheren Kenntnis des großen Einmaleins wurde selbstverständlich bejaht, bejaht mit einem Anflug von Entrüstung über solch' kleinlichen Zweifel — und nach 3 bis 4 Fragen war die Unsicherheit im großen Einmaleins offenbar. Wieviel Zeit, wieviel Ärger und wie viele Strafen werden durch das Ausscheiden dieses Stoffes erspart. Alles das gilt schon von dem großen Einmaleins bis 10 . 19, wieviel unsinniger noch ist der Versuch, die Resultate bis zu den Quadratzahlen einzuprägen! — Und dabei fehlt den Schülern häufig jede Fertigkeit im Vervielfachen mäßig großer zweistelliger Zahlen mit einstelligen Zahlen. Man übe deshalb stunden-, wochen- und monatelang immer wieder das einfachste Vervielfachen mittlerer Zahlen mit einstelligem Multiplikator, und dann können unsere Kinder die Resultate des großen Einmaleins ebenso schnell ausrechnen als andere diese ansagen können. Bei dieser soeben erwähnten ausgedehnten Übung des Vervielfachens wird sich die mechanische Beherrschung einiger Produkte des großen Einmaleins von selbst ergeben. Zunächst sind es die im Zahlenkreise bis 100 liegenden Produkte, die vom 2. Schuljahre an immer wieder berechnet werden, die nach und nach zum unverlierbaren Eigentum der Kinder werden; hierzu treten die Produkte einiger besonders bequemen Zahlen, wie 11, 12, 15. Die Kenntnis dieser Produkte identifiziert man aber nicht mit der Kenntnis vom großen Einmaleins. Wir aber sind damit zufrieden und verlangen nicht mehr von unsern Schülern.

Aus denselben Gründen, weil nämlich die Stoffe unpraktisch sind und berechtigten Sachgebieten Zeit und Raum stehlen, sind ferner auszuscheiden die schriftliche Form des Enthaltenseins (die genaueren Gründe suche in Abschnitt 17) und die Bruchrechnungsaufgaben mit großem Nenner, da diese besonders unpraktisch sind und Zeit und Mühe kosten, ohne nennenswerte Erfolge zu bringen; ebenso sind auszuscheiden die Aufgaben, die das Aufsuchen des Generalnenners aus vielen einzelnen Nennern verlangen. Ich betone hierbei ausdrücklich, um Mißverständnissen zu begegnen, Bruchrechnungs*aufgaben* mit großem Nenner. Daß selbst bei Nennern aus dem Zahlenkreise bis 10 im Hauptnenner Zahlen vorkommen werden wie 72, 90 u. a., ist so selbstverständlich, daß ich es nicht für notwendig hielt, besonders darauf hinzuweisen.

Die Lehre von den *periodischen Dezimalbrüchen* hat weder formalen noch praktischen Wert; sie ist also auszuscheiden.

Auszuscheiden sind die eigens *für die Schule zusammengesetzten Aufgaben* der bürgerlichen Rechnungsarten, die im Leben nie vorkommen können. Das Aufsuchen des *Kapitals* bei der Zinsrechnung, wenn dasselbe z. B. 13,17 ℳ groß ist, desgleichen die Bestimmung einer *unmöglichen Zeit*, die ein Kapital verzinst wird und eines *unmöglichen Zinsfußes*; *Rabattrechnungsaufgaben* mit imaginären Zahlen, die *Terminrechnung*, ein großer Teil der *Gesellschaftsrechnungs-* und *Mischungsrechnungsaufgaben* usw. gehören zu diesen auszuscheidenden Aufgaben.

Der übrigbleibende Stoff ist immer noch von solcher Ausdehnung, daß die einklassige Volksschule noch manches Gebiet beschränken muß, wie schon vielfach erwähnt worden ist.

Überrascht war ich, als eine im Jahre 1904 erschienene Methodik (von A. K.) auf Seite 12 meine Darlegungen über Vereinfachung des Rechenunterrichts, soweit große Zahlen, große Nenner und das große Einmaleins berührt werden, dazu benutzt hat, mich in die Reihe derer einzuordnen, die allzu ängstlich nach dem „Minimum“ fragen. Ich habe, um weiteren Mißverständnissen vorzubeugen, bei der jetzigen Auflage an betreffenden Stellen meine Ansicht ausführlich begründet und weise auch hier nochmals auf meine Rechenhefte hin (die überdies A. K. bekannt waren). Die Forderungen, die meine Hefte an die Schüler stellen, sind enschieden nicht minimal und übertreffen in beiden Ausgaben, also selbst für einfache Volksschulen, die Forderungen der meisten Rechenhefte, auch der von A. K. herausgegebenen Hefte.

Eine Vereinfachung des Rechenunterrichtes ist auch wesentlich durch eine vereinfachte Stoffanordnung zu erreichen.

Die Anordnung des Stoffs der Unterstufe im Anschluß an die operativen Zahlen, der fernere Gebrauch dieser operativen Zahlen bei den vier Grundrechnungsarten mit unbenannten und mehrfach benannten Zahlen, die Heraushebung der Vervielfachungs- und Teilungsregeldetri und ihre Verbindung mit dem Vervielfachen und Teilen, die einheitliche Gestaltung der gesamten Bruchrechnung in ihrer Beziehung zu den Grundregeln, die Verbindung der sogenannten Tararechnung mit dem Rechnen mit mehrfach benannten Zahlen, die einheitliche Beziehung der bürgerlichen Rechnungsarten auf die zugrunde liegenden Prozentbestimmungen, die erweiterte Regeldetri, die einheitliche Gestaltung der Sachgebiete u. a. m. werden entschieden zur Vereinfachung des Rechenunterrichtes beitragen.

Auch die Behandlung des Stoffes muß noch kurz erwähnt werden. Vollständige Sicherheit in den Elementen, d. h. gesicherte Zahlvorstellungen und die Fähigkeit, mit diesen zu operieren, eine einheitliche schulgemäße Lösungsform, die die Kinder durch die ganze Schulzeit begleitet und bei jeder Neueinführung eines Stoffes als bekannte und vertraute Größe den Kindern entgegentritt, ausreichende Übung und dadurch erzielte Sicherheit und Selbständigkeit, und vernünftige Anwendung an gesonderten Sachgebieten sind Punkte, die in den vorstehenden Abschnitten häufig erwähnt sind und die den Rechenunterricht vereinfachen.

Trotzdem wird das Ziel des Rechenunterrichtes nur durch angestrengte stetige Arbeit und durch hervorragende Treue zu erreichen sein. Diese Treue im Kleinen muß den Rechenlehrer besonders auszeichnen, dann wird der Erfolg nicht ausbleiben.

57. Die Rechenliteratur.

An den verschiedensten Stellen der vorstehenden Ausführungen ist auf die Rechenliteratur der vergangenen Zeit und der Jetztzeit hingewiesen worden. Es dürfte sich empfehlen, in diesem Abschnitt besonders der

Literatur der Jetztzeit zu gedenken und aus der außerordentlich großen Zahl der literarischen Erscheinungen einige der wichtigsten und bekanntesten herauszugreifen. Eine Kritik ist aus naheliegenden Gründen nicht beabsichtigt; ebenso macht die Zusammenstellung nicht den Anspruch auf Vollständigkeit.

Wir gruppieren die Erscheinungen der Rechenliteratur in Lehrbücher, Lehrmittel und Lernmittel.

1. Lehrbücher.

Die Lehrbücher wollen Seminaristen und Lehrer einführen in die Gruppierung und unterrichtliche Handhabung des Rechenstoffes. Der Lehrer bevorzuge eins von diesen Lehrbüchern bei seiner besonderen Präparation, doch sehe er auch in anderen Büchern nach; denn dadurch bewahrt er sich vor kritikloser Einseitigkeit.

Rechenbücher sind z. B.:

1. Adam: Der Rechenlehrer. Neue Anleitung zum methodischen Unterricht im Rechnen. (Berlin.)
2. A. Böhme: Anleitung zum Unterricht im Rechnen. Bearbeitet von K. Schaeffer. (Berlin.)
3. Böttcher und Sendler: Der Rechenunterricht in der Volksschule. (Breslau.)
4. Büttner: Anleitung zum Rechenunterricht und Raumlehreunterricht in der Volksschule. (Leipzig.)
5. Bußmann: Anleitung zum Rechenunterricht in der einklassigen Volksschule. (Essen.)
6. Hartmann: Der Rechenunterricht in der deutschen Volksschule vom Standpunkt des erziehenden Unterrichts. (Frankfurt a/M.)
7. Hentschel und Költzsch: Lehrbuch des Rechenunterrichts in Volksschulen. (Leipzig.)
8. Kaselitz: Wegweiser für den Rechenunterricht in deutschen Schulen. (Berlin.)
9. R. Schroeter: Die Methodik des Rechen- und Raumlehre-Unterrichts. Ein Handbuch für Seminaristen und Lehrer. (Wittenberg.)
10. Steuer: Methodik des Rechenunterrichts. (Breslau.)

2. Lehrmittel.

Als Rechenlehrmittel sind anzuführen:

1. Die Berliner Knopfmaschine.
2. Die Bornsche Rechenmaschine.
3. Die Rösenersche Rechenmaschine.
4. Die Russische Rechenmaschine.
5. Die Wunstorfer Rechenmaschine.
6. Der Tillichsche Rechenkasten.

7. Müller's verbesserter Rechenkasten.
8. Scheiner, neuer Bruchrechenapparat.
9. Schelivsky, Reformen-Rechenapparat.
10. Zarths Bruchrechenapparat.

3. Lernmittel.

Lernmittel, d. h. Rechenhefte für Schüler sind für jede Schulgattung in großer Anzahl vorhanden. Wir führen an:

1. Böhme: (Schaeffer und Weidenhammer) Rechenbücher für verschiedene Schulen.
2. Büttner: Rechenhefte für verschiedene Schulen.
3. Dorn: (Elsner und Sendler) Rechenhefte.
4. Hanft: Rechenbuch für Volks- und Mittelschulen.
5. Hartmann und Ruhsam: Rechenbücher in 3, 4 und 6. Heften.
6. Hentschel und Jänicke: Abschließende Volksschule.
7. Költzsch: Rechenbücher für Volks- und Mittelschulen und für einfache Schulverhältnisse.
8. Räther und Wohl: Übungsbuch für das mündliche und schriftliche Rechnen.
9. Steuer: Rechenbücher für verschiedene Schulen.
10. R. Schroeter: Ausg. A, 6 Hefte für Stadtschulen und andere mehrklassige Volksschulen; Ausg. B für einfache Volksschulen.

II. Teil.

Die Methodik des Raumlehre-Unterrichts in der Volksschule.

A. Geschichtliches zur Entwicklung der Methode des Raumlehre-Unterrichts.

(Benutzt wurde: Schurig, Geschichte der Methode in der Raumlehre der deutschen Volksschule.)

1. Die ersten Anfänge der Geometrie.

Die ersten sinnlichen Wahrnehmungen gleichartiger und ungleichartiger Dinge führten zu einem Gegensatz von Einheit und Vielheit, also zum Rechnen; aber sie veranlaßten auch den beobachtenden Menschen zum Ausmessen der räumlichen Größen, und somit ist auch die Kenntnis geometrischer Wahrheiten mit den Anfängen des Denkens der Menschen verknüpft. Aber nicht nur die Größen der räumlichen Gebilde, sondern auch ihre durch die Form begründeten Eigenschaften, ihre Verteilung und Zusammensetzung traten notwendigerweise dem denkenden Menschen von Anfang an entgegen, und je größer die Kultur der Völker wurde, desto mehr wurden sie gezwungen, räumliche Gebilde auszumessen und zu verteilen. Ohne mathematische Kenntnisse konnte keines der Kulturvölker des Altertums bestehen. Man denke hierbei nur an die Baukunst, besonders an die großartigen Wasserbauten der Alten. Die durch die anfänglichen Schätzungen gewonnenen Erfahrungen führten nach und nach zum sichereren Abstecken und Ausmessen, aber auch zu Regeln und Lehrsätzen, und diese auf Anschauung gegründeten Sätze veranlaßten wieder zu mancherlei Kombinationen und Schlußfolgerungen.

Unter den Völkern des Altertums waren es die Ägypter, die durch die Eigenart des Landes wohl am meisten Veranlassung hatten, den oben angeführten Entwicklungsgang durchzuleben. Herodot erzählt, daß Sesostris jedem Gliede der Kriegerkaste einen gleichen Teil Landes im Geviert zugeteilt und zur Bestreitung der Kosten für die Kanalbauten mit einer Steuer belegt habe. Nun verwischten die jährlichen Überschwemmungen des Nil nicht nur die Grenzen, sondern sie rissen auch hier ein Stück Land ab und setzten dort ein solches an. Es mußten also die Grenzen jährlich von neuem vermessen werden; auch mußte nachgemessen werden, wieviel Zuwachs oder wieviel Abnahme das Besitztum erfahren hatte, damit die Steuerverteilung eine möglichst gerechte wurde.

2. Die Geometrie der Griechen und Römer.

Das Verdienst, für die Geometrie die Erfahrungswahrheiten der einzelnen Völker zusammenhängend geordnet und zu logischer, streng mathematischer Beweisführung fortgeführt zu haben, gebührt den Griechen. Es ist anzunehmen, daß die Griechen ihre ersten Kenntnisse in der Meßkunst von den Ägyptern übernommen haben. Hatte so bei den Ägyptern das praktische Bedürfnis den Anstoß zur geometrischen Wissenschaft gegeben, so vollzogen sich bei den Griechen nach dem der Mathematik eigenen Bildungsprinzip die Schlußfolgerungen nach inneren, dem Denkprozeß notwendigen Vorgängen im menschlichen Geiste und das mathematische Denken arbeitete auf Grund der Anschauung und Erfahrung in reiner Verstandstätigkeit.

So wurde gewiß eine Reihe der geometrischen Sätze durch Probieren oder auf dem Wege der unmittelbaren Anschauung gefunden, z. B. das ungefähre Verhältnis des Umfangs des Kreises zum Durchmesser desselben, die meisten Sätze aber können nur Ergebnisse der reinen Verstandsarbeit sein; denn „es begnügt sich der vordringende Verstand, der in sich Gewisses erstrebt, nicht mit bloß anschaulicher Evidenz, und wenn das gleiche Ergebnis aus 1000 Fällen resultierte, sondern er verlangt unumstößliche Gewißheit und Erkenntnis absoluter Notwendigkeit der mathematischen Wahrheiten nach den Gesetzen und dem Prozesse des Denkens".

Es ist natürlich, daß die Mathematik wegen der unumstößlichen Gewißheit der mathematischen Wahrheiten bei den dem Urgrund aller Dinge nachforschenden griechischen Philosophen im höchsten Ansehen stand. Sie empfahlen das Studium der Mathematik weniger wegen des praktischen Nutzens, sondern als praktische Logik, zur Entwicklung der Verstandskräfte und zur Schärfung des Urteils. In der Geschichte der Rechenkunst (Seite 4) ist schon gesagt worden, daß die Griechen weniger die Arithmetik, als den sich mit den Raumgrößen beschäftigenden Teil der Mathematik bevorzugten, der von ihnen auch den Namen Geometrie, d. i. Erdmeßkunst, erhielt. — Hervorragende Förderer der Geometrie finden wir zuerst bei den jonischen Weisen; von diesen mögen hier erwähnt werden Thales, Pythagoras, und Plato.

Thales von Milet lebte im 7. Jahrhundert v. Chr. Geb. Noch in seinem Alter (630 v. Chr.) unternahm er der Geometrie wegen eine Reise nach Ägypten und Indien. In Ägypten soll er die Höhe der Pyramiden nach ihrem Schatten gemessen haben. Ihm schreibt man die Sätze über die Gleichheit der Scheitelwinkel, über die Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck, über die Winkelmessung nach Kreisbogen u. a. zu. Der bekannte wichtige Satz von der Größe des Peripheriewinkels über dem Halbkreis führt noch heute nach ihm den Namen: „Lehrsatz des Thales".

Pythagoras lebte im 6. Jahrhundert v. Chr. Geb.; er war auf Samos geboren und lebte später in Kroton in Großgriechenland. Von ihm stammt der Name „Mathematik". In diesem Namen faßte er alle Lehren, die sich auf Zahl und Raum beziehen, zusammen. Seine Bedeutung für die

Geometrie besteht darin, daß er die vorhandenen Lehren und Regeln der Meßkunst zusammenfaßte und viele neue Sätze fand. Der wichtigste Satz der ganzen Geometrie über die Gleichheit des Hypotenusenquadrates mit der Summe der beiden Kathetenquadrate heißt heute noch der „Pythagoerische Lehrsatz". Pythagoras fand ferner, daß von allen ebenen Figuren von gleichem Umfange der Kreis den größten Flächeninhalt und von allen Körpern von gleicher Oberfläche die Kugel den größten Rauminhalt besitzt u. a. — Von einem seiner Schüler, dem Hippokrates von Chios (450 v. Chr.), stammt der Satz über die Ausmessung der halbmondförmigen Flächenstücke, die von den Peripherien der auf der Hypotenuse und den Katheten errichteten Halbkreise begrenzt werden; dieser Satz heißt noch heute Lunulae Hippocratis.

Plato lebte im 5. Jahrhundert v. Chr. Geb. Von ihm wird erzählt, daß kein Schüler ohne mathematische Vorbildung zu seinem Unterricht zugelassen wurde und daß er deshalb über der Tür seines Lehrsaales die Worte gesetzt habe: „Keiner komme herein, der in der Geometrie ein Unkundiger ist". Ihm schreibt man die Erfindung der geometrischen Analysis und der Lehre von den Kegelschnitten zu.

Von keinem dieser drei griechischen Philosophen ist eine Schrift geometrischen Inhalts vorhanden. Dagegen haben später andere griechische oder von griechischer Bildung beeinflußte Gelehrte zahlreiche und berühmte Schriften hinterlassen, in denen die hier und da zerstreuten Lehrsätze gesammelt, geordnet, vervollkommnet und ergänzt der Nachwelt überliefert wurden. Hier sollen ebenfalls drei dieser Mathematiker kurz erwähnt werden, nämlich Euklides, Archimedes und Apollonius. Euklid lehrte ums Jahr 300 v. Chr. Geb. in Alexandrien die Geometrie. Von ihm stammt das bedeutendste Lehrbuch der Meßkunst, seine „Elemente" (Stoicheia) der Meßkunst in 15 Büchern, deutsch von Lorenz (Halle 1781) u. a. Dieses streng systematische Handbuch geht von einigen aus der Natur des Denkvermögens folgenden Grundsätzen (Axiomen) aus, z. B. „Gleiches zu Gleichem gibt Gleiches" usw.; es schreitet von Beweis zu Beweis in streng logischer Weise fort und läßt jeden im System entbehrlichen Gedanken zur Seite liegen. Die „Elemente" von Euklid bilden seit mehr als 2000 Jahren „für die wissenschaftliche demonstrative Behandlung der Geometrie die Grundlage, ein künstliches logisches Gebäude, in dem keiner der wesentlichen Sätze fehlt, kein Satz überflüssig ist, und welches das vollständige Material zur Lösung aller rein geometrischen Arbeiten enthält". Euklid-Elemente sind wohl in die Sprachen aller Kulturvölker der Erde übersetzt worden.

Sein Lehrgang hat begeisterte Freunde und entrüstete Feinde gefunden. Gelobt wird besonders die Anordnung der Sätze. Mager (Die deutsche Bürgerschule) sagt z. B.: „Man muß Euklid nachsagen, daß die Anordnung seiner Sätze in ihrer Art musterhaft ist", und Kästner behauptet: „Die neueren Werke der Geometrie verlieren um so mehr an Klarheit und Gründlichkeit, je weiter sie von dem Euklid sich entfernen". Dagegen wird mit Recht getadelt, daß 1. „Beweis und Lehrsatz gleichgültig aus-

einanderfallen und nur durch die Tyrannei gewaltsam herbeigezogener Konstruktion zusammengebracht werden", und 2. daß der Inhalt der Sätze bei der Anordnung derselben zu wenig beachtet worden ist. So schreibt Dr. Unger in seinem Buche: „Die Geometrie des Euklid und das Wesen derselben, erläutert durch eine damit verbundene systematisch geordnete Sammlung von mehr denn 1000 geometrischen Aufgaben und die beigefügte Anleitung zu einer einfachen Auflösung derselben". „. . . Nur eine falsch verstandene Logik kann zu einem solchen Mißgriff verleiten, durch welche die sogenannte natürliche Ordnung der Sätze auf Kosten der Gründlichkeit eingeführt wird. Allen Werken, in welchen die Geometrie auf diese Weise behandelt ist, muß der mathematische Geist abgesprochen werden, da in denselben öfters philosophische Erörterungen die Stelle mathematischer Beweise vertreten, usw." Mager sagt a. a. O. „Wenn man mich fragt, was ich denn an Euklid auszustellen habe, so antworte ich: An dem Mathematiker Euklid natürlich nichts; an dem Schriftsteller Euklid die Kleinigkeit, daß er uns nicht alles aufgeschrieben hat, was er hat tun müssen; an dem Lehrer Euklid aber — wenn man von einem so vorzüglichen Mann annehmen darf, er habe nach seinem Buche unterrichtet —, daß ein solcher Unterricht nicht der rechte ist". — Von seiner Methode wird erzählt, daß, als König Ptolemäus Lagi von Ägypten für sich einen bequemeren Weg zur Gewinnung der geometrischen Wissenschaften wünschte, der scharfe Mathematiker Euklid die schroffe Antwort gegeben hat: „Es gibt keinen Königsweg zur Geometrie".

Archimedes lebte in Syrakus ums Jahr 250 v. Chr. Geb. Er wendete die Geometrie auch zur Erfindung von Kriegsmaschinen an. Bekannt ist, daß der greise Gelehrte, der von den eindringenden römischen Kriegern bei einer schwierigen mathematischen Konstruktion gestört wurde, den Kriegern abwehrend zugerufen haben soll: „Zertritt mir meine Kreise nicht". Ihm wird die beste Berechnung des Kreises und der Kugel zugeschrieben, und der Satz, daß sich Kegel, Halbkugel und Zylinder von gleicher Grundfläche und Höhe verhalten wie 1 : 2 : 3, bewahrt den Namen des Archimedes auch der spätesten Nachwelt. Von seinen mathematischen Büchern ist das über die Kegelschnitte das bedeutendste. Ebenso hervorragend wie als Mathematiker ist Archimedes als Physiker.

Apollonius von Perga lebte ums Jahr 200 v. Chr. Geb. in Perga in Pamphylien. Sein Hauptwerk behandelt die Kegelschnitte; es zerfällt in acht einzelne Bücher, von denen vier noch im Original vorhanden sind. Nach ihm ist der Satz benannt: „Der Kreis über dem Abstand zweier zugeordneter Punkte als Durchmesser ist Ort des Punktes, dessen Entfernungen von dem andern Paare ein konstantes Verhältnis haben", und die Aufgabe, einen Kreis zu zeichnen, der drei gegebene Kreise berührt, ist als Apollonisches Taktionsproblem bekannt.

Schon in der Geschichte des Rechnens ist gesagt worden, daß die Römer den Ausbau der mathematischen Wissenschaften nicht förderten. Auch die Geometrie wurde nur insoweit von ihnen beachtet, als sie ihren praktischen und kriegerischen Zwecken diente. Nur selten wandte ein Gelehrter sich mathematischen Studien zu. Unter diesen Mathematikern

soll hier nur Pappus aus Alexandrien (380 n. Chr.) erwähnt werden, von dem der nach ihm genannte Lehrsatz des Pappus, eine Verallgemeinerung des Pythagoreischen Lehrsatzes auf Parallelogramme über den Dreiecksseiten, herrührt. Sein Hauptwerk, die „Mathematischen Sammlungen", ist durch seine Reichhaltigkeit eine Hauptquelle für das Studium der Geometrie der Griechen und Römer.

3. Die Geometrie des Mittelalters und deren Methode.

Unter dem Niedergang der griechisch-römischen Kultur zur Zeit der Völkerwanderung litt auch die Geometrie. Erst später wurde sie von den Arabern wieder gepflegt, die z. B. die Werke des Apollonius übersetzten. Dann fand die Geometrie in den Klosterschulen des Frankenreichs und in den verwandten Gelehrtenschulen des Mittelalters eine Stätte. Sie gehörte zum Quadrivium und fand praktische Verwendung bei den hervorragenden Bauten des Mittelalters.

Es würde den diesen Erörterungen gestatteten Raum überschreiten, wenn hier auf die weitere Entwicklung der Geometrie als Wissenschaft in der Neuzeit weiter eingegangen werden sollte; nur einige Namen von Koryphäen dieser Wissenschaft sollen genannt werden. Einige hervorragende Mathematiker des Mittelalters sind schon in der Geschichte des Rechenunterrichts erwähnt. Hier sollen noch angeführt werden Adrian Metius († 1635), der das Verhältnis des Kreisdurchmessers zum Kreisumfang auf 113 : 355 berechnete; Ludolf van Keulen († 1610), der dasselbe Verhältnis auf 32 Dezimalstellen feststellte (Professor Richter in Elbing hat es in unserer Zeit auf 500 Dezimalstellen berechnet); der Astronom Kepler († 1651) schrieb eine Geometrie der Fässer; nach Cavalieri († 1647) ist der bekannte „Grundsatz des Cavalieri", den Inhalt der Körper von gleicher Grundfläche und Höhe betreffend, benannt; Cartesius († 1650) lehrte zuerst die analytische Geometrie und der 100 Jahre später geborene Monge die Projektionslehre; nach dem Jesuiten Guldin (um 1600) wurde die Guldinische Regel und nach Euler († 1783) der Eulersche Satz und die Eulerschen Polyeder benannt u. a. m.

Von Interesse dürfte es sein, über die Methode des geometrischen Unterrichts in dieser Zeit das Urteil eines hervorragenden Schulmannes zu hören.

Harnisch sagt hierüber in der Einleitung zu seiner „Raumlehre" zunächst über die Methode der alten Zeit: „Leider haben wir so gut wie gar keine Nachricht über die Art, wie die Ägypter die Meßkunst lehrten. Ja selbst wie die Griechen vor Euklides verfuhren, das liegt nicht so klar zutage, wie man es wohl wünschen möchte. Doch läßt sich nach meiner Meinung annehmen, daß bei der großen Regsamkeit der Griechen und bei den ausgezeichneten Gaben vieler ihrer Weisen die Raumlehre von ihnen auf eine geistige, bildende und erweckende Weise behandelt ward, so daß der Schüler sich selbst hineinarbeitete und der Lehrer nur bei seiner meßkünstlerischen Menschwerdung Hebammendienste verrichtete". Auf diese Art der Behandlung weist die bekannte Stelle bei Plato hin, wo Sokrates

einen Sklaven durch entwickelnde Fragen auf Grund der Anschauung zu der Einsicht führt, daß das Doppelte eines Quadrates das Quadrat über der Diagonale, nicht das über der doppelten Seite, sei. — Über die Methode des geometrischen Unterrichts im Mittelalter bis heran an die Gegenwart urteilt Harnisch sehr treffend: „Man fing an, den Schülern zu erklären, was Raumlehre sei, gab ihre Einteilung an, erklärte die wichtigsten vorkommenden Begriffe, fügte einige Sätze bei, die sich von selbst verstanden, und ging dann zu Lehrsätzen über, welche der Lehrer dem Schüler bewies, so daß dieser bei dem ganzen Unterricht ein Zuhörer war, aber kein Zutuer, der nur die Weisheit des Lehrers auffassen und bewahren, aber keine eigene aus selbständiger Wurzel treiben konnte. Dabei hatte man die Wissenschaft so rein weg vom Leben abgeschnitten, daß der Schüler jahrelang fleißig arbeiten konnte, ohne doch irgendwie zu sehen, wozu ihn denn sein Fleiß führe. Kam er endlich zur angewandten Raumlehre, die man ganz hintenanstellte, so war er ungeschickt im Gebrauch von Zirkel und Richtscheit und der Lehrer gewöhnlich in gleichem Maße, daß beide sich nur damit beschäftigen konnten, wie so etwas zu machen sei, ohne es selbst machen zu können. — Viele Gelehrte nahmen aus der Schule den Glauben mit ins Grab, sie hätten keinen Sinn für Raumlehre; Mathematik sei eine gewaltig schwere Sache. Man hielt das erst fast erwachsenen Leuten zugänglich, was das Auge der wenig denkenden Kinder schon ersehen und ihre kleinen Hände schon erschaffen können."

4. Die Anfänge des Raumlehre-Unterrichts in der deutschen Volksschule.

Aus den bisherigen Ausführungen geht hervor, daß die Geometrie als eine Wissenschaft angesehen wurde, die nur wenigen hierfür begabten Auserwählten zugänglich gemacht werden konnte. Eine Aufnahme der Euklidischen Geometrie in den Lehrplan der Volksschule war aber so lange unmöglich, so lange diese Ansicht die herrschende war. Da nun aber das praktische Leben die Kenntnis der Raumformen und das Ausmessen derselben forderte, so läßt es sich verstehen, wenn hier und da in den Schriften unserer bewährten Pädagogen diese Forderung des praktischen Lebens erwähnt wird. Amos Comenius verlangt in seinem Informatorium der Mutterschule (1633) „Geometrie". Er fordert: „In der Geometrie werden die Kinder im 3. Jahre verstehen, was groß oder klein, kurz oder lang, breit oder eng heißt; im 4. Jahre sollen sie etliche Figuren nennen können, nämlich was ein Rad, Linie, Kreuz, Strich sei; ferner die Namen der Maße, was eine Handbreit, Spanne, Elle, Klafter, Wage, Topf, Quart usw. sei; sie fangen auch schon selber an zu messen, zu wägen, eins gegen das andere zu halten". Im 29. Kapitel der „Großen Unterrichtslehre" sagt er: „Ziel und Umfang der Volksschule wird sein, daß die gesamte Jugend vom 6. bis 12. Lebensjahr in dem unterrichtet werde, dessen Verwendung sich auf das ganze Leben erstreckt, nämlich . . . 4. daß sie kunstgerecht die verschiedenen Ausdehnungen, Länge, Breite, Abstand usw. ausmessen". — Wir sehen, daß Amos Comenius durch geometrischen

Anschauungsunterricht Größenbegriffe, Formen und Maße zum Ausmessen der Formen führen will.

Herzog Ernst von Gotha verordnet im Kapitel 8 (Von den natürlichen und nützlichen Wissenschaften usw.) einer späteren Ausgabe seines Schulmethodus im Jahre 1672 über die Stellung der Meßkunst in dem Lehrplan der Volksschule: „Zu dem Unterricht von jetztgedachten Wissenschaften wird erst dann geschritten, wenn die Kinder alle anderen Lektionen, welche sonst in deutschen Schulen vorgeschrieben sind, absolviert haben; es geschieht in solcher Ordnung, daß die natürlichen Dinge (d. i. Naturkunde) vorgehen, sodann die folgen, die zur Meßkunst gehören, und mit den weltlichen und häuslichen (Münzkunde, Landeskunde, Baukunst, Zeitrechnung) beschlossen wird; auch soll, was zur Meßkunst gehört, mit den Knaben allein getrieben werden". Über die Methode dieser Meßkunst bestimmt er: „Das Gemäß, z. B. den Zoll, sollen die Schulmeister nicht bloß vorsagen, vormalen, solches auch an dem Lineal, welches eben eine Elle lang ist, zeigen. Die Präzeptores sollen Linien vorziehen, nennen und nachmachen lassen, die Unterscheidung der Winkel, das Ziehen der Propendikularlinien lehren. Sie sollen mit der Bleiwage nicht etwa nur geschriebene Linien probieren, sondern die Bleiwage auf den Tisch oder auf den Boden der Schulstube setzen, sie an die Wände und Fenster halten, sie auch die Kinder selbst ansetzen und probieren lassen. Sie sollen, da gedacht wird, daß der Durchschnitt des Zirkels ungefähr der dritte Teil des Umzirks ist, einen Zirkel reißen und den Umkreis gegen den Durchschnitt mit einem Faden probieren — item das Exempel an dem Rande eines Hutes den Kindern zeigen. Wenn die Jugend eine Figur auf dem Papier mit Zirkel und Lineal nachzumachen und auszurechnen genugsam geübt worden, wobei die den Quadratinhalt veranschaulichenden Linien durch die Finger gezogen werden sollen, so sollen die Schulmeister zur Sache selbst schreiten und in Garten oder Feld gehen und ein Stück, und zwar ein gleichseitiges, geradwinkliges und dann ein ablänglichtes Viereck und so fortan abstecken und solches die Knaben abmessen und ausrechnen lassen usw.". Weiterhin verlangt er den verjüngten Maßstab, „die Kinder sollen denselben auf Hölzerlein machen"; er verlangt ferner das Faßvisieren, „eine Visierschnur soll in eine jede Superintendentur und Adjunktur geschafft werden zum abwechslungsweisen Gebrauch der Schulmeister" u. a. Hierzu wird ein besonderes Büchlein (Kurzer Unterricht) empfohlen, „darinnen die Prinzipien der vornehmsten und nützlichsten Wissenschaften kurz verfasset sind", welches den Kindern, aber nur zur freiwilligen Anschaffung rekommandieret werden soll. Dieses empfohlene Büchlein bietet in seinem 2. Teile eine recht gute Anleitung zur Meßkunst, „damit ein jeder die Art eines Gemäßes wisse und kenne". Über die Benutzung des Büchleins „Kurzer Unterricht" bestimmt er noch: Der Präzeptor soll einen Paragraphen nach dem andern vornehmen; die Kinder sollen es zuerst deutlich lesen, dann soll er abfragen, zuerst die geschicktesten Geister, „dann die anderen, denen er, wo sie anstoßen, dreinhelfen muß".

Noch heute wird jeder Lehrer aus diesen Forderungen des fürstlichen Pädagogen manchen beherzigenswerten Gedanken schöpfen können.

Auch August Hermann Francke verlangt in seiner „Information der Waisenkinder insonderheit", daß die Waisenkinder neben den ordentlichen Schulstunden gleichsam spielenderweise einen Acker messen und teilen lernen, wobei der „Kurze Unterricht" Herzog Ernsts benutzt werden soll.

In gleicherweise verlangte Rochow angewandte Raumlehre, wenn er in seinem Buche „Versuch eines Schulbuchs für Kinder der Landschule oder zum Gebrauch in Dorfschulen" im 12. Abschnitte etwas von „Ausmessung der Flächen und Körper" bringt.

Noch ist also die Raumlehre kein Unterrichtsfach der Volksschule, kein notwendiges Bildungsmittel des Geistes, nur praktische Gesichtspunkte verlangen eine praktische Behandlung der Raumlehre. — Aber auch in andern Kreisen forderte man die Behandlung der Geometrie. Dies zeigt sich in Schriften, deren Verfasser nicht in dem bekannten Verhältnisse zur Entwicklung unserer deutschen Volksschule stehen, wie die obengenannten Pädagogen und die auch nicht für die eigentliche Volksschule bestimmt sind. Die wichtigsten dieser Schriften sind:

1. „Auszug aus den Anfangsgründen aller Mathematischen Wissenschaften, zu Bequemerem Gebrauch der Anfänger auf Begehren verfertigt von Christian Freyherrn von Wolff, Seiner Königlichen Majestät in Preussen, Geheimen Rathe u. s. w. Halle im Magdeburgischen, 1772."

Wolff sagt in der Vorrede zu seinem Buche: Die Mathematik soll nicht in das Gedächtnis, sondern in den Verstand gefaßt werden; die Anfänger (kleine Knaben, welche die Anfangsgründe der lateinischen Sprache auswendig lernen) lernen zuerst die Figuren erkennen, benennen und unterscheiden; dann führt man sie an die Zeichnung derselben; dann folgen Lehrsätze und Aufgaben; der Beweis wird zuerst „mechanisch" geführt, d. h. nach den Bedingungen der Lehrsätze werden die Figuren gezeichnet und mit Hilfe von Instrumenten wird versucht, ob dasjenige eintrifft, was in der Aufgabe aufgegeben worden; zum Schluß soll der Beweis durch Fragen in der Ordnung durchgenommen werden, daß „die Vordersätze mit ihren Hintersätzen in den dazu nötigen Schlüssen zu einer unverrückten Reihe aufeinander folgen". — Die Auswahl der Sätze ist in stetem Hinblick auf die Möglichkeit der nützlichen praktischen Anwendung getroffen worden. — Aus derselben Zeit stammt

2. J. G. Büsch, Professor in Hamburg: „Versuch einer Mathematik zum Nutzen und Vergnügen des bürgerlichen Lebens, welcher das Nutzbarste aus der abstrakten Mathematik und eine praktische Mechanik enthält". Hamburg 1776.

Schurig schreibt hierüber in seiner Geschichte der Methode der Raumlehre: „. . . es ist die Ähnlichkeit seiner populären und anschaulichen Auseinandersetzungen mit dem, was wir heutzutage der Volksschule bieten, oft überraschend". An dem Beispiel des Ausmessens einer Fläche will Schurig zeigen, „daß die Volksschule des vorigen Jahrhunderts nicht ratlos gewesen wäre, wenn sie unter damaligen Verhältnissen hätte Raumlehre treiben können . .", ferner will er „die jetzt lebende Gene-

ration der Lehrer mit Achtung vor der Vergangenheit erfüllen, die wir alle bedürfen".

3. „Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie und Trigonometrie nebst ihrer Anwendung auf praktische Rechnungen, das Feldmessen und die Markscheidekunst von G. S. Klügel, Professor zu Halle," 1798.

Die Verwendung dieses Buches in der Volksschule scheint schon nach seinem Titel vollständig ausgeschlossen. Trotzdem aber hat gerade dieses Klügelsche Buch für die Geschichte der Methodik insofern hervorragende Bedeutung, als es zuerst von der Euklidischen Anordnung der Sätze dadurch abweicht, daß es die Lehrsätze nach dem Inhalte ordnet und daß es die heuristische Entwicklung der Sätze empfiehlt.

4. Von philanthropischem Geiste beeinflußt ist der „Erste Unterricht in der Mathematik für Bürgerschulen von G. U. A. Vieth, Fürstl. Anh. Dessauischem Schuldirektor" (3. Aufl. 1805).

Von den 4 Teilen dieses Buches, Arithmetik, Geometrie, Mechanik und Baukunst hat hier für uns nur der 2. Teil Interesse. Vieth gibt die jetzt noch üblichen Sätze und schließt daran praktische Aufgaben. Von der Beweisführung mancher Sätze meint er, man müsse zunächst den Glauben des Schülers in Anspruch nehmen, allein in der Folge werde der Verstand schon dem Gedächtnis nacharbeiten.

5. Aus der Geschichte der Methodik der Rechenkunst wissen wir, daß diese vorpestalozzische Zeit bei den Rechenbüchern auch durch gemütvolle Titel, reklamehafte Anpreisungen, Reime u. dergl. zu wirken suchte. Auch die geometrischen Bücher huldigen dieser Mode. So reimt Wolffgang Schmid, Rechenmeister zu Bamberg, in seinem „Ersten Buch der Geometria"

Die Kunst so im Euklide steckt
Gar manchem alzu ser verdeckt
Wirt hie gar leicht und liecht gemacht
Durch diese anleytung, wol betracht.

Auch anmutige Bildlein zieren die Titelblätter, wie Meßkünstler mit dem Schwert an der Seite, oder Bauern, die dem Nachbar von dem Felde etwas abpflügen und in Knittelversen zum Nachmessen reizen, oder Türme und Brunnen, die ausgemessen werden sollen, u. a. m.

5. Pestalozzi.

Pestalozzi erkannte den formalen Bildungswert der Raumlehre und war der erste, der den Versuch machte, an Stelle der bisherigen praktischen Raumlehre einen methodischen Unterricht über Raumverhältnisse in die Volksschule zu bringen. Zur Begründung seiner Ansicht schreibt Pestalozzi: „Die Mittel der Verdeutlichung aller unserer Anschauungserkenntnisse gehen von Zahl, Form und Sprache aus. Der Form entsprechen folgende Elementarfächer des Unterrichts: Meßkunst, Zeichnungskunst und Schreibkunst. — Die Meßkunst setzt ein ABC der Anschauung voraus. Dieses den Kindern beizubringen erfordert drei Stadien:

1. die Bemühung, das Kind die Verhältnisse der Ausmessungsformen kennen und benennen zu machen (die Mutter soll im ‚Buch der Mütter‘ in den Stand gesetzt werden, auf die Form der Gegenstände aufmerksam zu machen, z. B. Kugel — rund, Ei — länglichrund usw. Wohnzimmer, Umgebung und Spiel sollen dieser Formenkenntnis dienstbar gemacht werden); 2. es dahin zu bringen, sie selbständig anwenden und benutzen zu können; 3. das Nachzeichnen dieser Formen selber“. Aus solcher Anschauung gewinnt das Kind dann die „richtige Beurteilungskraft der Verhältnisse aller Formen“; diese Anschauung nennt Pestalozzi „Kunstanschauung“.

Seine Grundsätze hat Pestalozzi niedergelegt in dem Buche: „ABC der Anschauung, oder Anschauungslehre der Maßverhältnisse“.

Die Unterrichtsmittel waren auf Tafeln gezeichnete gerade Linien und Quadrate und deren einfache Teilungen; die Unterrichtsmethode Vorzeigen und Vorsprechen des Lehrers und Nachsprechen der Kinder, beides bei längeren Sätzen und Folgerungen oft stückweise, und der Unterrichtserfolg — Ermüdung der Kinder. Schurig urteilt hierüber: „Alles geht in peinlicher Lückenlosigkeit vorwärts durch alle nur möglichen Fälle hindurch und steigert sich zu einer für das Nachsprechen der Kinder ungeheuerlichen Komplikation“. Als Beispiel hierzu diene folgendes dem 2. Abschnitt des 2. Quadrats der 3. Quadratreihe entnommene Beispiel: „Zwei von diesen 6 gleichen Rechtecken liegen wagerecht nebeneinander und bilden ein Rechteck, das $\frac{2}{6}$ dieses Quadrats ist. Die Höhe und die Breite des Quadrats sind einander gleich; die Höhe dieses Rechtecks, das $\frac{2}{6}$ dieses Quadrats ist, die wagerecht nebeneinander liegen, ist dem halben Teile der Höhe, folglich auch dem halben Teile der Breite des Quadrates gleich, und seine Länge ist 2 mal dem 3. Teile der Breite des Quadrates gleich; die Höhe des Rechtecks ist also $\frac{1}{2}$ und seine Länge $\frac{2}{3}$; nun hat ein Halbes $\frac{3}{6}$ und $\frac{2}{3}$ haben $\frac{4}{6}$ und $\frac{3}{6}$ sind 3 mal der 4. Teil von $\frac{4}{6}$, folglich ist die Höhe dieses Rechtecks, das 2 wagerecht nebeneinanderliegende Sechstel des Quadrates ist, 3 mal dem 4. Teil seiner Länge gleich?“ Harnisch urteilt über Pestalozzis ABC der Maßverhältnisse, daß sie selbst bei dem besten Gebrauch zu nichts führen konnten, daß sie aber den Anstoß zu einer bessern Behandlung der Raumlehre gegeben haben.

Pestalozzis Ideen wollte sein Schüler und Mitarbeiter Joseph Schmid in den „Elementen der Form und Größe“ (1809—1811) weiter ausbauen. — Schmid behandelt Punkt, Linie und Fläche; er beabsichtigt Kraftbildung. Aber auch seine Bemühungen werden nur zu einem „wirrigen Linien-Kombinationstreiben“; es ist „eitle Kraftanstrengung ohne Zweck, ohne Ziel, ohne Beziehung zur Wissenschaft und zum Leben“. Doch urteilt Diesterweg in seinem Wegweiser über Schmids Elemente: „Zum Selbststudium, und um die Quelle kennen zu lernen, aus welcher alle neueren Elementarschriftsteller Geist oder Form geschöpft haben, verdient das Buch auch jetzt noch eine ernste Empfehlung. Joseph Schmid, wie die ganze Pestalozzische Schule in ihrer ersten und besten Zeit, fehlen darin, daß sie einen übergroßen Wert in die elementarische Behandlung möglichst elementarer, aber zusammengesetzter

und daher schwieriger Aufgaben setzten; aber die Pestalozzische Methode erzeugte Lehrer, und die Schriften der Pestalozzianer tränkten den Leser mit pädagogischem Geiste."

Schurig charakterisiert die Bestrebungen Pestalozzis und seiner unmittelbaren Schüler folgendermaßen: „Der Unterricht geht von den Elementen der Anschauung aus, schreitet in peinlicher Lückenlosigkeit fort und kompliziert die elementarsten Übungen bis zu den schwierigsten Anforderungen. Es dominiert das Linien-Kombinationswesen. Der Unterricht ist formell anregend, aber stofflich ohne materiellen Wert, ohne Rücksicht auf Wissenschaft und Leben, einseitig subjektiv, bloße Kraftbildung erstrebend. Verbindung mit dem Zeichnen aus freier Hand."

6. Pestalozzianer.

Wie im Rechnen, so war auch in der Raumlehre die Anzahl der nach Pestalozzischen Ideen bearbeiteten Bücher eine sehr große. Nur einige derselben sollen herausgehoben und hier erwähnt werden.

1. Hoffmann (bayerischer Oberschulrat); Geometrische Anschauungslehre, eine Vorbereitung zum leichten und gründlichen Studium der Geometrie (1815). Das Buch zerfällt in 4 Kurse. In den beiden ersten Kursen werden in pestalozzischer Art Linien, Winkel und Figuren in ihren Arten und Teilen angeschaut; der 3. Kursus bringt die scharfe Bestimmung der Begriffe, und der 4. Kursus leitet zur Behandlung der Geometrie in euklidischer Manier über. Hoffmann erstrebt also auf Grund der Anschauung Einsicht in die geometrisch-wichtigen Verhältnisse und ein sicheres Wissen, das die weitere Betreibung des Gegenstandes gestattet. Sein Buch gibt also einen Vorkursus für den wissenschaftlichen Unterricht und ist nicht für Volksschulen geschrieben.

2. Ladomus (Professor); Geometrische Konstruktionslehre für Lehrer und Lernende; ein Versuch geometrischer Geistesgymnastik (1812). Auf dem Boden der pestalozzischen Anschauung aber unter Vermeidung aller pestalozzischen Extreme sucht Ladomus die gewonnenen geometrischen Kenntnisse durch die äußerst bildenden Konstruktionsaufgaben zum freien Eigentum der Schüler zu machen (Lehre von den Daten). Das kann nicht durch Vor- und Nachsprechen, sondern nur auf dem Wege der Entwicklung erzielt werden. Hierbei sucht er die Schüler von der äußeren Anschauung der Figur möglichst bald zu der inneren Anschauung zu führen. So sagt er z. B. nicht: Ich verbinde die beiden Endpunkte mit dem Punkt A, sondern: Ich verbinde die beiden Endpunkte mit dem dritten Winkelpunkt des Dreiecks usw. In dieser Anleitung zum Selbstfinden und in dem Bestreben, die innere Anschauung zu erzeugen, liegt der Fortschritt des äußerst lehrreichen Buches.

3. von Türk (Regierungsrat); „Leitfaden zur Behandlung des Unterrichts in der Formen- und Größenlehre" (1817). Türk sucht den Schmidschen Weg zu verbessern, kann sich aber von der dort geübten Lehrweise ebensowenig, wie von der Breite der Form und dem Mangel des Fortschrittes frei machen. Trotzdem hat sein Buch der Raumlehre den Weg in viele Schulen gebahnt.

1. die Bemühung, [illegible] ehre für Volksschulen;
kennen und benennen zu [illegible] 817); II. Teil: Ebene räum-
in den Stand gesetzt werden, [illegible] vom Körper aus, aber bald
zu machen, z. B. Kugel [illegible] Trotzdem er den Schmidschen
Umgebung und Spiel [illegible] zu vermeiden bestrebt ist, geht
werden); 2. es dahin [illegible] so z. B. in der Aufgabe: „Von
zu können; 3. das Rau[illegible]ner andern Richtung gleichlaufend.
schauung gewinnt das [illegible] andern Punkt 5 gerade Linien.
hältnisse aller Formen [illegible]stehen? Andererseits betont er,
anschauung". [illegible]dungslehre, die Kraft der inneren

Seine Grund[illegible]weck des mathematischen Unterrichts.
der Anschauung, od[illegible] die Vorstufe des geometrischen

Die Unterri[illegible] für den Handwerker und Landmann
und Quadrate [illegible]ndten Raumlehre finden. — Besonders
Vorzeigen und [illegible] zu dem 2. Teile von Graßmanns
beides [illegible]nden Grundsätze für die Behandlung
Unterrichts[illegible] nach pestalozzischen Anregungen ent-
[illegible] Entwicklung beruht und nach denen
[illegible] Fortschritts oder Rückschritts beurteilt
[illegible] Weise die hauptsächlichsten Stellen

[illegible]gen Methode erteilte Unterricht in der
[illegible] des Verstandes voraus; denn eine zu-
[illegible] Schlüssen gehört nicht für Kinder
[illegible]ersehen werden.
[illegible] Evidenz (augenscheinliche Gewißheit
[illegible] Schlüssen und durch allgemeine
[illegible]ch Begründung auf die Konstruktion
[illegible] Anschauung zu erreichen sein. Der
[illegible]isch vom Einfachen zum Zusammengesetzten

[illegible]des durch Anschauung, nicht durch den
[illegible]auung ist nicht die äußere sinnliche, sondern
[illegible]Tätigkeit des konstruierenden Geistes, gemeint.
[illegible]en über das Produkt der Konstruktion (das
[illegible] einen hohen Wert.
[illegible]onstruktion muß ein Lehrsatz sein, und die
[illegible] Worten auszudrücken, ist ein wesentlicher

[illegible]assen zu einem organisch gegliederten Ganzen

[illegible] Anschauungen und zum Räsonnieren Be-
[illegible]enen Unterrichtszweig zu fördern, der einen
[illegible]bildung und auf Beförderung einer geordneten
[illegible]den kann.
[illegible]Methodik dieser Zeit sei auch hier auf Schurigs
[illegible] Versagen nach Pestalozzischen

Ideen hergestellt, in welchem sowohl formeller als materieller Gewinn erstrebt wird, Kraftbildung an einem Stoffe, der mit Rücksicht auf wirklichen geometrischen Gehalt ausgewählt ist, Beschränkung des Linien-Kombinationstreibens. In ausführlichen Anleitungen für die Lehrer . . . wird eine Vermittlung zwischen subjektiver und objektiver Methode erstrebt.“

7. Harnisch und Diesterweg.

Mit den Namen Harnisch und Diesterweg verknüpft sich die Blütezeit der Raumlehre, die nahezu zur Vollkommenheit gebracht wird nach Auswahl und Anordnung des Lehrstoffs nach zweckmäßiger Verbindung von Anschauen und Verstehen, nach Erkennen und Ausführen, nach Wissenschaft und Leben. Die grundlegenden Werke sind:

1. „Die Raumlehre oder die Meßkunst, gewöhnlich Geometrie genannt, mit gleichzeitiger Beachtung von Wissenschaft und Leben für Lehrer und Lerner“ von Dr. W. Harnisch, Seminardirektor in Weißenfels, 2. Aufl. 1837. (Die erste Auflage ist 1821 noch in Breslau verfaßt worden.)

2. „Leitfaden für den ersten Unterricht in der Formen-, Größen- und räumlichen Verbindungslehre“ von Dr. F. A. W. Diesterweg, Seminardirektor in Berlin. In der 3. Aufl. (1836), für Schüler bestimmt, welche an mathematischen Gegenständen denken lernen wollen.

3. Anweisung zum Gebrauch des Leitfadens für Lehrer, welche mathematische Gegenstände als Mittel zur allgemeinen Bildung benutzen wollen von Diesterweg, 2. Aufl. 1837.

4. Raumlehre oder Geometrie, nach den jetzigen Anforderungen der Didaktik, für Lehrende und Lernende von Diesterweg, 2. Aufl. 1843.

Harnisch spricht sich in der Vorrede zu seinem Buche, der schon erwähnten „Vorrede für Sachkundige“ in fast erschöpfender Weise über die Methode des geometrischen Unterrichts aus. An anderen Stellen ist schon das Wichtigste aus dieser Vorrede angeführt worden; hier soll nur noch erwähnt werden, daß er dem Lehrer, der keine Begeisterung erwecken und keine Jüngerschaft erziehen könne, die Schuld an den geringen Unterrichtserfolgen zumißt. Begeisterung muß aber erweckt werden; sogar in der Volksschule muß Raumlehreunterricht erteilt werden. In seinem Buche selbst sind folgende Momente des methodischen Fortschritts hervorzuheben:

1. Das Messen wird weiter nach vorn gerückt und mehr von der Anschauung als von Begriffserörterungen abhängig gemacht.

2. Die Anwendung folgt unmittelbar den Lehren; denn schiebt man die Anwendung bis ans Ende, so sieht der Schüler lange Zeit gar nicht ein, daß sein Schulwissen ihn auch ins Leben führt, und viele Schüler bleiben in einer sonderbaren inneren Bildungsentzweiung stehen, da sie nur Begründung, aber keine Anwendung, bekommen.

3. Die Scheidung des geometrischen Stoffs in räumliche Verbindungs- und räumliche Größenlehre, also zwischen Linienverbindungen und Vergleichen und Ausmessen der Linien, Winkel usw. ist aufgehoben.

4. Die Übungen mit Zirkel und Lineal müssen schon die Anfänger in sorgfältiger, sauberer und genauer geometrischer Darstellung anstellen; die Raumlehrstunde soll nicht eine Freihandzeichenstunde sein.

5. Die Trennung von Anschauungs- und Verstandesstoff; denn die Raumlehre soll zwar in der Anschauung begründet sein, doch soll nicht alles, was Sache des Verstandes ist, der Anschauung überwiesen werden. „Mancher Lehrer trennt nicht gehörig die Sachen der Anschauung von den Sachen des Verstandes und bringt die Schüler, sobald sie zu den letzteren kommen, nicht gleich auf die richtige Verstandesbahn."

6. Die Berücksichtigung der Körper von Anfang an, da die Strich- und Flächenanschauung erst durch die Körperanschauung einen wahren Hintergrund gewinnt.

Für den Raumlehreunterricht der Volksschule hat Harnisch die richtige Methode festgestellt, wenn er den formalen Zweck an den theoretisch und praktisch wichtigsten Raumverhältnissen erstrebt.

Diesterweg bildet insofern einen Gegensatz zu Harnisch, als er mehr als Harnisch den formalen Bildungswert der Raumlehre betont und die Praxis darüber vernachlässigt. Seine methodischen Ansichten hat er vornehmlich in der Anweisung zum Gebrauch des Leitfadens für Lehrer, die mathematische Gegenstände als Mittel zur allgemeinen Bildung benutzen wollen, niedergelegt. Er sagt in der Vorrede zu dieser Anweisung: „Nach meiner Ansicht ist der Hauptzweck in der Behandlung der Raumlehre in Schulen ein formaler. Der Schüler soll durch den Unterricht in ihr denken und das Gedachte klar, fest und gewandt darstellen lernen. Ob er die einzelnen Sätze, an welchen er seine Geisteskraft übt, behält oder nicht, darauf kommt im wesentlichen nichts an, obgleich es in der Regel eine notwendige Folge der gründlichen Behandlung sein wird. Der erstrebte Zweck ist erreicht, wenn er sich durch den Unterricht in der Raumlehre Sicherheit und Gewandtheit in der Bearbeitung mathematischer und anderer, die Denk- und Darstellungskraft in Anspruch nehmender Gegenstände aneignet. — Darum sind auch allgemein mathematische und logische Fragen eingemischt. — Eben deshalb braucht sich der Grundunterricht nicht an irgendein System der Geometrie anzuschließen; er wählt vorzugsweise solche Sätze, welche die Entwicklung des jugendlichen Geistes in vorzüglichem Grade begünstigen, und welche, ohne vieles vorauszusetzen, eine vielseitige Behandlungsweise zulassen. — Die mündliche und schriftliche Bearbeitung der Fragen und Aufgaben führt die Schüler zu einer solchen Reife, daß ihnen die Erfassung jeder systematischen Raumlehre nicht die allermindesten Schwierigkeiten mehr macht." — Für Diesterweg ist das Hauptziel des mathematischen Unterrichts die Gewöhnung der Schüler an die Aufsuchung und Auffassung der Gesetze; in diesem Sinne sagt er: „Es ist für die Schüler viel wichtiger, den Weg zu einem Beweise, als diesen selbst kennen zu lernen."

Es ist nicht zu leugnen, daß Diesterweg mitunter zu weit nach der Schmidschen Linien- und Kombinationslehre hinüberneigte; aber trotzdem ist er für alle Zeiten vorbildlich als Meister der Methode. Oft mag ihm bei der Aufstellung der Forderungen nicht der einfache Volksschüler,

..n der Seminarist vorgeschwebt haben, und herrlich muß es gewesen .. zu den Füßen des großen Meisters zu sitzen. — Ich selbst neige ..h heute dazu, im Seminar den jungen Leuten auch nach dieser Hinsicht öfter starke Kost vorzusetzen und glaube mit Diesterweg, daß solch eine Stunde, die bei strenger geistiger Zucht im Suchen der mathematischen Wahrheiten und im Gestalten der gefundenen Ergebnisse vergangen ist, ihren bleibenden Wert hat, selbst wenn die gefundenen Sätze wieder vergessen sein sollten. Eine solche Stunde wird anstrengend sein; aber mit bequemem Wesen ist mathemathische Arbeit nicht zu leisten; es gibt eben keinen Königsweg zur Geometrie. — Und unsere Volksschüler? Auch sie verlangen und vertragen ein gut Teil Diesterwegscher Methode, sofern die Grundlagen nur recht gelegt sind. An dem Leuchten der Augen und an der vollen inneren Beteiligung spürt man die Wirkung der exakten Arbeit. — Selbstverständlich soll man das eine tun und das andere nicht lassen. Derartig unterrichtete Schüler werden dann auch die „praktisch wichtigsten Raumverhältnisse“ (siehe Harnisch) leicht durchdringen und beherrschen.

Nach dieser Abschweifung mögen noch einige Bemerkungen und Winke des Altmeisters Diesterweg über die Raumlehrmethode angeführt werden. In der Anweisung zum Leitfaden sagt er: „Vorläufige Beurteilungen über das entstehende Resultat sind bei allen Aufgaben der Mathematik sehr zu empfehlen. Das Anschauungsvermögen wird dadurch ebensosehr geübt wie die Urteilskraft. Man erweckt auf diese Weise den sogenannten praktischen Blick oder das die Wahrheit unmittelbar erfassende Wahrheitsgefühl . . . Was so in Anschauung und unmittelbar als richtig erkannt worden ist, sichert später die wissenschaftlich aufgestellte Raumlehre durch strenge Beweise, die dem Verstande angehören. Die Gewißheit durch Anschauung und Gefühl ist eine andere als die durch Reflexion und Schluß. Jene soll dieser vorgehen und dieselbe einleiten. Der Elementarschüler und der aufs praktische Leben beschränkte Mensch kann sich mit der ersten Art, die Wahrheit zu erkennen, in vielen Fällen begnügen, und er muß es, da die bestehenden Verhältnisse des Lebens und der Schule es nicht gestatten, alle Wahrheiten durch strenge Beweise in Begriffen und Schlüssen zu sichern.“

Schon aus dem vorstehenden ist zu ersehen, daß Diesterweg keinesfalls einseitig Pestalozzische oder Schmidsche Ziele verfolgt; noch mehr geht das aus folgenden Worten hervor: „Die notwendige Vorstufe der Geometrie, die Formenlehre in der Volksschule, wendet sich in der Hauptsache der Herleitung der Sätze aus einfachen konkreten Anschauungen zu, ohne dabei immer das bereits Festgestellte zu Hilfe zu nehmen. Die Gewißheit wird hier vorherrschend durch unmittelbare Anschaulichkeit und durch kombinatorische Verbindungen auf Grund derselben erzielt. Für syllogistische Spitzfindigkeiten ist der 10- bis 12jährige Knabe nicht reif; aber einfache Gründe und kleine Schlüsse kann und soll er finden und formulieren; er kann die Sache nur aus dem Groben herausarbeiten. An einen praktischen Lehrgang für Volksschulen dürfen daher keine wissenschaftlichen Anforderungen gestellt werden.“

Zum Schluß sei noch eine Diesterwegsche Mahnung für den Lehrer der Raumlehre angeführt. Diesterweg fordert: „Die höchste Deutlichkeit und Bestimmtheit der Fragen, also auch die prägnanteste Betonung der den Sinn der Frage vorzugsweise enthaltenden Wörter und unermüdetes Dringen auf vollständig genaue Darstellung sind das beständige Bestreben des Lehrers. Von passivem Aufnehmen oder gar von gedächtnismäßigem oder gedankenlosem Auswendiglernen darf nirgends auch nur eine Spur vorkommen.“

8. Die weitere Verarbeitung der bisher aufgestellten methodischen Gesichtspunkte bis zum Erlaß der Allgemeinen Bestimmungen vom 15. Oktober 1872.

Wir können nicht verkennen, daß die methodische Behandlung der Raumlehre in der Volksschule besonders durch Harnisch und Diesterweg einen gewaltigen Aufschwung genommen hatte. Leider aber blieb das Bild von dem Stand des Raumlehreunterrichts in der Schule ein ganz anderes; der Raumlehreunterricht blieb das Stiefkind der Schule. Meist nur in den Bürgerschulen der Städte fand die Raumlehre ein bescheidenes Plätzchen; in den Dörfern stellte man entweder gar keinen Versuch an, oder man brachte den Unterricht weder nach formaler noch nach materialer Seite zu einem Abschluß, und so blieb die Schulpraxis weit hinter der Theorie zurück. Und auch in den Städten kränkelte der Raumlehreunterricht. Man fand trotz der besten Anleitungen nicht den für die Schule passenden goldenen Mittelweg und verweichlichte entweder die Kinder durch bloßes Plausibelmachen, oder man fügte in Euklidscher Weise Beweis an Beweis und vergaß, daß die Vorkenntnisse und die Anwendung fehlten.

Als nun in den vierziger Jahren des vorigen Jahrhunderts die Reaktion gegen das einseitige formalistische Treiben in der Volksschule eintrat, sollte der Volksschule bei ihrer beschränkten Zeit nur Inhaltvolles zur Hebung des inneren Menschen und nur praktisch Verwertbares geboten werden; es sollte die Anzahl der Unterrichtsfächer und die Ausdehnung der Unterrichtsstoffe beschränkt, und nur wenige inhaltvolle Stoffe zum bleibenden Eigentum der Menschen gemacht werden. Es ist selbstverständlich, daß dieser Richtung auch die Raumlehre in der Volksschule zum Opfer fiel, um so mehr als sie, wie schon oben angeführt, eine allgemeine Ausdehnung noch gar nicht gewonnen hatte und die in den Hauptschriften niedergelegte methodische Behandlung der Raumlehre nicht etwa ein Bild gab von dem Stand der Raumlehre in den Schulen. — Übrig blieben nur einige praktische Raumberechnungen, die im Rechenunterricht vorgenommen werden sollten und eine Formenlehre, die mit dem Zeichnen verbunden wurde. Die Raumberechnungsaufgaben wurden in die Volksschulrechenbücher aufgenommen, gewöhnlich an letzter Stelle, und so kam es, daß sie in Wirklichkeit recht selten durchgenommen wurden. Für die Verbindung der Raumlehre mit dem Zeichnen wurden viele praktische Anweisungen geschrieben. Erwähnt sollen hier werden:

1. „Die Formen-, Maß- und Körperlehre oder die Elemente der Geometrie“, methodisch bearbeitet von J. Ramsauer (1826) und

2. „Die Formenlehre in Verbindung mit den reinen Elementen des freien Handzeichnens mit den Andeutungen für methodische Behandlung der geometrischen und der perspektivischen Darstellung der Grundformen; ein Handbuch für Lehrer an Elementarschulen“ von Tobler (1836).

Ramsauers Formen-, Maß- und Körperlehre will „dem Schüler einen Reichtum von Formen zuführen, die auf Erscheinungen angewandt werden, die den Schüler im Leben umgeben und die Auffassungs-, Einbildungs- und Erfindungskraft desselben anregen; der Schüler soll so herangebildet werden, daß er später, er mag einen Beruf ergreifen, welchen er will, gewöhnt ist, über alles, was er ergreift, zu denken und das, was er tut, vermöge seines Denkens sowie vermöge seiner gebildeten Hand, seines gebildeten Auges und seines gebildeten, wenigstens geweckten Geschmackes, immer mehr zu vervollkommnen.

Toblers Anforderungen sind ebenfalls nicht gering. Er behandelt Punkt, Linie, Winkel und Fläche; er entwickelt die Form durch Anschauung und Fragen, so daß der Schüler die Form gefunden zu haben glaubt; er läßt das Gefundene durch Anschauen von Naturgegenständen erweitern und verlangt, daß der Schüler befähigt wird, schöne Zusammenstellungen aus den aufgefundenen gefälligen Formen zu erfinden. Bei der Wiederholung übt er sowohl die geometrische als auch die perspektivische Darstellung.

Gegen diese Formenlehre eiferten Harnisch (Handbuch des Volksschulwesens), Hentschel (Zeichenunterricht in Diesterwegs Wegweiser) u. a. entschieden. Harnisch nennt die Formenlehre, die zwischen Raumlehre und Zeichnen hergestellt ist, einen „Wechselbalg“, weder Geometrie noch Zeichnen.

Trotz des scheinbaren Stillstandes in der Praxis wird der Raumlehre-Unterricht fortgehend durch neue Schriften weiter bearbeitet, nur daß die meisten, der herrschenden Strömung entsprechend, ihre Bücher nicht für Volksschulen, sondern für gehobene Stadtschulen oder für Schullehrer-Seminare schreiben. Obwohl demnach diese Schriften an dieser Stelle kaum am Platze sein dürften, sollen doch einige der wichtigsten hier erwähnt werden, um die Verbindung zwischen dieser und der folgenden Zeit herzustellen.

1. „Die Raumlehre; ein mathematisches Handbuch für Volksschulen“, bearbeitet von Pechner, Rektor in Bienbach (1840).

Diesterweg nennt dieses Buch die neueste und vollständigste Formenlehre, die nach durchaus richtigen Prinzipien gearbeitet sei. Sie nimmt keine Rücksicht auf das Zeichnen.

2. „Geometrie für höhere Volksschulen und Schullehrer-Seminarien“ von Straub (1841). Dieses Buch verfolgt die genetische Methode, behandelt die Formenlehre als Vorbereitung und schließt daran die Geometrie; die Lehrsätze stehen am Schluß der Entwicklung.

3. „Lehrgang der Elementar-Geometrie für mittlere und niedere Volksschulen und für die Anfangsgründe in den höheren Schulen“ von Sobolewsky (1843).

Der Lehrstoff ist in 3 Kurse verteilt; in jedem Abschnitt kommt nur das zur Behandlung, was der Stufe angemessen erscheint. Sobolewsky gibt sehr viel schätzenswerte methodische Winke; solche sind z. B. „Sätze, deren Wahrheit sich schon der bloßen Anschauung aufdrängt, sollen nicht bewiesen werden;“ oder — „Alle Erklärungen und Beweise, welche der Lehrer selbst nur mit einem großen Aufwande von Nachdenken und Anstrengung festzuhalten vermag, gehören nicht in die Volksschule;“ oder „das Diktieren des Hauptinhalts der Lektionen ist bedenklich.“

4. Der erste Unterricht in der Geometrie; ein Leitfaden zur Entwicklung und Übung der Fassungskraft der Jugend. Für die Lehrer der Volksschulen, sowie für diejenigen, die sich selbst unterrichten wollen. Nach einer eigentümlichen Methode bearbeitet von Dr. Unger (1844).

Das Eigentümliche ist, daß das Buch eine Sammlung von Aufgaben ist, deren Auflösung der Anfänger selbst finden kann. Jede Auflösung führt zu gewissen Folgerungen, die die Behandlung der späteren Aufgaben wieder wesentlich erleichtern.

5. „Lehrbuch der Raumlehre für den Elementarunterricht“ von Otto Scholz. Erste Abteilung, enthaltend die ebene Raumlehre (1850).

Scholz sagt: „Niemand, der über Erziehung und Unterricht nachgedacht hat, wird der Raumlehre ihren Platz unter den Gegenständen des Elementarunterrichtes streitig machen.“ Er verurteilt die obenerwähnten Formenlehren, die die Raumlehre mit dem Zeichnen verbinden; er will, daß der Elementarunterricht in der Raumlehre sowohl die Hauptlehren der ebenen Geometrie als die der Stereometrie umfassen soll und führt mit Geschick durch Drehung und Fortbewegung von Linien und Flächen zur Einsicht in die Raumverhältnisse.

6. „Die Raumlehre mit Rücksicht auf die Bestimmungen der preußischen Regulative, faßlich und praktisch für Volksschulen behandelt von Franz, Rektor (1855).

Dieses sehr praktische Büchlein weist den verschiedenen Schulverhältnissen den Raumlehrstoff zu. Die gewöhnliche Volksschule soll sich mit dem Messen begnügen; die gehobene Volksschule behandelt die Linien, Winkel usw. vielleicht bis zur Kongruenz der Flächen; die mehrklassige Bürgerschule den Pythagoras und seine Anwendung auf das Ausziehen der Wurzeln.

9. Der Raumlehre-Unterricht nach den „Allgemeinen Bestimmungen vom 15. Oktober 1872.“

Die in Preußen am 15. Oktober 1872 herausgegebenen Allgemeinen Bestimmungen erheben die Raumlehre zu einem selbständigen Unterrichtsfach. Sie bestimmen in § 29

„Das Pensum der Raumlehre bilden: Die Linie (gerade, krumme, gleiche, ungleiche, gleichlaufende, nicht gleichlaufende), der Winkel und dessen Arten, Dreiecke, Vierecke, regelmäßige Figuren, der Kreis und dessen Hilfslinien, die regelmäßigen Körper.“

...en Schule kommt die Lehre von den Linien und
...it und Kongruenz der Figuren in elementarer

...ist sowohl mit demjenigen im
...bindung zu setzen. Während
...nien, Flächen und Körper
...en, lernen sie im ersteren
...ieren, die Länge der Linien,
...t der Körper berechnen."
...ischen Schulen ein selbständiger
...der den Lehrstoffen in § 13 der
...ten Schulverhältnissen wöchentlich
...tsschule wöchentlich zwei Stunden),
...andlung vorgeschrieben worden sind.
...te, was den Volksschulen an Raum-
...r es ist durchführbar und darf als
...dem später bei einer weiteren Entwicklung
..., kräftiges Bäumchen emporwachsen wird.
...cher geben wenig methodische Anleitungen,
...off. Die Gefahr ist nicht ausgeschlossen,
...ldung zu sehr vernachlässigt wird und der
...neignung positiven Stoffs in den zu Leitfäden
...weckt. — Anzuerkennen ist, daß die praktische
...chts, das Messen und Berechnen, gebührende

...h die Raumlehre in den von den „Allg. Best."
...n entwickelt zu haben. In diesen ging man häufig
...gemäße Ziel hinaus und suchte in dem Aufbau des
... des Raumlehrunterrichts, während die eindringende
...n hochgesteckten stofflichen Zielen zu kurz kam und
...hr bestand, daß Messen und Berechnen nicht genügend
...es wird die Hauptaufgabe der Methodiker und Praktiker
...und Mittelschulen die erreichbaren und notwendigen Stoffe
...Die Methodik als solche wird nach den vorstehenden Aus-
...n wenig Neues bieten können, der die Unterrichtswege der
...erksam verfolgt hat.
...mir gestattet, hier auch auf die im Königreich Sachsen gelten-
...iften für den Raumlehre-Unterricht in einfachen Volksschulen
...n. Ich habe diese dem „Lehrplan für die einfachen
...ulen des Königreichs Sachsen vom 5. Nov. 1878,"
...gegeben von F. W. Kockel, Geh. Schulrat, entnommen.
... heißt es:

Formenlehre.

1. Der Unterricht in der Formenlehre hat die für das gewöhnliche Leben nötige Kenntnis räumlicher Größen, sowie einige Fertigkeiten im Konstruieren und Berechnen derselben zu vermitteln.

2. Die Formenlehre ist der Regel nach auf die letzten beiden Schuljahre zu beschränken und in Schulen mit nur einem Lehrer teils dem Zeichen-, teils dem Rechenunterrichte einzuordnen.

3. Zu diesen Fächern ist der Unterricht auch dann, wenn besondere Lektionen für denselben bestimmt sind, in Beziehung zu setzen.

4. Der Unterricht hat in anschaulich entwickelnder Weise die Linien und Winkel, die gradlinigen ebenen Figuren, den Kreis und die bekanntesten Körper unter Ausschluß wissenschaftlicher Beweise zu behandeln.

5. Bei Konstruktionen und schriftlichen Berechnungen ist auf Sorgfalt der Ausführung streng zu halten.

6. Als Lehrmittel sind Zirkel und Lineal — auch für die Hand der Schüler — erforderlich.

Von den zahlreichen Schriften über Raumlehre für Volks- und Mittelschulen, die entweder nach den „Allg. Best." umgearbeitet oder neu erschienen sind, sollen folgende hier kurz erwähnt werden:

1. Adam, Geometrische Rechenaufgaben für Bürger-, Gewerbe- und Realschulen und zum Selbstunterricht.
2. Aderholdt, Lehrbuch der Planimetrie mit vielen Übungsaufgaben.
3. Egger, Geometrie für gehobene Volksschulen.
4. Fleischhauer, Praktischer Geometer.
5. Genau, Raumlehre für Volksschulen.
6. Kaselitz, Die Formenlehre in der Volksschule.
7. Kayser, Leitfaden der Raum- und Formenlehre für Volksschulen.
8. Kehr, Praktische Geometrie für Volks- und Fortbildungsschulen.
9. Kölzsch, Grundzüge der Raumlehre.
10. Lettau, Die Raumlehre, verbunden mit Zeichnen und Rechnen.
11. Liese, Die Raumlehre in der Volksschule.
12. Schürmann, Kleine praktische Geometrie.
13. Simon, Geometrie für Elementar- und Mittelschulen; ein mathematischer Leitfaden in heuristischer Darstellung.
14. Sonnenburg, Leitfaden für den Unterricht in der Geometrie.
15. Stubba, Aufgaben für rechnende Geometrie für Oberklassen und Fortbildungsschulen.
16. Schroeter, Ergebnisse des Raumlehre-Unterricht , 2 Hefte A) Raumformenlehre für einfache Volksschulen und als Vorstufe für den Raumlehrunterricht in mehrklassigen Volksschulen; B) Raumlehre für die Oberstufe mehrklassiger Volksschulen. (Wittenberg, R. Herrosé Verlag.)

u. a. m.

10. Die Raumlehre in der Volksschule nach der Herbart-Zillerschen Richtung.

Bei den bisher angeführten methodischen Schriften über Raumlehre sind diej nigen, die sich eng an Herbart anschließen, nicht mit enthalten; ihnen soll ein eigener Abschnitt gewidmet werden.

Aus dem allgemeinen Erziehungsziel der Herbartianer „Charakterstärke der Sittlichkeit," ergibt sich, daß die „Mathematik ihre Selbständigkeit im Erziehungsunterricht aufzugeben und sich als Hilfsgegenstand in den Dienst der Naturkunde zu stellen hat". Doch ist zur Erreichung des höchsten Erziehungszwecks der geometrische Unterricht unbedingt notwendig. Rein sagt daher in der Theorie und Praxis des Volksschulunterrichts nach Herbartschen Grundsätzen: „Es müssen, bis die begrifflichen Grundlagen gewonnen sind, in der Volksschule also die ganze Lehrzeit hindurch, Fragen und Aufgaben aus dem praktischen Leben, die Mathematisches in sich enthalten, stets den Ausgangspunkt der Betrachtung bilden. Aus allen Teilen des naturkundlichen Unterrichts, aus der eigenen Erfahrung, aus dem Zeichnen und den technischen Beschäftigungen können und sollen der Mathematik solche praktische Aufgaben als Ausgangspunkte für ihre Erörterungen zuwachsen." — Hieraus folgt, daß das Unterrichtsverfahren von dem bisher üblichen wesentlich abweichen muß. So geht Ziller bei den ersten geometrischen Betrachtungen nicht vom Würfelmodell, sondern von dem den Leipziger Kindern bekannten würfelförmigen Napoleonsstein bei Leipzig aus. In ähnlichen Fällen müssen Schulspaziergänge unternommen werden, damit die Kinder die notwendigen Anschauungsmittel kennen lernen. Das Modell findet erst beim späteren Unterricht Verwertung. Die zusammenfassenden Sätze (Lehrsätze) werden aus „praktischen Fragen abgeleitet und hierauf fleißig angewandt, so daß die Praxis der Ausgangspunkt und das Ziel des geometrischen Unterrichts zugleich ist".

Obwohl das Ideal der Herbart-Zillerianer noch nicht zur Verwirklichung gekommen ist, so ist doch nicht zu leugnen, daß die Erstrebung desselben manch befruchtenden Gedanken in die Methode der Raumlehre gebracht hat. Und wenn auch nicht alle Forderungen vollständig neu sind, so sind sie doch noch niemals so logisch aus dem allgemeinen Erziehungsziel abgeleitet und so nachdrücklich betont worden. Man kann nicht leugnen, daß selbst scheinbare Gegner dieser Richtung bewußt oder unbewußt Herbartsche Ideen in ihre Methode verwebt haben und gewiß nicht zum Nachteil derselben.

Von der hierher gehörigen sehr reichhaltigen Literatur seien hier nur folgende Schriften herausgehoben.

1. Herbart selbst bezeichnet als das Wesentlichste des geometrischen Unterrichtes: „Übung des Augenmaßes an Distanzen und Winkeln, und Verbindung dieser Übungen mit ganz leichten Rechnungen. Der Zweck ist nicht bloß, die Beobachtung für sinnliche Dinge zu schärfen, sondern vorzüglich die geometrische Phantasie zu wecken und damit das arithmetische Denken zu verbinden. Die Hilfsmittel müssen demnach sinnlicher Art sein." Herbart benutzt 17 Paare rechtwinkliger Dreiecke, die alle eine gleiche Kathete haben.

2. Fresenius, „Die Geometrie als Grammatik der Natur" betont besonders die oben schon erwähnte Idee der Herbartschen Richtung, daß die Geometrie aus der Natur- und Menschenwelt hergeleitet und auf dieselbe angewendet werden muß. Schroff klingt sein Ausspruch, daß die Geometrie das Wesen der Welt aufschließt.

3. **Bartholomäi**, „Geometrie der Volksschule". Ein sehr lehrreiches Buch. Bartholomäi beginnt den geometrischen Unterricht nicht mit den Herbartschen Dreiecken, sondern mit der Schulstube (Lagenverhältnisse der Wände, Richtungen, Entstehung des Winkels durch Drehung, Grenzen der Schulstube usw.); es folgen dann Uhr und Sonne (Zentrum, Peripherie, Radius usw.); hierauf folgt die erweiterte Betrachtung der Schulstube (Länge der Ausdehnungen, Winkelzeichen am Quadratnetz usw.), endlich folgt der Würfel (Ebene, Viereck, Rechteck usw.).

Er nimmt 3 Kurse an, 1. die geometrische Anschauungslehre (Erkennen und Zeichnen der wichtigsten Gebilde); 2. geometrische Übungen (Vergleichen und Zustammenstellen der Eigenschaften, Konstruktionen); 3. arithmetische Geometrie (Messen und Berechnen). Diese 3 Kurse werden aber nicht getrennt behandelt, sondern so verbunden, daß jeder an den übrigen Halt und Stütze findet.

Über das Ziel des Unterrichts sagt Bartholomäus: „Ob der Schüler eine mathematische Wahrheit gefaßt hat, erkennt man nicht daran, daß er dieselbe richtig nach- oder hersagt, auch nicht — wenn auch schon eher — daran, daß er an einem zweiten Beispiel vollzieht, was an einem ersten vollzogen worden ist, sondern wenn er die Sache selbst findet, gebrauchen und anwenden kann". Zur Erreichung des Zieles führt nach Bartholomäi: „Langsam gehen, viel üben, oft und in allen möglichen Richtungen wiederholen".

4. **Pickel**, „Geometrie der Volksschule, neu bearbeitet von Dr. Wilk, 2 Teile, Formenkunde und Formenlehre". — Die Formenkunde ist für das 4. und 5. Schuljahr bestimmt und bietet die wichtigsten Raumformen; die Formenlehre will im 6. bis 8. Schuljahr die geometrischen Einzelbegriffe zu kleinen Systemen ordnen.

5. **Mittenzweig**, Geometrie für einfache Schulen.

6. **Zigmann**, Geometrische Formenlehre.

7. Eine ganz eigenartige Stellung nimmt ein **Martin und Schmidt**, Raumlehre, Nach Formengemeinschaften bearbeitet. — Während Bartholomäus einzelne dem Anschauungskreise der Kinder entnommene Gegenstände in den Mittelpunkt des geometrischen Unterrichts stellt, schließen Martin und Schmidt die geometrischen Belehrungen an Sachgebiete an, die sie Formengemeinschaften nennen. Im 1. Heft ist die Formengemeinschaft „**Wohnort**" in den Mittelpunkt des Raumlehreunterrichts gestellt und an dem Wohnhaus und der Kirche werden u. a. die Begriffe Stubenraum, Fußboden, Hauskasten, Baugrube, Torpfeiler, Kirchturm, Zifferblatt, Spitzbogenfenster gewonnen; im 2. Heft ist es die „**Feldmark**", und zwar Acker, Wiese und Wald, an denen die Kinder Ackerstücke, Wagenrad, Baumstamm, Balken usw. kennen lernen sollen; im 3. Heft werden die verschiedenen Werkstätten, Verkehrswege u. a. als „**Kulturstätten**" betrachtet und daran u. a. folgende Begriffe gewonnen: Kugel, Ellipse, Sehne, Tangente usw.

Der hier sehr kurz skizzierte Lehrgang hat viel Freunde, aber, man möchte sagen naturgemäß, noch viel mehr Feinde gefunden. Es wird dem nach der alten Art eingefleischten Praktiker schwer, die fachwissenschaft-

liche Trennung der Geometrie (die Lehre von den Linien, Winkeln, Flächen und Körpern) aufgehoben zu sehen und ein nach seiner Auffassung wüstes Durcheinander an der Stelle des geordneten Lehrgangs zu finden. Fehlende Anschauung der Lehrobjekte, buntes Durcheinander der Lehrstoffe, Abweichen von der alten bewährten Anordnungsregel „vom Leichten zum Schweren“ und andere Einwürfe sind nicht unberechtigt. Und doch wird ein tüchtiger Lehrer mit einer wenigstens mäßig guten Klasse im geometrischen Unterricht auch bei dieser Behandlung des immerhin spröden Lehrstoffs gewiß nicht nur Interesse, d. i. Aufmerksamkeit, sondern auch Kenntnisse erzielen, wenn er die im Leitfaden gebotenen Stoffe frei und geschickt auf die Verhältnisse seiner Schule anzuwenden versteht.

B. Theorie und Praxis des Raumlehre-Unterrichts in der Volksschule.

11. Der Stoff des Raumlehre-Unterrichts nach den Allgemeinen Bestimmungen.

Der Stoff des Raumlehre-Unterrichts ist in den „Allgemeinen Bestimmungen“ gegeben (vgl. Abschnitt 9). Es heißt dort: „Das Pensum der Raumlehre bilden: Die Linie, der Winkel und dessen Arten, Dreiecke, Vierecke, regelmäßige Figuren, der Kreis und dessen Hilfslinien, die regelmäßigen Körper.“ — Besonders wichtig nicht nur für die Gruppierung, sondern auch für die Behandlung des Stoffes ist die weitere Bestimmung: „In der mehrklassigen Schule kommt die Lehre von den Linien und Winkeln und von der Gleichheit und Kongruenz der Figuren in elementarer Darstellung hinzu.“ Kommt in der mehrklassigen Schule die Lehre von den Linien usw. hinzu, so ist damit gesagt, daß in den einfachsten Schulverhältnissen (einklassige und Halbtagsschule) und wohl auch in dem ersten Jahrgang der Oberstufe der mehrklassigen Schule die Linien, Winkel, Flächen und Körper nach anderen Gesichtspunkten behandelt werden sollen. Nun unterscheiden wir außer der Lehre von den Linien usw. noch die Bekanntschaft mit denselben, die Beschreibung und die Berechnung derselben. Die Kenntnis der geometrischen Objekte kann nur auf dem Wege der Anschauung gewonnen werden; aus dieser genauen Bekanntschaft folgt von selbst die Beschreibung derselben, und hiermit läßt sich ungesucht die Berechnung der Größen verknüpfen. Die Anschauung ist also auch hier das Fundament der Erkenntnis, und wir nennen daher diese Art der Behandlung der Raumformen den Anschauungskursus oder die Raumformenlehre. Raumformenlehre ist demnach nach den Allgemeinen Bestimmungen der Unterrichtsstoff in der Raumlehre in den einfachen Schulverhältnissen, aber auch in dem ersten Jahrgang der Oberstufe der mehrklassigen Schule; denn diese Bestimmungen sagen ausdrücklich: „In der mehrklassigen Schule kommt die Lehre . . . hinzu.“

Der Kursus in der einklassigen Schule ist einjährig, und da auch nur in einem Jahrgang der mehrklassigen Schule Raumformenlehre getrieben werden soll, können die zur Behandlung kommenden Stoffe dieselben sein. Auf dem Wege der Anschauung lernen die Kinder die in der Praxis ihnen nahe kommenden Raumformen kennen. Das sind: 1. die Linien in ihren verschiedenen Arten nach Größe, Gestalt, Richtung und Lage zueinander; 2. die Winkel und die Arten derselben; 3. die Flächen, Ebenen und Figuren und die Einteilung der letz-

teren; 4. die Hilfslinien an den Figuren, besonders bei dem Kreise, wie Diagonale, Sehne usw.; 5. die regelmäßigen Körper, d. h. nicht die regelmäßigen Körper im engeren Sinne (Flache), sondern die mit einfachen Hilfsmitteln meßbaren Körper, nämlich Würfel, Säulen, Pyramiden und Pyramidenstumpfe, Walzen, Kegel, Kegelstumpfe und die Kugel. Im unmittelbaren Anschluß an die gewonnene Kenntnis jeder einzelnen Raumgröße folgt auf der Formalstufe der Zusammenfassung die Beschreibung derselben und hieran schließt sich die Berechnung. Die zu letzterer erforderliche Kenntnis der Maße (Längen-, Flächen- und Körpermaße) wird in fast allen Fällen schon im Rechenunterricht erworben sein und wird hier durch Wiederholung befestigt werden.

In dem oberen Jahrgange der mehrklassigen Schule tritt die Lehre von den Linien usw. hinzu. In elementarer Darstellung, d. i. auf dem entwickelnden Unterrichtswege, lernen hier die Schüler die einfachsten Beziehungen der Raumgrößen zueinander kennen. Das Verständnis der einzelnen Beweise, die selbständige Vorführung derselben und vor allem das Auffinden solcher Beziehungen und Beweise, sowie die Lösung einfacher Konstruktionsaufgaben wirkt in hohem Maße formalbildend. Wie weit nun in jedem einzelnen Falle der Stoff herangezogen werden kann, hängt wesentlich von dem Schülermaterial, sonst aber auch von anderen Zufälligkeiten ab; doch stets berücksichtige man die Vorschrift der „Allg. Best." und gehe über die Kongruenz und die Gleichheit der Figuren nicht hinaus.

12. Die Vorbereitung des Raumlehre-Unterrichts auf der Unter- und Mittelstufe.

Die in der Raumlehre zu behandelnden räumlichen Gebilde treten jedem Menschen, also auch dem Kinde, jeden Augenblick entgegen. Es ist daher selbstverständlich, daß gewisse Raumbezeichnungen und Raumbegriffe schon vor dem Eintritt der eigentlichen Raumlehre im Unterricht erwähnt werden müssen. So können z. B. Körper, wie Haus, Turm, Mauer, Stein u. a., Flächen, wie Dreieck, Viereck, Kreis u. a., Linien, wie gerade und krumme, lange und kurze usw. vom ersten Schultage an bei keinem Unterrichtsfach vermieden werden. Wird nun auch der Lehrer darauf verzichten, vollständige begriffliche Definitionen zu entwickeln, so wird doch der Sinn der Kinder für Raumgrößen geweckt werden, und hierdurch wird die spätere unterrichtliche Behandlung dieser Größen wesentlich erleichtert. Außer dieser aus dem Wesen jedes Anschauungs- und anschaulichen Unterrichts entstammenden allgemeinen Vorbereitung des Raumlehre-Unterrichts können wir noch eine direkte Vorbereitung durch besondere Unterrichtsfächer feststellen. So ist ein Zeichenunterricht auf der Unter- und Mittelstufe ohne Berücksichtigung der Raumformen unmöglich, mag auch die Methode selbst heute ganz veraltet sein. Wenn aber heute schon unsere kleinsten Schüler angehalten werden, bekannte Gegenstände, wie Sägen, Tassen, Stühle, Uhren usw. zu zeichnen, so muß hierdurch der Sinn für Raumformen geweckt und gefördert und der Raumlehre-Unterricht hierdurch vorbereitet werden. Es braucht wohl kaum erwähnt

zu werden, daß auch dem Zeichenunterricht in den späteren Schuljahren eine gleiche, vielleicht eine noch höhere Bedeutung nach der angegebenen Richtung hin beigemessen wird. Deshalb haben auch schon im Jahre 1872 die „Allg. Best." auf die Verbindung (nicht Verschmelzung) des Raumlehre-Unterrichts mit dem Zeichenunterricht hingewiesen.

Auch die Verbindung des Raumlehre-Unterrichts mit dem Rechenunterricht verlangen die „Allg. Best.". Die praktische Bedeutung des Raumlehre-Unterrichts beruht auf dem Ausmessen der Raumgrößen. Nun werden nicht nur im Rechenunterricht die bezüglichen Berechnungsaufgaben gelöst, sondern, wie im Abschnitt 11 schon erwähnt worden ist, es werden die zur Ausmessung und Berechnung notwendigen Längen-, Flächen- und Körpermaße im Rechenunterricht vor dem Eintritt des Raumlehre-Unterrichts eingeführt und rechnerisch verwertet, und somit wird der zuletztgenannte Unterricht durch den zuerstgenannten besonders vorbereitet.

13. Die Auswahl und Anordnung des Lehrstoffs.

Wir haben im Abschnitt 11 Raumformenlehre und Raumlehre unterschieden und diese den einzelnen Schulgattungen und Schulklassen zugewiesen. Aus dem angeführten Abschnitt geht auch hervor, daß wir die Raumformenlehre nicht etwa als einen ungefähr vier Wochen dauernden Vorbereitungskursus angesehen wissen wollen, sondern daß sie ein vollständiges einen Jahreskursus umfassendes Lehrgebiet sein soll. Wir geben hier zunächst den Lehrstoff und wollen später versuchen, einzelne Angriffe gegen diese Auswahl zurückzuweisen.

Der Unterricht der Raumformenlehre gruppiert sich um bestimmte (typische) geometrische Körper. Wir weichen hierin von der Forderung der Herbartianer, die Naturkörper in den Mittelpunkt des Unterrichts zu stellen, ab. Jene gehen vom Naturkörper aus und kommen dann zum geometrischen Körper; wir schlagen den umgekehrten Weg ein. Der Naturkörper zeigt nicht immer die geometrischen Gebilde in ihrer Reinheit; auch fehlen in vielen Gegenden geeignete und notwendige Naturkörper, oder wenn sie vorhanden sind, ist ihre eingehende Beobachtung mit vielen, vielleicht kaum überwindbaren Schwierigkeiten verknüpft; daher gehen wir vom geometrischen Körper aus und übertragen möglichst bald die gewonnenen Begriffe auf die sonstigen Körper des Anschauungskreises der Schüler. Finden sich Naturkörper, die wirklich geeignet sind, die neueinzuführenden Begriffe zu veranschaulichen, so werden wir diese gern benutzen. So kann z. B. der geometrische Körper Walze leicht ersetzt werden durch die Ackerwalze, wenn sich Zeit und Gelegenheit findet, diese allen Kindern zugänglich zu machen. — Die Übertragung der entwickelten Begriffe auf die Natur erfolgt möglichst bald und möglichst allseitig. Aufgaben, die am typischen Körper eingeführten Formen in der Natur zu suchen, haben stets das volle Interesse aller Kinder erweckt.

An jedem dieser typischen Körper werden die charakteristischen Raumformen beobachtet, beschrieben und gemessen; jeder Körper ist also eine methodische Einheit.

Auch in der Raumformenlehre müssen zuerst die geometrischen Grundbegriffe anschaulich entwickelt, oder unter Berücksichtigung der in Abschnitt 12 angenommenen Vorbereitung zur rechten Klarheit gebracht werden. Das nach Länge, Breite und Höhe meßbare Schulhaus oder ein passendes Denkmal geben im Gegensatz zu dem unmeßbaren Weltenraum den Begriff Körper, und an diesem werden die Begrenzungsflächen, an diesen die Begrenzungslinien und an diesen die begrenzenden Punkte erkannt. Begriffe wie Oberfläche, Ebene, Figur, gerade und krumme Linie werden ebenfalls angeschlossen. Hierauf folgt als erster der typischen Körper der Würfel. An diesem lernen die Kinder durch Anschauung kennen: 1. Linien (gerade, gleichlaufende, zusammen- und auseinanderlaufende, senkrechte und wagerechte, und als Maß derselben Meter und Centimeter), 2. Winkel (Winkelpunkt, Schenkel, und nach der Übertragung auf Naturkörper durch Gegenüberstellung auch spitze und stumpfe Winkel und Grade als Winkelmesser), 3. gleichseitige, rechtwinklige Vierecke (Quadrate), Winkelsumme derselben und Quadratmeter und Quadratcentimeter als Maße der Quadrate, 4. endlich den Würfel selbst und Kubikmeter und Kubikcentimeter als Maße desselben. — An der aus Würfeln zusammenzusetzenden geraden vierseitigen Säule mit quadratischen Endflächen lassen sich die Begriffe Grund- und Seitenfläche, Rechteck, Winkelsumme desselben, Höhe der Säule und des Rechtecks und die Berechnung des Rechtecks und des Körpers selbst anschließen. Die schiefe vierseitige Säule mit quadratischen Endflächen, dann die vierseitige Säule mit Parallelogrammen als Grundflächen entstehen nach und nach aus dem vorigen Körper. Hierbei werden entwickelt die Begriffe Parallelepipedon, Parallelogramm, die Gleichheit von Parallelogrammen von gleicher Grundlinie und Höhe und der Parallelepipeda von gleicher Grundfläche und Höhe, die Einteilung der Parallelogramme, Winkelsumme der Parallelogramme u. a. Überall werden geeignete Aufgaben angeschlossen, hier z. B. das Ausmessen von Ackerstücken, Tischplatten usw. — Bei der Zerteilung der geraden rechtwinkligen Säule und der Zusammensetzung der Teile entstehen Nebenwinkel, ebenso Winkel an durchschnittenen Parallelen, die also, wenn man es für nötig hält, hier ebenfalls erwähnt werden können. — Durch die Teilung des Parallelepipedons durch einen Diagonalschnitt erhalten wir zwei dreiseitige Säulen; hieran lernen wir kennen die Diagonale, das Dreieck, die Kongruenz zweier Dreiecke (gleiche Seiten; 2 Seiten und der eingeschlossene Winkel, oder 1 Seite und 2 gleichliegende Winkel), Winkelsumme derselben, Einteilung und Berechnung der Dreiecke und Berechnung der dreiseitigen Säule. — Werden zwei dreiseitige Säulen von gleicher Richtung, die eine gleiche Seitenfläche haben, mit dieser zusammengestellt, so erhalten wir eine vierseitige Säule, und hieran schließen wir das Viereck und seine Berechnung, sowie die Berechnung der vierseitigen Säule. — Auch vielseitige Säulen, besonders solche mit regelmäßigen Endflächen, lassen sich aus dreiseitigen Säulen zusammensetzen. Hieran wird die Kenntnis des regelmäßigen Vielecks und seine Berechnung gewonnen. Zum Schluß folgt nun die Einteilung der geradlinigen Figuren und der Säulen.

Der durch Schnitte von den Kanten nach dem Mittelpunkte in sechs gleiche Teile geteilte Würfel ist der Ausgangspunkt für die Beschreibung und Berechnung der Pyramiden. An ihnen lernen wir gleichschenklige Dreiecke, deren Grundlinie, Schenkel, Höhe und Basiswinkel und die Berechnung der Pyramiden kennen. Als Einschaltung kann hier auf die zwei gleichschenkligen Dreiecke auf einer Grundlinie eingegangen werden; man sucht auf anschauliche Weise die Folgerungen aus dieser Figur sowie als Umkehrung dieser Folgerungen die einfachsten Konstruktionsaufgaben, nämlich das Halbieren eines Winkels und einer Linie, sowie das Errichten und Fällen von Senkrechten zum Verständnis zu bringen. Aus der Pyramide entsteht der Pyramidenstumpf; er bietet uns Trapeze als Seitenflächen und ähnliche Grundflächen. Die Berechnung der Trapeze wird in volkstümlicher Weise auf die des Dreiecks und die des Pyramidenstumpfes auf die der Säule zurückgeführt. — Von den krummflächigen Körpern wird die Walze auf die Säule, der Kegel auf die Pyramide und der Kegelstumpf auf den Pyramidenstumpf bezogen, und hieraus folgt die Berechnung dieser Körper. Außerdem lernen wir an ihnen den Kreis und seine Hilfslinien sowie die Mantelflächen der Körper kennen. Mit der Kugel und deren Beschreibung und Berechnung (zurückgeführt auf die Zerteilung und Berechnung des Würfels) schließt diese Raumformenlehre.

Durch die Raumformenlehre lernen die Kinder beobachten, messen, urteilen und schließen, auch gewinnen sie durch dieselbe in bildender Weise diejenigen mathematischen Kenntnisse, welche sie dereinst im Leben verwerten müssen. In dem großen Rahmen dieses Anschauungskursus ist überall Platz und Gelegenheit, Stoffe einzufügen aber auch Stoffe zu kürzen. So kann man z. B. im Anschluß an die an Würfel und Säule gewonnene Kenntnis von Quadrat und Rechteck recht bequem den Satz von der Größe des Quadrates über der Summe zweier Seiten kennen lernen und hieran anschließend das Quadrieren zwei- und mehrstelliger Zahlen und als Umkehrung hiervon das Quadratwurzelausziehen behandeln.

Auf diesem durch die Raumformenlehre wohl vorbereiteten Boden kann nun in der mehrklassigen Schule das bescheidene mathematische Pflänzlein gedeihen. Die Lehre von den Linien usw. dürfte folgenden Stoff verlangen:

Linie: Bestimmung der Lage und Schnittpunkte der geraden Linien.

Winkel: Arten derselben; Neben- und Scheitelwinkel; Winkel an durchschnittenen Parallelen.

Dreiecke: Winkelsumme derselben; Arten der Dreiecke; Außenwinkel; Kongruenzsätze: Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck; Verhältnis von Seiten und Winkeln im Dreieck; zwei gleichschenklige Dreiecke auf gleicher Basis; Konstruktionsaufgaben; die Durchschnittspunkte der Mittelsenkrechten und der winkelhalbierenden Ecktransversalen.

Das Parallelogramm: die Diagonale; seine Winkelsumme und Einteilung; Vergleichung der Diagonalen.

Das Trapez: die Mittellinie; das gleichschenklige Trapez; Teilung einer geraden Linie in x Teile.

Der Kreis: Linien und Winkel in und an demselben; Lage und Länge der Sehnen; Sehnen- und Mittelpunktswinkel; Tangenten und deren Winkel.

Das regelmäßige Vieleck: Bestimmungsdreieck; Größe der Winkel.

Die Gleichheit der Figuren: Parallelogramme und Dreiecke von gleicher Grundlinie und Höhe; Verwandlung und Teilung der Dreiecke und Parallelogramme.

Der Pythagoras und seine Anwendung.

Auch bei dieser Stoffauswahl ist stets zu bedenken, daß das Gebotene kein Schema ist, nach dem unter allen Umständen verfahren werden muß. Eine Erweiterung wird kaum nötig sein, aber man wird kürzen können, wenn der Zustand der Klasse es verlangt. Man versäume aber nie, durch Einschieben von zahlreichen Konstruktionsaufgaben den gebotenen Stoff zu beleben.

In einer neuen Methodik des Raumlehreunterrichts finden wir in bezug auf die Raumformenlehre nachstehenden Ausspruch von Biedermann: „Die Geschichte (ebenso auch die Raumlehre) ist kein Kartenspiel, das man beliebig mischen kann, um bald dieses, bald jenes Blatt zuerst auszuspielen". Es heißt dann in der angeführten Methodik weiter: „Dies gilt in gewissem Sinne auch dann, wenn sich der ganze Unterricht um die geometrischen Körper gruppiert, welche in entsprechender Anzahl nach und nach zur Anschauung gebracht werden ... Dadurch geht die notwendige Klarheit und Übersicht verloren, und der Schüler kommt nicht einmal dahin, ein kleines Gebiet, eine Stoffeinheit (die Winkel) klar zu überschauen ... Da an einem geometrischen Körper nicht immer alle Merkmale einer Raumform aufzufinden sind, so ergibt sich ein zweiter Mangel, die Zerstückelung der methodischen Einheiten, der fest begrenzten Stoffganzen ... Wir verkennen nicht die Bedeutung der mathematischen Körper als Veranschaulichungsmittel; aber wir können uns damit nicht einverstanden erklären, ihnen die ausschlaggebende Stellung im Lehrgange des geometrischen Unterrichts einzuräumen; ja wir halten sie nicht einmal für berechtigt, den unmittelbaren Ausgangspunkt für die geometrische Betrachtung zu bilden".

Wir können diesen Ausführungen nicht beipflichten. Der aufmerksame Leser und Beurteiler unserer Stoffauswahl wird in derselben den logischen Aufbau nicht verkennen können; es sind andere methodische Einheiten, die behandelt werden und durch deren Behandlung die Kinder mit dem für ihr Leben notwendigen Wissen und Können ausgerüstet werden. Nach unserer Stoffauswahl lernt jedes Kind auch in den einfachsten Schulverhältnissen die Raumformen kennen und berechnen. Was nutzt einem Kinde unserer einklassigen Schule z. B. die genaue Kenntnis einer anderen Stoffeinheit, vielleicht die der Winkel oder Dreiecke, wenn dadurch das Notwendige, wie die Berechnung der Figuren, des Zeitmangels wegen unberücksichtigt bleiben muß? Andrerseits bieten die Vergleichungen, Entwicklungen, Folgerungen usw., die sich bei der Raumformenlehre ergeben, so viel bildende Momente, daß das formale Ziel der Raumlehre nicht vernachlässigt wird. — Eine beinahe 20jährige Erfahrung in dem Unterrichtsbetriebe der Raumformenlehre in der ein-

klassigen Schule und in dem ersten Jahrgange der Oberstufe mit ihren Erfolgen bewirkt, daß ich meine Ansicht über die Richtigkeit der obenstehenden Stoffauswahl und Anordnung beibehalte. Es führen auch hier viele Wege den fleißigen Lehrer zum Ziel.

14. Die Verteilung des Lehrstoffs der Raumlehre.

a) Die einklassige Schule.

Sämtliche Kinder der Oberstufe nehmen am Raumlehr-Unterricht teil. Der Kursus ist einjährig, für den 2. Jahrgang der Oberstufe ist der durchzunehmende Stoff Wiederholung und Vertiefung; ihm fallen auch die schwierigeren Zusammenfassungen und Berechnungen zu. Das Ziel ist Auffassung und Beschreibung der Raumformen, Entwicklung und praktische Verwendung der Berechnungsregeln. Wöchentlich wird eine Stunde erteilt. Dem Unterricht wird zugrunde gelegt: Schroeter, Ergebnisse des Raumlehre-Unterrichts, Heft A.

April: Die geometrischen Grundbegriffe; der Würfel; die Linien und Winkel an demselben. (§§ 1 bis 3.)

Mai: Das Quadrat und seine Berechnung; die Berechnung des Würfels. (§§ 4 bis 6.)

Juni: Die gerade vierseitige Säule mit quadratischen Endflächen und deren Berechnung; das Rechteck und seine Berechnung. (§§ 7 bis 9.)

Juli und August: Das Quadrat über die Summe zweier Seiten; das Quadrieren und das Quadratwurzelausziehen in einfachster Form. (§ 10.)

September: Das Parallelepipedon und das Parallelogramm und deren Berechnung. (§§ 11 bis 13.)

Oktober: Neben- und Scheitelwinkel; Gegenwinkel an durchschnittenen Parallelen. (§§ 14 bis 16.)

November: Die dreiseitige Säule und das Dreieck; Vergleichung der Dreiecke; Berechnung von Säule und Dreieck. (§§ 17, 18, 20 u. 21.)

Dezember: Die vierseitige Säule und das Viereck; Berechnung derselben. Das Vieleck und seine Berechnung. (§§ 22 bis 24.)

Januar: Die Pyramide und das gleichschenklige Dreieck; Zwei gleichschenklige Dreiecke auf derselben Grundlinie und die sich daranschließenden einfachsten Konstruktionsaufgaben. (§§ 26 bis 31.)

Februar: Der Pyramidenstumpf und das Trapez. Die Walze und der Kreis. (§§ 35 bis 39.)

März: Der Kegel und die Kugel. (§§ 41, 42 u. 44.) Wiederholung.

b) Die mehrklassige Schule.

In Mädchenklassen kann nach Ministerial-Verfügung vom 6. 7. 1873 der [illegible] Raumlehre-Unterricht fortfallen; doch müssen die Schülerinnen [illegible] Zeichenstunden wenigstens über die Grundbegriffe [illegible]e auch für die Mädchenklasse ein gesonderter Raum[illegible] werden, so empfiehlt sich auch hier die Raumformen-

lehre in einjährigem Kursus nach der Stoffverteilung, die für die einklassige Schule aufgestellt worden ist.

Sind in mehrklassigen Schulen Knaben und Mädchen vereinigt, so können die Mädchen entweder von den Raumlehrestunden befreit werden (dafür wird der Unterricht in weiblichen Handarbeiten eingesetzt), oder sie werden mit den Knaben unterrichtet. Dann nehmen sie im 2. Jahrgang der Oberstufe am Unterrichtsstoff der Knaben (Raumformenlehre) teil, und im 1. Jahrgang bilden sie eine besondere Abteilung, in der der vorjährige Stoff wiederholt und durch Heranziehung von für Mädchen besonders geeigneten schwierigeren Verhältnissen vertieft wird.

Die Knaben bilden zwei Abteilungen. Die untere Abteilung behandelt die Raumformenlehre nach der für die einklassige Schule aufgestellten Verteilung. Da die Unterrichtszeit 2 Stunden wöchentlich beträgt, kann ein größeres Gewicht auf die Berechnung der Raumformen gelegt werden. Die obere Abteilung behandelt die Raumlehre. Hier soll vornehmlich die formale Kraft der Schüler an den Schlußformen der mathematischen Beweise und den selbständigen Konstruktionsaufgaben gebildet werden. Auf saubere schriftliche Darstellung ist besonders zu achten. Wöchentlich 2 Stunden. Dem Unterricht ist zugrunde gelegt: Schroeter, Ergebnisse des Raumlehre-Unterrichts, Heft B.

April: Linien und Winkel; Neben- und Scheitelwinkel. (§§ 1 bis 6.)

Mai: Winkel an durchschnittenen Parallelen. Die Umkehrungen dieser Sätze ohne Beweis. (§§ 7 bis 12.)

Juni: Das Dreieck; Winkelsumme im Dreieck; Einteilung der Dreiecke. Winkelsumme im Vieleck; Außenwinkel. (§§ 13 bis 18.)

Juli und August: Erster und zweiter Kongruenzsatz; gleichschenkliges Dreieck. (§§ 19 bis 22.)

September: Dritter und vierter Kongruenzsatz; Verhältnis der Seiten und Winkel im Dreieck zueinander; zwei gleichschenklige Dreiecke auf einer Grundlinie. (§§ 23 bis 27.)

Oktober: Linien von einem Punkte nach einer Geraden. Senkrechte im gleichschenkligen Dreiecks; Durchschnittspunkt der drei Mittelsenkrechten und der Halbierungslinien der drei Winkel des Dreiecks. Das Parallelogramm. (§§ 28 bis 34.)

November: Die Diagonalen der verschiedenen Parallelogramme und das Trapez. (§§ 35 bis 40.)

Dezember: Der Kreis. (§§ 41 bis 48.)

Januar: Dreieckskonstruktionen im Anschluß an den Kreis. Regelmäßiges Vieleck; Sätze von der Gleichheit der Figuren. (§§ 49 bis 54.)

Februar: Verwandlung und Teilung der Dreiecke und Parallelogramme. (§§ 55 und 56.) Gang durch die Flächenberechnung.

März: Quadrate über der Summe und über der Differenz zweier Seiten. Die Quadrate über den Seiten des rechtwinkligen Dreiecks. (§§ 57, 58 und 60.) Gang durch die Körperberechnung.

15. Die Ziele des Unterrichts in der Raumlehre.

Die Bedeutung des Raumlehre-Unterrichts ist keine geringe, und es war notwendig, daß die „Allgemeinen Bestimmungen“ die Raumlehre zu einem selbständigen Unterrichtsgegenstand der Volksschule erhoben. Der von ihr behandelte Unterrichtsstoff steht in so enger Verbindung mit den Verhältnissen des menschlichen Lebens, daß er nicht von ihm losgelöst werden kann. Durch diese enge Verbindung des Raumes und der Raumformen mit unserem Sein ergibt sich auch die enge Verwandtschaft der Raumlehre mit anderen Lehrfächern, die sich auch mit dem Raum beschäftigen.

Die Raumlehre behandelt nur die Formen, in denen die räumlichen Gebilde uns entgegentreten und deren Beziehungen zueinander. Diese Raumformen nehmen wir durch unser Auge wahr. Das Sehen ist ursprünglich, d. i. bei kleinen Kindern und bei geheilten Blinden, kein räumliches; erst nach und nach kommen wir dazu, die wirkliche Größe und Gestalt der Dinge auf Grund unsers Sehens richtig zu beurteilen, also die verschiedenen Raumgrößen zu sehen oder von den Raumgrößen den richtigen Begriff zu bekommen. Das Sehen oder die Überleitung der sinnlichen Aufnahme zum Begriff ist demnach ausbildungsfähig. Es wird demnach eine Aufgabe des Raumlehre-Unterrichts sein, das sinnliche Sehen so zu schärfen, daß unser Geist richtige Vorstellungen von den Raumgrößen erhält, so daß ein aufmerksames und richtiges Sehen erzielt wird. Die Raumlehre bildet also das Anschauungsvermögen der Kinder.

Die Raumgrößen sind verschieden. Die Hauptbegriffe Körper, Fläche, Linie und Punkt kommen mit Ausnahme des zuletztgenannten in so vielen Formen vor, daß unsere Denktätigkeit bei der Einordnung der einzelnen Raumgrößen und bei der Unterscheidung derselben wesentlich in Anspruch genommen wird. — Die Beziehungen der Raumgrößen zueinander, d. i. das Aufstellen von Lehrsätzen und Beweisen, die Lösung einer Konstruktionsaufgabe usw. erfordert eine nicht geringe Selbständigkeit des Geistes im Urteilen und Schließen und in der Heranziehung früher bewiesener Wahrheiten. — Zu alle dem gehört aber ein umfangreiches Wissen von Definitionen, Lehrsätzen, Formeln usw.; dieses Wissen muß ein sicheres und ein jeden Augenblick verwertbares sein. — Die Raumlehre wird daher mit Recht eine Gymnastik des Geistes genannt; denn sie vermittelt deutliche Begriffe und befähigt den Geist, klare Urteile und Schlüsse zu bilden, auch ist sie ein wesentlicher Faktor bei der Ausbildung des Gedächtnisses.

Das, was das Kind im Raumlehre-Unterrichte gelernt hat, muß es auch durch die Sprache korrekt wiedergeben können. Es ist keine kleine Aufgabe, eine Definition, einen Lehrsatz, eine Regel, einen Beweis oder eine Entwicklung sprachlich richtig zu formulieren. Also ist die Raumlehre auch für die Ausbildung der Sprache von nicht zu unterschätzender Bedeutung.

[illegible] Bekanntschaft mit den Raumgrößen, vor allem durch deren Ber[illegible]er Mensch imstande, den täglich an ihn im Leben heran-

tretenden Ansprüchen gerecht zu werden. **Die Raumlehre hilft also den Menschen für das praktische Leben erziehen.**

Die Herbart-Zillersche Schule verlangt von jedem Unterrichtsgegenstande, daß er die Erreichung des allgemeinen Erziehungszieles, „Charakterstärke der Sittlichkeit“, fördern helfe. Auch diese Forderung erfüllt der Raumlehre-Unterricht, wenn auch nur mittelbar. Schlaffe und bequeme Kinder werden nie in der Raumlehre befriedigen. Zur Erfassung der oft recht abstrakten Beziehungen der Raumgrößen aufeinander oder zur Sicherheit in den einzelnen Gliedern einer Entwicklungsreihe gehört eine scharfe Aufmerksamkeit, eine ernste Sammlung, eine beharrliche Tätigkeit, also ein energischer Wille. Hierin liegt ein nicht zu unterschätzendes sittliches Moment. Wenn wir nun weiter noch anführen, daß die Raumlehre das Wahrheitsgefühl stärkt, die Liebe zum Schönen pflegt, den Sinn für Ordnung und Gesetzmäßigkeit weckt, so sind das weitere Faktoren zu dem großen Produkte „**Erziehung zur Charakterstärke der Sittlichkeit**“.

16. Die Methode des Raumlehre-Unterrichts.

Es ist eine der dankbarsten Aufgaben des Lehrers in der Volksschule, Raumlehre-Unterricht zu erteilen; denn nirgends ist die Methode so klar bestimmt, so durchsichtig und leicht anwendbar und so erfolgreich wie beim Raumlehre-Unterricht. — Die neuen Vorstellungen müssen auf dem Wege der Anschauung gewonnen werden; sie rufen verwandte ältere Vorstellungen wach und verknüpfen sich mit ihnen, und so entstehen neue Begriffe, Urteile und Schlüsse; sie verlangen endlich mit Notwendigkeit die Anwendung im praktischen Leben. Bei der Behandlung eines jeden Raumlehrstoffes tritt der Apperzeptionsprozeß mit derselben Schärfe hervor wie der darauffolgende Abstraktionsprozeß, und beide verlangen wieder eine Übertragung in die Praxis. Wir wollen das soeben Behauptete bei der Behandlung des Trapezes nachweisen. Das Trapez sehen wir zuerst als Seitenfläche des Pyramidenstumpfes, aber auch auf Dächern usw. kann es angeschaut werden. Die vier Seiten desselben erinnern an schon bekannte Vierecke, doch unterscheidet es sich von diesen durch die zwei nichtparallelen Seiten. Das Trapez ist also ein Viereck, das nur zwei parallele Gegenseiten hat. Die durch die Mitte einer nicht parallelen Seite gezogene Parallele zu der Gegenseite verwandelt das Trapez in ein Parallelogramm und führt zur Berechnung desselben $= \frac{(G + g)}{2} \cdot H$. Nun werden Dachflächen, trapezförmige Gärten, Ausschachtungen usw. berechnet. In vorstehendem einfachen Lehrstück lassen sich genau die 3 Stufen des Lernprozesses, nämlich die Stufe der Anschauung, die des Denkens und die der Anwendung, unterscheiden.

Es ist selbstverständlich, daß ein so methodisch gearteter Unterrichtsstoff sich auch leicht in die auf psychologischer Grundlage aufgebauten **Formalstufen** schickt. Die Gliederung des Stoffes in **methodische Einheiten** ist nirgends leichter als hier auszuführen, und selbst bei der viel angegriffenen, im Anschluß an die typischen geometrischen Körper erteilten

Raumformenlehre liegt in diesen Körpern die methodische Einheit. Von der **Zielangabe** gilt auch hier, daß sie sachlich gehalten sein muß; sonst geht sie am Ohr des Schülers vorbei und gibt weder den Gedanken der Schüler eine bestimmte Richtung, noch weckt sie das Interesse und den Willen derselben. Die beste Zielangabe ist die Einkleidung des Zieles in eine sachliche geometrische Aufgabe, doch wird sich das nicht immer durchführen lassen. Mechanische Ankündigungen vermeide man.

Zur Stufe der **Vorbereitung** (**Analyse**) gehört auch hier, wie bei der Rechenmethodik ausgeführt worden ist, Erklärung der Sachgebiete, Wiederholung früherer Stoffe, die bei der vorliegenden Behandlung verwendet werden, und Einführung von neuen Regeln, die ebenfalls Verwendung finden sollen. Wenn z. B. die Lage des Mittelpunktes der Sehne zum Mittelpunkt des Kreises festgestellt werden soll, so würden die Beziehungen des gleichschenkligen Dreiecks, besonders die Lage der Spitze desselben zu seiner Grundlinie, ins Verständnis zurückgerufen werden, ebenso müßte die Gleichheit der Halbmesser eines Kreises nochmals erwähnt werden; das ist Vorbereitung.

Bei der **Darbietung** (**Synthese**) wird nun die Aufmerksamkeit des Schülers auf das bestimmte Raumgebilde gelenkt; in der Raumformenlehre wird es meistenteils das Modell, in der Raumlehre die nach und nach entstehende Zeichnung sein. Bei der Behandlung der soeben in der Vorbereitung gestellten Aufgabe wird also ein Kreis gezeichnet; in denselben wird eine Sehne gelegt, und die Endpunkte der Sehne werden mit dem Mittelpunkte des Kreises verbunden. Die gewonnene Einsicht, daß Sehnen und Halbmesser ein gleichschenkliges Dreieck bilden, dessen Spitze im Mittelpunkt des Kreises liegt, gehört mit zur Darbietung, ebenso die Folgerung, daß in diesem Dreieck die Spitze senkrecht über der Mitte der Gegenseite liegt.

Die Stufe der **Verknüpfung** (**Assoziation**) läßt sich nicht immer interessant gestalten. Die Lösung von ähnlichen Aufgaben gehört hierher. Bei unserm Beispiel könnte nur an einer zweiten Sehne desselben Kreises und an einer Sehne eines anderen Kreises gefunden werden, daß die Verbindungslinien der Endpunkte mit dem Mittelpunkte des Kreises **stets** gleichschenklige Dreiecke ergeben, deren Spitzen in dem Mittelpunkt des Kreises und senkrecht über der Mitte der Gegenseite liegen.

Die Aufgabe der vierten Stufe, der **Zusammenfassung** (**System**), ist, den Begriff, den Lehrsatz, die Regel oder die Formel usw. aufzustellen. Hier wird der Lehrsatz aufgestellt und zur vollständigen sprachlichen Sicherheit gebracht, also in bezug auf unser Beispiel: Der Mittelpunkt des Kreises liegt senkrecht über dem Mittelpunkt jeder Sehne.

Auf der 5. Stufe, der **Anwendung** (**Methode**), soll das erworbene Wissen verwertet werden. Besonders sind es Konstruktions- und Berechnungsaufgaben, die gelöst werden sollen. Aus unserm Beispiel würde sich die Aufaabe ableiten lassen, den Mittelpunkt eines Kreises zu suchen. Die f[illegible] insichtige Lösung läßt einen Rückschluß auf die Behandlung zu.

Nicht jede methodische Einheit der Raumlehre bedarf der Durchführung durch alle fünf Formalstufen. Häufig werden geeignete Verknüpfungsstoffe, häufig auch direkte praktische Anwendungsstoffe fehlen; aber jeder Stoff wird ein sorgfältiges Herbeischaffen des Materials, eine logische Entwicklung und eine scharfe Zusammenfassung fordern. Begriff und Lehrsatz ergeben sich aus der Entwicklung; das ist der Kernpunkt unserer Methode.

Wie kommen wir nun im einzelnen zur Entwicklung der Begriffe und Lehrsätze? Wir sprechen vom Quadrat und vom Rechteck! Viele Schüler werden auf den ersten Blick das Quadrat vom Rechteck unterscheiden können, doch werden sie nicht imstande sein, die Unterschiede zwischen beiden Flächen klar und bestimmt anzugeben. Durch die Unterscheidung des Quadrats und des Rechtecks haben die Kinder bewiesen, daß sie einen Begriff vom Quadrat und Rechteck haben. Doch sind solche Begriffe nicht vollständig, solange nicht die Begriffserklärung, d. i. die Definition, den bis dahin unklaren oder unbestimmten Begriff zu einem logischen Begriffe umgestaltet. Wie groß ist die Zahl der Begriffe, die wir unterscheiden, aber nicht definieren können, und wieviel größer wird die Zahl bei unsern Schülern sein! Unsere Aufgabe in der Schule ist es, möglichst vollständige, logische Begriffe zu entwickeln. Wie geschieht das nun in der Raumlehre? Unsere eigene Erfahrung gibt uns die besten Fingerzeige. Wie mancher hat schon in der Schule von großen Auswanderungsschiffen gehört. Der Begriff „Auswanderungsschiff“ ist in der Schule sicher soweit geklärt worden, daß er das Auswanderungsschiff nicht mit den Elbkähnen verwechseln wird; aber den richtigen Begriff hat er nicht. Er liest nach seiner Schulzeit in guten Büchern und Zeitschriften und sieht auch bessere Abbildungen. Der Begriff mag umfassender geworden sein; aber vollständig ist er noch nicht. Nun hat er Gelegenheit, ein solches Schiff stundenlang zu besichtigen. Trotzdem kann er sich noch täuschen, wenn er meint, jetzt den vollständigen Begriff zu haben; denn es kann ihm immer noch manches Merkmal fehlen. Erst nach längerem Aufenthalt und aufmerksamer Beobachtung wird sich ihm allmählich der volle Begriff erschließen. Was sind uns Bewohnern der Ebene die Begriffe Gletscher, Gletscherbach, Alm usw. und was ist uns Landbewohnern der Begriff Meer! Durch eigene aufmerksame Anschauung erst können diese unklaren Begriffe zur Vollständigkeit gebracht werden.

Durch aufmerksame Anschauung können auch nur die logischen Raumbegriffe gewonnen werden. In der Raumlehre sind wir Lehrer in der glücklichen Lage, Anschauungsmittel für alle zu entwickelnden Begriffe zu haben. Wieviel unangenehmer ist es in anderen Fächern, z. B. in der Erdkunde. Alle Ab- und Nachbildungen sind doch nichts weiter als unzulängliche Hilfsmittel. Weil nun die Raumlehre vor anderen Unterrichtsfächern so begünstigt ist, wird es uns leicht werden, möglichst vollständige Begriffe zu entwickeln. — Aber nicht immer wird die logische Begriffserklärung dem Verständnis der Kinder angepaßt werden können. In solchen Fällen muß es genügen, wenn an Stelle der logischen Definition die genetische Definition tritt. Manche Methodiker, z. B. Bartholo-

mäus, wollen so lange auf die Definition verzichten, als sie auf dem Boden der Anschauung bleiben und sich mit der Beschreibung begnügen. — Durch aufmerksame Anschauung werden also die einzelnen Stücke des Begriffs gewonnen; durch richtiges, scharfes Denken werden sie zusammengestellt, und durch unsere Sprache werden sie zum kurzen und bündigen Ausdruck gebracht.

Wir nehmen an, daß in allen Schulen das Bestreben herrscht, inhaltsvolle Begriffe zu bilden und daß die Schulen, die auch in der Raumlehre (wie in manchem anderen Unterrichtsfache) sich damit begnügten, Definitionen auswendig lernen zu lassen, gänzlich verschwunden sind. Man bedenke: Definitionen ohne Begriff, d. h. ohne Anschauung und Denkarbeit!!

Nachdem nun auf dem Wege der Anschauung und des Denkprozesses die Eigenschaften des Begriffs gewonnen und zusammengestellt worden sind, wird der Name gegeben, wenn der Schüler ihn noch nicht kennen sollte. Am Würfel sehen die Kinder z. B. eine Begrenzungsfläche, eine Ebene, die 4 gleiche Seiten hat, welche 4 rechte Winkel bilden. Diese Merkmale sind für den Begriff ausreichend; nun folgt der Name „Quadrat". Welche Namen wollen wir in der Raumlehre der Volksschule einführen, die uns überkommenen bisher in der Geometrie üblichen oder neue deutsche Namen. Die größte Zahl der bisher üblichen Namen ist in unsern Sprachschatz aufgenommen worden, und der Gebrauch derselben erleichtert die Verbindung zwischen den verschiedenen Arten der Schüler und der Klassen der Bevölkerung in der Berechnung der Raumgrößen. Doch ist es schwer, eine allgemein geltende Regel aufzustellen. Ich möchte nicht Spitzsäule sagen, sondern Pyramide; andernfalls fällt es mir schwer, an Stelle des deutschen Ausdrucks „Rechteck" den fremden „Oblongum" zu wählen. Reguläres Polygon ist eine für deutsche Volksschulen unbequeme Bezeichnung; regelmäßiges Vieleck klingt wirklich angenehmer. Ist also ein gleichwertiger, passender deutscher Ausdruck vorhanden, so gebrauche man denselben, sonst bleibe man beim (deutsch gewordenen) Fremdwort. Es ist zu wünschen, daß eine einheitliche Bezeichnung sich allmählich einbürgern möge. — Auch hier ist, wie beim Rechnen, auf unrichtige oder unlogische Bezeichnungen aufmerksam zu machen. Man errichtet in einem Punkte einer geraden Linie eine Senkrechte und fällt von einem Punkte nach einer Geraden die Senkrechte, nicht umgekehrt; verschobenes Quadrat und verschobenes Rechteck sind undefinierbare Begriffe u. a. m.

Die Raumlehre unserer Volksschule unterscheidet sich wesentlich von der Geometrie der höheren Schulen. Dort werden die geometrischen Wahrheiten möglichst vollständig in ein System gefaßt; Lehrsatz folgt auf Lehrsatz, und jeder einzelne ist die Vorbedingung des folgenden. Früher wurden die Lehrsätze fast durchgängig an die Spitze des geometrischen Unterrichts gestellt; der Unterricht bestand dann nur in der Beweisführung. Heute wird auch in den höheren Schulen der Lehrsatz gefunden. — Unsere Volksschule aber muß auf Lückenlosigkeit und Vollständigkeit bei dem Aufbau der Raumlehre verzichten; in ihr kann kein System gelehrt werden, sondern es können nur die Lehrsätze herangezogen werden, deren Kenntnis zur Lösung von praktischen Konstruktions- und Berechnungsaufgaben notwendig

ist. Wie groß die jedesmalige Auswahl ist, hängt von dem Standpunkt der Schule ab.

Die Wahrheit der Lehrsätze kann nun entweder auf anschaulichem Wege erkannt, oder durch Messen und Konstruieren festgestellt, oder durch Beweis gefunden werden. Ich spreche auch hier aus, daß nach meiner Meinung die Oberstufe unserer mehrklassigen Volksschule einfache Beweise recht wohl vertragen kann, und daß unsere Schüler fähig sind, auf dem Wege der Entwicklung die Lehrsätze zu gewinnen. Die anschaulichen Beweisführungen gehören zur Raumformenlehre. Dort lasse ich durch Aufeinanderlegen der Dreiecke die Kongruenz derselben feststellen und folgere daraus das Vorhandensein dreier Kongruenzsätze. Ebenso gehört die sogenannte Beweisführung durch Messen oder Konstruieren, wenn sie ja irgendwo Platz finden soll, in die Raumformenlehre. Die beiden angeführten Wege zur Begründung der Richtigkeit eines Lehrsatzes dürfen demnach nur ausnahmsweise und dann zur anschaulichen bez. konstruktiven Erhärtung bereits durch Beweis gewonnener Wahrheiten in dem ältesten Jahrgang der Oberstufe einer mehrklassigen Schule auftreten. Unsere Kinder folgen gern dem abstrakteren Wege der Beweisführung, und für den Lehrer ist es stets ein weihevoller Augenblick, wenn Auge und Gesichtsausdruck des Schülers ihm nicht nur die rege Beteiligung, sondern auch die volle Befriedigung bei der Gewinnung des Resultates zeigen. Bei der Wiederholung kann dann auch der abstrakte Weg der Beweisführung mit Voraussetzung, Behauptung und Beweis eingeschlagen werden. Als Beispiel diene hier der Lehrsatz von den Diagonalen im rechtwinkligen Parallelogramm. Bekannt sind die Kongruenzsätze und die Folgerung über die Gleichheit der homologen Stücke in kongruenten Dreiecken; zusammengestellt sind auch die bis jetzt behandelten Lehrsätze, mit deren Hilfe wir die Gleichheit von Winkeln und Seiten beweisen können. Gegeben ist ein Rechteck. Ich ziehe eine Diagonale und lasse die beiden Dreiecke benennen und nach ihren Seiten bestimmen. (Die Kongruenz dieser Dreiecke ist früher schon bewiesen worden und ist hier belanglos.) In den gleichen Gegenseiten des Rechtecks und in den an einer Seite des Rechtecks liegenden gleichen Winkeln haben wir die notwendigen Stücke für die Kongruenz zweier Dreiecke nach dem ersten Kongruenzsatz. Welche Linie müßte noch gezogen werden? Was können wir nun über die Länge der Diagonalen folgern? In welchen Parallelogrammen entstehen aber nur diese kongruenten Dreiecke? In welchen Parallelogrammen sind also die Diagonalen gleich? Wie heißt also der Satz von den Diagonalen in rechtwinkligen Parallelogrammen?

Die bewiesenen Lehrsätze müssen von den Schülern formuliert, dann dem Wortlaut nach festgestellt und endlich eingeprägt werden. Da vorher das Verständnis erzielt worden ist, darf man an dieser Forderung keinen Anstoß nehmen. Unvernünftig, weil vollständig unmethodisch, würde es sein, den Lehrsatz vorzusprechen und den Beweis auswendig lernen zu lassen. Der Wortlaut der Lehrsätze wird am leichtesten eingeprägt werden, wenn die Lehrsätze von den Kindern aufgeschrieben und das Aufgeschriebene vom Lehrer korrigiert wird. Die Beweise bieten ebenfalls ausgezeichnetes

Material zu schriftlichen Übungen, und es ist eine nicht zu unterschätzende, abschließende Leistung, wenn ein Kind dann Voraussetzung, Behauptung und Beweis kurz und bestimmt ohne jedes unnütze Wort aufgeschrieben hat.

Die Berechnungsregeln sind in ihrer Bedeutung den Lehrsätzen gleich zu stellen. Auch sie werden entwickelt, von den Kindern dem Wortlaut nach festgestellt und dann eingeprägt. Gegenüberstellung ähnlich lautender Regeln durch Aufsagen und Anwenden derselben schützt vor Verwechslungen. Es dürfte empfohlen werden, die Regeln in die Form der Formeln zu bringen, also stets eine Gleichung sagen zu lassen.

17. Die geometrische Aufgabe.

Die geometrische Aufgabe tritt auf der Anwendungsstufe des Raumlehre-Unterrichts auf; sie wird sowohl in der Raumformenlehre als auch in der Raumlehre ihre Stelle finden.

Die Aufgaben in der Raumformenlehre verlangen entweder das Anschauen und Einordnen einer Raumgröße oder das Zeichnen oder das Berechnen einer Raumgröße. — Die leichteste Aufgabe dürfte darin bestehen, daß das Kind aufgefordert wird, entweder eine am typischen Körper angeschaute Raumgröße an andern Gegenständen aufzusuchen, so z. B. das Trapez, dessen Begriff am Pyramidenstumpf festgestellt worden ist, in der Umgebung zu finden; oder die an anderen Gegenständen gegebenen Formen einzuordnen, z. B. die Figuren an der Schranktür. Beide Aufgaben sind nicht so unwichtig als sie zunächst erscheinen mögen. Das Auge des Kindes wird geschärft und die aufmerksame Anschauung anerzogen. Ein Mensch, dem diese aufmerksame Anschauung anerzogen ist, sieht mehr als ein anderer, und da das Auge das eine Tor der Seele ist, durch welches die Außenwelt eindringen kann, so lebt dieser Mensch intensiver als der, der mit Scheuklappen vor den Augen durch die Welt geht. — Die Aufgabe kann zweitens auch das Zeichnen einer Raumgröße verlangen. Wenn meine Hand das darstellen soll, was mein Auge geschaut und mein Geist aufgenommen hat, so muß die Anschauung eine eindringliche und die Aufnahme eine vollständige sein. Also unterstützt auch die zweite Aufgabe die Erreichung des Zieles der Raumformenlehre, das aufmerksame Anschauen. — Die dritte Aufgabe, eine Raumgröße zu berechnen, führt direkt in die Praxis. Eine Linie wird unmittelbar gemessen; Körper und Flächen werden nach dem Ausmessen gewisser Ausdehnungen berechnet. Es gehört eine gewisse Geschicklichkeit sowohl zur Handhabung des Maßes als zur richtigen Anwendung der entwickelten Berechnungsformeln. Zuerst werden die Berechnungsaufgaben im engen Anschluß an den behandelten Stoff, später als Wiederholung in Verbindung mit Berechnungsaufgaben anderer Art gegebэn. Die Sachgebiete, denen die Aufgaben entnommen werden können, sind überall zahlreich zu finden. Man denke z. B. bei der einfachen Flächenberechnung an das Dielen der Stube, das Tünchen der Wände, das Decken des Daches, das Bekiesen des Turn-

platzes, das Teilen des Gartens durch Wege in Beete, an Ackerstücke, Bauplätze u. a. m. Die praktische Bildung und die formale Selbständigkeit verlangen entschieden die häufige Anwendung dieser Berechnungsaufgaben. Es empfiehlt sich außerdem, die Berechnungsaufgaben durch Aufgaben zu unterbrechen, die das Schätzen der Längen, Höhen und Größen verlangen; doch unterlasse man nie, die durch Schätzung gefundenen Ergebnisse durch die Berechnung zu kontrollieren. Auch hierdurch werden Auge und Verstand des Kindes gleichmäßig in Anspruch genommen und ausgebildet.

In der Raumlehre können alle die bei der Raumformenlehre erwähnten Aufgabengruppen wiederum auftreten, und das dürfte dringend zu empfehlen sein, da nur durch stetige Wiederholung Kenntnisse und Fertigkeiten erhalten bleiben. Eine eigene Art der Aufgaben hat aber die Raumlehre in den Konstruktionsaufgaben. Die Konstruktionsaufgaben schließen sich an die behandelten Lehrsätze an und wirken vornehmlich darauf hin, daß die gewonnenen Sätze zum freien Eigentum der Schüler werden. Wer ein Dreieck aus 2 Seiten und dem der größeren gegenüberliegenden Winkel zeichnen soll, muß den 4. Kongruenzsatz nicht nur verstanden haben, sondern er muß ihn auch frei beherrschen. Die Lösung selbst der einfachsten Konstruktionsaufgabe ist von hohem bildenden Werte. Man vergleiche hierzu die Lösung der einfachen Aufgabe, einen gegebenen Winkel zu halbieren! Überlegung: Ein Winkel kann nur halbiert werden, wenn er der Winkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks ist, das mit einem anderen gleichschenkligen Dreieck auf derselben Basis errichtet worden ist. Ausführung: Soll der Winkel der Winkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks werden, so müssen die Schenkel des Winkels gleichgemacht werden. Die Endpunkte der Schenkel bestimmen auch die Endpunkte der gemeinschaftlichen Basis, auf der ein zweites gleichschenkliges Dreieck errichtet werden muß, dessen Spitze dann mit der Spitze des ersten Dreiecks durch eine gerade Linie verbunden wird. Diese Linie halbiert den Winkel an der Spitze; denn: Errichtet man usw. — Welch eine reiche Fülle von bildenden Momenten!

Man versäume also ja nicht, im Raumlehre-Unterricht häufig einfache Konstruktionsaufgaben zu geben. Die größere oder geringere Fertigkeit in der Lösung solcher Aufgaben ist ein Maß, mit dem die gewonnene Erkenntnis gemessen werden kann.

18. Die Lehr- und Lernmittel im Raumlehre-Unterricht.

Von den im § 9 der „Allgemeinen Bestimmungen" angeführten unentbehrlichen Lehrmitteln der einfachen Volksschulen werden nur die unter Nr. 9 genannten, Lineal und Zirkel, für den Unterricht in der Raumlehre verwendbar sein; doch heißt es zum Schluß dieses Paragraphen: „Für die mehrklassigen Schulen sind diese Lehrmittel angemessen zu ergänzen".

Nun erfordert aber auch die in den einfachsten Schulen zu treibende Raumformenlehre eine Anzahl von Lehrmitteln. Wir haben an anderer

Stelle schon ausgesprochen, daß wir abweichend von der Forderung der Herbart-Zillerschen Richtung nicht vom Naturkörper selbst, sondern vom geometrischen Körper ausgehen; denn diese bringen die geometrischen Formen am reinsten und deutlichsten zur Veranschaulichung. Eine Auswahl dieser geometrischen Körper gehört demnach auch in die einfachste Volksschule. Im Anschluß an die in Gruppe 13 gebotene Auswahl des Lehrstoffes sind erforderlich: 1. Ein Kubus; 2. eine gerade vierseitige Säule mit quadratischen Endflächen, die durch einen Diagonalschnitt in 2 dreiseitige Säulen zerlegt ist; 3. ein schiefes und schiefwinkliges Parallelepipedon; 4. eine mehrseitige Säule; 5. eine dreiseitige Pyramide; 6. eine mehrseitige Pyramide; 7. ein Pyramidenstumpf; 8. eine Walze; 9. ein Kegel; 10. ein Kegelstumpf; 11. eine Kugel. Diese Körper sind in guten Lehrmittelhandlungen billig zu haben (jede Buchhandlung besorgt Prospekte solcher Lehrmittelhandlungen); auch können einzelne von ihnen durch andere in der Schule oder im Hause vorhandene Gegenstände ersetzt werden. So z. B. bietet jeder Baukasten Würfel, gerade vierseitige Säulen mit quadratischen Endflächen, und dreiseitige Säulen; auch die entliehene Kegelkugel kann unterrichtliche Dienste leisten. Einzelne Körper können zerlegbar sein, sie sind dann an verschiedenen Stellen als Anschauungsmittel zu verwerten. So können an je einem Körper Pyramide und Pyramidenstumpf, oder Kegel und Kegelstumpf veranschaulicht werden. Wenn nun aber jegliche Mittel zur Anschaffung, auch der einfachsten Auswahl, fehlen sollten, so wird in den weitaus meisten Fällen der Lehrer geschickt genug sein, die unentbehrlichsten Körper aus Holz oder Pappe herzustellen. Für mehrklassige Schulen dürften noch einige Ergänzungskörper auszuwählen und anzuschaffen sein, so ein gerades und ein schiefes Parallelepipedon von gleicher Grundfläche und Höhe, eine in drei dreiseitige Pyramiden von gleicher Grundfläche und Höhe zerlegte dreiseitige Säule, ein in sechs vierseitige Säulen zerlegter Würfel und eine zerlegbare Kugel; auch die drei Hohlkörper (Kegel, Halbkugel und Zylinder) von gleicher Grundfläche und Höhe sind für die anschauliche Entwicklung der Kugelberechnungsformel wichtig.

Wünschenswert ist ferner die Anschaffung von einem Winkel-Lineal, einem Transporteur und einem in Scheiben, Säulen und Kuben zerlegbaren (Zehncentimeter-) Würfel. Alle diese Gegenstände müssen in annehmbarer Größe, damit alle Kinder anschauen können, angeschafft werden.

Für die Raumlehre in der 1. Abteilung der Oberstufe unserer mehrklassigen Schulen brauchen wir außer der Wandtafel, dem Lineal, dem Zirkel und der Kreide kein wesentliches Lehrmittel. Die sonst noch empfohlenen Lehrmittel sind entweder unpädagogisch oder entbehrlich, da sie ohne große Mühe hergestellt werden können. So halte ich die Wandtafeln des metrischen Systems, die vor 30 Jahren in allen Schulen angeschafft werden mußten und die noch heute in dem Schulinventar unserer Volksschulen zu finden sind, für unpädagogisch; denn ein Liter und ein Kilogrammstück läßt sich praktischer und leichter durch den Gegenstand selbst veranschaulichen als durch eine Zeichnung. Ebenso halte ich alle Linien- und Winkelmodelle zu Veranschaulichung der Richtung und Gestalt der Linien der Größe der Winkel für entbehrlich; das Stück Kreide in einer

leidlich geschickten Hand ist sicherer, praktischer und billiger. Für ganz besonders überflüssig aber halte ich die Winkel- und Flächenmodelle zur Veranschaulichung von Lehrsätzen, z. B. der Lehrsätze von den Neben- und Scheitelwinkeln und von den Winkeln an durchschnittenen Parallelen, sowie der von der Winkelsumme im Dreieck, der Kongruenz u. a. Bei dem Gebrauch ähnlicher Lehrmittel, die durch wenige Worte oder Zeichen des Lehrers reichlich und besser ersetzt werden können, tritt für mein persönliches Gefühl der Lehrer zu weit zurück; das neue Lehrmittel hat sich zwischen Lehrer und Schüler geschoben, und das enge Band, das Lehrer und Schüler verbinden muß, zum Schaden für den Erfolg des Unterrichts gelockert. Außerdem liegt, wie schon oft betont worden ist, der bildende Wert der Raumlehre vornehmlich in der Entwicklung und nicht in der Vorführung fertiger Ergebnisse.

Unter den für die Schüler der Volksschule mit einem oder zwei Lehrern in § 11 der „Allgemeinen Bestimmungen" verordneten Lernmitteln finden wir für den Raumlehre-Unterricht auch nur Zirkel, Lineal und vielleicht Diarium; doch wird auch hier am Schluß des Paragraphen darauf hingewiesen, daß den Schülern mehrklassiger Schulen die Anschaffung besonderer kleiner Leitfäden zugemutet werden könne und daß diese für die einzelnen Lehrgegenstände besondere Hefte führen sollen.

Wenn der Lehrer den Stoff in der einklassigen Schule angemessen beschränkt und die Namen, Regeln und Sätze im Unterrichte selbst einübt und in der sich anschließenden schriftlichen Beschäftigungsstunde aufschreiben läßt, dann wird ein Übungsbuch überflüssig sein, umsomehr, als die praktischen Aufgaben zur Berechnung der Raumformen in jeder Aufgabensammlung für den Rechenunterricht zu finden sein dürften. Dagegen werden die Schüler der mehrklassigen Schule schon eher einen Leitfaden gebrauchen, muß doch ein Teil der Wiederholung des wesentlich erweiterten Stoffes außerhalb der Schulzeit vorgenommen werden. Der Leitfaden dient der Wiederholung, nicht dem Unterrichte, daher bietet er den Stoff in der knappsten Form, wie sie für die Wiederholung geeignet ist. Die in den Leitfaden aufzunehmenden Aufgaben sollen von den Schülern selbst gelöst werden, daher müssen sie einfach und ungekünstelt sein; schwierige Aufgaben, die im Unterricht selbst behandelt werden sollen, müssen als solche besonders bezeichnet werden. Die Anzahl brauchbarer Leitfäden ist eine sehr große; oft wird dem Lehrer die Auswahl schwer fallen. Ich will hier nur erwähnen, daß auch von dem Verfasser solche Leitfäden herausgegeben wurden, nämlich: Schroeter, Ergebnisse des Raumlehre-Unterrichts; Heft A, Raumformenlehre, Heft B, Raumlehre. Wittenberg, R. Herrosés Verlag (H. Herrosé).

19. Die Raumformenlehre.

Die Raumformenlehre ist der Unterrichtsstoff nicht nur für die Oberstufe in einfachen Schulverhältnissen, sondern auch für die Knaben der zweiten Abteilung der Oberstufe mehrklassiger Schulen und für die Mädchen der mehrklassigen Schulen, falls diese nicht vom Raumlehre-Unterricht

befreit sind. Die Behandlung ist überall dieselbe. Die Ausdehnung und Vertiefung des Stoffes aber wird bei den Knaben der mehrklassigen Schule bei wöchentlich zwei Unterrichtsstunden größer sein können als in der einklassigen Schule und bei den Mädchen.

a) Die Entwicklung der geometrischen Grundbegriffe.

Der unmeßbare Weltenraum wird den meßbaren Gegenständen gegenübergestellt. Unter Benutzung der im Anschauungskreise der Kinder befindlichen Raumgrößen werden folgende Sätze entwickelt: Ein von allen Teilen begrenzter Teil des Raumes heißt Körper; die Grenzen des Körpers sind Flächen; die Summe der Flächen eines Körpers heißt Oberfläche; die Grenzen der Flächen sind Linien; die Flächen sind entweder Ebenen oder gekrümmte Flächen; die allseitig begrenzte Ebene heißt Figur; die Summe der Begrenzungslinien wird Umfang genannt; die Linien sind gerade oder krumme; die Grenze der Linie heißt Punkt; die Zeichnung eines Punktes, einer Linie, einer Fläche oder eines Körpers wird Figur genannt. — Gewiß ein umfangreicher Stoff, reich besonders an neuen Begriffen. Die unterrichtliche Behandlung muß hier besonders sorgfältig sein. Unklarheiten werden nur durch anschauliche Klarlegung der Begriffe, durch stetige Übung und durch fortgesetzt vertiefende Wiederholung vermieden. Sehr wesentlich ist es, die Kinder selbst suchen und finden zu lassen.

b) Die Behandlung der typischen Körper.

Der Unterricht in der Raumformenlehre zerfällt in einzelne Abschnitte, von denen jeder sich um einen geometrischen Körper als Mittelpunkt gruppiert. Es ist schon an anderer Stelle gesagt worden, daß den geometrischen Körpern deshalb der Vorzug vor den in der Umgebung des Kindes vorkommenden Naturkörpern eingeräumt worden ist, weil sie die räumlichen Formen am reinsten und deutlichsten veranschaulichen. Jeder einzelne neu gewonnene Begriff wird durch Aufsuchen gleicher Größen zum Eigentum der Schüler gemacht, aber immer wieder kehrt die Anschauung zu dem typischen Körper zurück. Mitunter wird es notwendig werden, zur genauen Klarstellung einer Form oder zur Gewinnung des allgemeinen Begriffs auf andere im Anschauungskreise der Kinder liegende Raumformen einzugehen. So lernen wir am Würfel nur den rechten Winkel kennen; der Begriff Winkel verlangt aber auch die Heranziehung der spitzen, stumpfen, gestreckten und vollen Winkel. Nun bietet z. B. die Türfüllung spitze und gestreckte Winkel; am Fensterrahmen finden sich stumpfe Winkel; somit werde ich die Aufmerksamkeit der Kinder auf diese Winkel lenken, so daß ein voller Begriff erzielt wird. Es ist Aufgabe des Lehrers, für diese Erweiterung sowohl das richtige Gefühl als auch das notwendige Geschick zu besitzen, da ein allzuweites Ausdehnen auf andere Raumgrößen leicht zum Abschweifen wird. Andererseits wird durch solche Gruppierungen der Vorwurf entkräftet, daß die Gruppierung um geometrische Körper den Lehrstoff zerreißen muß, so daß es ein wüstes Durcheinander ergibt.

Jede neu gewonnene Raumgröße wird zuerst beschrieben, aus der Zusammenstellung gleichartiger Raumgrößen folgt dann die Definition. So wird z. B. das Quadrat, das am Würfel erkannt wird, beschrieben; ebenso das Rechteck, das sich an der aus Würfeln zusammengesetzten geraden vierseitigen Säule findet. Eine Vergleichung beider Flächen ergibt sowohl das Gleichartige, nämlich die vier Seiten und vier rechten Winkel, als auch das Ungleichartige, nämlich die gleiche bezw. verschiedene Länge der anstoßenden Seiten. Kommt nun noch das schiefwinklige Parallelogramm hinzu, das am schiefen Parallelepipedon erkannt wird, so behalten wir als Gleiches aller drei Flächen nur die vier Seiten, von denen die Gegenseiten parallel laufen. Hieraus folgt die Definition des Begriffs „Parallelogramm." Wir sehen, daß auch die Raumformenlehre nicht nur das aufmerksame Anschauen, sondern auch das scharfe Unterscheiden verlangt, so daß das Denken auch bei der Raumformenlehre nicht zu kurz kommt.

Besonders wichtig für die Bedeutung der Raumformenlehre ist noch die an die Betrachtung jeder Raumgröße sich anschließende Berechnung derselben. Zur vollständigen Auffassung einer Raumgröße genügt nicht die Kenntnis der Form, sondern es gehört dazu auch die Kenntnis der Größe. In wie vielen Fällen kommt bei anderer Gruppierung des Raumlehrstoffes die Berechnung der Raumformen zu kurz, weil sie zuletzt daran kommt. Außerdem folgt dann eine Berechnungsform auf die andere, und es fehlt die zur Einprägung notwendige Ruhe. So werden im Anschluß an den Würfel Quadrat und Würfel berechnet; im Anschluß an die gerade vierseitige Säule folgt die Berechnung des Rechtecks und der vierseitigen Säule usw. Ich meine, daß gerade durch diese unmittelbare Überleitung zum praktischen Leben das Interesse der Schüler ganz besonders geweckt wird.

Es wird nicht notwendig sein, hier nochmals die einzelnen Raumformen anzuführen, die bei der Betrachtung jedes einzelnen Körpers sich ergeben. Schon in Abschnitt 13 ist eine Übersicht geboten und wer sich weiter darüber unterrichten will, der lese in der Raumformenlehre des Verfassers nach. Auch halte ich es nicht für notwendig, besondere Lehrproben zu geben. Jeder Lehrer wird den Stoff zu formen wissen.

20. Die Raumlehre.

Die Behandlung der einfachen Lehrsätze in dem obersten Jahrgang unserer mehrklassigen Volksschule kann wenig Mühe, aber viel Freude bereiten. Wenig Mühe aber viel Freude! Die Kinder haben einen einjährigen Kursus in der Raumformenlehre hinter sich; hier haben sie die geometrischen Grundbegriffe und sämtliche in der Raumlehre heranzuziehenden Raumformen kennen gelernt, auch sind ihnen die Einteilung der Raumformen und die einfachsten Beziehungen derselben zueinander sowie ihre Berechnung nicht unbekannt geblieben; eine feste Grundlage ist also geschaffen. In der 1. Abteilung der Oberstufe sitzen in fast allen Fällen nur bessere, d. h. fleißige und wenigstens mäßig begabte Kinder, da die faulsten und

dümmsten Kinder im Laufe der verflossenen 7 Schuljahre irgendwo hängen geblieben sind. Solchen Kindern einen bekannten Stoff in neuer Form zu bieten, kann wenig Mühe und muß viel Freude machen. Dazu kommt noch, daß die in keinem Unterrichtsfache in gleicher Weise anwendbare scharfe Entwicklung jeden eifrigen Lehrer anheimelt und ihn zu immerneuer und freudiger Arbeit reizt.

Der Unterrichtsstoff wird gewöhnlich bis zum pythagoreischen Lehrsatz ausgedehnt. Es hängt auch hier viel von dem Standpunkt der Klasse ab, wie weit dieser Rahmen ausgebaut werden soll. In schwächeren Jahrgängen beschränkt man sich mit den Hauptsätzen jeder Gruppe, zieht nur die notwendigsten Folgerungen und schließt nur wenig und leichte Konstruktionsaufgaben an. Gute Schüler folgen aber dem Lehrer auch bei einem indirekten Beweise und lösen zum Schluß auch schwerere Konstruktionsaufgaben. Die Volksschule soll aber den Raumlehrestoff nicht über den Pythagoras ausdehnen; ist noch Zeit vorhanden, so verwende man diese auf die zusammenhängende Wiederholung der Entwicklung und Anwendung der Flächen- und Körperberechnungsregeln.

a) Die Lehre von den Linien und Winkeln.

Nach eingehender Wiederholung der geometrischen Grundbegriffe und der nach der Größe eingeteilten Winkel folgen die bekannten Sätze über Nebenwinkel und Scheitelwinkel. Die Beweise werden auf dem anschaulichen Wege der Entwicklung gewonnen; die Lehrsätze werden festgestellt und eingeprägt; die Folgerungen werden gezogen und die Konstruktionsaufgaben gelöst.

Als Beispiel zu dem sich immer gleichbleibenden Unterrichtsgange sei hier in kurzen Zügen der unterrichtliche Verlauf der Lehre von den Nebenwinkeln gegeben: Der Ausgangspunkt ist der gestreckte Winkel. Festlegen von Winkelpunkt und Schenkeln. Die Größe desselben beträgt zwei rechte Winkel. Durch eine vom Winkelpunkt nach einer Richtung gezogene Gerade wird der gestreckte Winkel in zwei Winkel geteilt, deren Größe gleich der Größe des gestreckten Winkels, d. i. 2 rechte Winkel. Bestimmen dessen, was die beiden Winkel gemeinsam haben. Anzeichnen von andern Winkeln, die auch den Winkelpunkt und einen Schenkel gemeinsam haben. Der Name „anstoßende Winkel" wird gegeben, bzw. aus der Lage abgeleitet; Herausheben der Eigentümlichkeiten der anstoßenden Winkel, die durch Teilung des gestreckten Winkels entstanden sind; Definition der Nebenwinkel. Die Verbindung des neugewonnenen Winkelbegriffs mit der Größe der Winkel gibt den Lehrsatz. Formulieren und Einüben desselben. Auf entsprechende Fragen stellt das Kind nun folgende Folgerungen auf: 1. Jeder Winkel wird durch seinen Nebenwinkel zu zwei rechten Winkeln ergänzt. (Name: Supplementwinkel). 2. Gleiche Nebenwinkel sind rechte Winkel. 3. Die Winkel an einem Punkte auf einer Seite einer geraden Linie betragen zwei rechte Winkel. Endlich folgt die Lösung nachstehender Konstruktionsaufgaben: 1. Zeichne den Nebenwinkel zu einem gegebenen

Winkel, und 2. beweise, daß die Halbierungslinien zweier Nebenwinkel senkrecht aufeinanderstehen!

Die Umkehrungen der Lehrsätze von den Neben- und Scheitelwinkeln sind zwar in der Theorie sehr wichtig, da man lange Zeit hindurch (bis zum Satz des Menelaos) nur mit Hilfe dieser Sätze beweisen kann, daß zwei von einem Punkte ausgehende Linien eine gerade Linie bilden; trotzdem aber dürften diese Sätze über das Ziel unserer Volksschule ihrer Schwierigkeit wegen hinausgehen, und außerdem liegt auch in dem gesamten Volksschulstoff keine zwingende Veranlassung zur Einfügung dieser Sätze. Wir verzichten also in der Regel auf die Durchnahme dieser Umkehrungen.

Wenn zwei gerade Linien von einer dritten Linie durchschnitten werden, so entstehen außer den bekannten Neben- und Scheitelwinkeln noch Gegenwinkel, Wechselwinkel und entgegengesetzte Winkel. Bei der Entscheidung dieser Winkelarten achte man zuerst auf deren Lage zur Durchschneidenden, dann zu den Durchschnittenen. Durch Aufeinanderschieben der Gegenwinkel wird bewiesen, daß Gegenwinkel an durchschnittenen Parallelen gleich sind (man achte auf das Fortschreiten des Winkelpunktes und die Richtung der Durchschneidenden und folgere daraus die Lage der Parallelen, oder man beachte neben dem ebenso fortschreitenden Winkelpunkte die Lage der Durchschnittenen und folgere daraus die Richtung der Durchschneidenden). Zwei Wechselwinkel an durchschnittenen Parallelen sind einem dritten Winkel gleich, der eine als Scheitelwinkel und der andere als Gegenwinkel an durchschnittenen Parallelen; hieraus folgt ihre Gleichheit, und aus dem Grundsatz, gleiche Größen kann man füreinander setzen, folgt die Richtigkeit des Lehrsatzes über die entgegengesetzten Winkel.

Bei diesen Beweisen treten ebenso wie bei dem Beweis der Gleichheit der Scheitelwinkel geometrische Grundsätze auf. Es würde falsch sein, diese vor Beginn der Raumlehre einprägen zu wollen; jeder derselben wird im konkreten Falle erklärt, angewendet und eingeprägt und so zum freien Eigentum der Kinder gemacht.

Wenn es möglich ist, sollten die Umkehrungen dieser drei Sätze von den Winkeln an durchschnittenen Parallelen dem Volksschulstoff zugewiesen werden, da das Parallelsein von Linien häufig aus den Eigenschaften gewisser Winkel gefolgert werden muß. Es genügt, den indirekten Beweis bei einer Winkelart einzuführen und bei den beiden andern Umkehrungen hierauf zurückzugreifen. Bequem ist es, wenn hierbei der Grundsatz angewendet wird, ein Teil kann nicht gleich sein dem Ganzen; lehrreicher aber wird es sein, wenn der Schüler folgern kann, daß bei zwei gleichen Winkeln, die den Winkelpunkt und einen Schenkel gemeinsam haben und die auf einer Seite dieses gemeinsamen Schenkels liegen, die anderen Schenkel aufeinanderfallen müssen. — Auch der Satz, daß Senkrechte sich schneiden, die auf den Schenkeln eines nicht gestreckten Winkels errichtet sind, gehört zum Volksschulraumlehrstoff, da sein Beweis sich an die notwendige Folgerung der Umkehrung des Satzes von den entgegengesetzten

Winkeln
nach
spitzer,
Wink-
nach
der
der
werden
Zuges
ist.
Das
immer
und
Schenkel
nur
Die
das Auf-
zwischen
der
die
die beiden
Deckung
ist
nimmt.
die Dreiecke

der
lich
und
hier
von
Wir
der
was
die
Name
Teilu
Die
Winke

aufeinandergelegt wurden, werden sie zur Führung des Beweises der beiden letzten Kongruenzsätze aneinander gelegt. Bei beiden Kongruenzsätzen erhalten wir gleichschenklige Dreiecke, und die Folgerungen führen auf einen der beiden ersten Kongruenzsätze zurück. Wir gebrauchen die Kongruenz der Dreiecke, um aus ihr die Gleichheit der homologen Stücke, also der gleichliegenden Seiten und Winkel zu folgern. Die Zahl der Sätze, mit deren Hilfe die Gleichheit der Winkel bewiesen werden kann, hat sich um vier vermehrt; die Gleichheit der Seiten läßt sich bis jetzt nur aus den Kongruenzsätzen folgern. In den gleichschenkligen Dreiecken liegen gleichen Seiten gleiche Winkel (die Basiswinkel) gegenüber. Jetzt beweisen wir, daß in jedem Dreieck der größeren Seite der größere Winkel (und umgekehrt) gegenüberliegt. Bei dem Beweise der Umkehrung des genannten Satzes müssen wir freilich den Satz „Zwischen zwei Punkten ist die gerade Linie der kürzeste Weg" als Grundsatz annehmen.

Sehr wichtig als Grundlage für die einfachsten und notwendigsten Konstruktionsaufgaben ist der Satz von den beiden gleichschenkligen Dreiecken auf einer Grundlinie. Daß die Grundlagen des Beweises dieselben sind, ob die Dreiecke auf einer Seite oder auf beiden Seiten der gemeinschaftlichen Grundlinie errichtet wurden, wird ein guter Schüler auffassen. Die vier sich anschließenden Konstruktionsaufgaben „Winkelhalbieren, Seitenhalbieren, Senkrechte in einem Punkte einer Geraden errichten und Senkrechte von einem Punkte nach einer Geraden fällen" geben passenden Stoff zur schriftlichen Beschäftigung und sind für den weiteren Ausbau der Raumlehre unbedingt notwendig. Im engen Anschluß an die behandelten Sätze werden nun die verschiedenen Linien mit einander verglichen, die man von einem Punkt nach einer geraden Linie ziehen kann und als Vorbereitung für eine größere Anzahl späterer Beweise ist es notwendig, die Sätze über die Lage des Mittelpunktes an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks zur Mitte der Grundlinie einzuführen. Man achte darauf, daß, wenn in der Voraussetzung gesagt ist, das Dreieck ist gleichschenklig und eines der drei Stücke, halbierter Winkel an der Spitze, halbierte Grundlinie und Senkrechte von der Spitze auf die Grundlinie ist gegeben, die Folgerung lautet, die beiden anderen der genannten Stücke sind gleich, daß aber aus zwei in der Voraussetzung gegebenen gleichen Stücken nicht nur die Gleichheit des dritten, sondern auch die Gleichheit zweier Dreiecksseiten, also das gleichschenklige Dreieck, folgt. Schon der nächste Satz von den Senkrechten in den Mitten der drei Dreiecksseiten läßt sich direckt unter Benutzung der vorstehenden Folgerungen beweisen; denn ist der Durchschnittspunkt von zwei dieser Mittelsenkrechten mit den drei Eckpunkten des Dreiecks verbunden, so müssen die Dreiecke gleichschenklig sein (die Spitze des Dreiecks liegt senkrecht über der Mitte der Grundlinie) und die Verbindungslinie des Durchschnittspunktes mit der Mitte der dritten Seite muß senkrecht auf dieser stehen (denn im gleichschenkligen Dreieck ist der Winkel an der Spitze mit der Mitte der Grundlinie verbunden). — Daß die Halbierungslinien der drei Winkel eines Dreiecks sich in einem Punkte schneiden, der von den Seiten gleich weit entfernt ist, folgt aus der

Kongruenz der Dreiecke. — Wie viele bildenden Momente liegen in dieser einfachen Dreieckslehre.

c) Die Lehre von den Parallelogrammen.

Nach eingehender Behandlung der Dreieckslehre bietet die Behandlung der Parallelogramme keine besonderen Schwierigkeiten. Aus der Kongruenz der Dreiecke folgt die Gleichheit der Gegenwinkel und Gegenseiten des Parallelogramms, und hieran schließt sich die Einteilung der Parallelogramme nach den Seiten und nach den Winkeln. Ebenso wird der Satz, daß die Diagonalen eines Parallelogramms sich halbieren und daß jede andere gerade Linie, die durch den Durchschnittspunkt der Diagonalen gezogen und von den Seiten des Parallelogramms begrenzt wird, in diesem Durchschnittspunkt halbiert wird, durch Kongruenz der entstehenden Dreiecke bewiesen. Daß die Diagonalen der gleichseitigen Parallelogramme die Winkel halbieren und senkrecht aufeinanderstehen, schließt sich an die Sätze von den beiden gleichschenkligen Dreiecken auf einer Grundlinie an, während der Satz von der Gleichheit der Diagonalen in den rechtwinkligen Parallelogrammen wieder auf die Kongruenz der Dreiecke führt.

d) Die Lehre vom Trapez.

Es sind nur wenige Sätze vom Trapez, die in der Volksschule behandelt werden. Der wichtige Satz von der Mittellinie wird durch die Kongruenz der Dreiecke bewiesen, und der Beweis der Sätze von den Seiten, Winkeln und Diagonalen im gleichschenkligen Trapez benutzt das gleichschenklige Dreieck. Im Anschluß an den Satz von der Mittellinie des Trapezes wird der Begriff „Mittellinie im Dreieck“ festgestellt, und beide Sätze von den Mittellinien führen zur Lösung der wichtigen Aufgabe, eine gerade Linie in n gleiche Teile zu teilen.

e) Die Lehre vom Kreise und von den regelmäßigen Vielecken.

Im Anschluß an die Raumformenlehre werden die Definitionen für Kreis, Kreislinie, Halbmesser, Durchmesser, Kreisabschnitt, Kreisausschnitt, Sehne, Tangente, Zentriwinkel, Peripheriewinkel u. a. noch einmal eingeführt und befestigt. Die Lehrsätze von der Lage des Mittelpunkts einer Sehne zum Mittelpunkte des Kreises und von der Entfernung gleicher Sehnen vom Mittelpunkte des Kreises können mit Hilfe der Kongruenzsätze, aber auch durch direkte Zurückführung auf die Sätze vom gleichschenkligen Dreieck bewiesen werden. Der Satz von der Entfernung ungleicher Sehnen vom Mittelpunkt des Kreises führt naturgemäß auf den Satz zurück, daß im Dreieck dem größeren Winkel die größere Seite (und umgekehrt) gegenüberliegt. Aus der gleichmäßigen Krümmung der Kreislinie folgt, daß die zu gleichen Sehnen gehörigen Kreisbogen, da sie gleichen Anfangs und Endpunkt haben, sich decken, also gleich sind, und mit Hilfe der Kongruenzsätze folgern wir die Beziehung von Zentriwinkeln, Kreisabschnitten und Kreisausschnitten, die zu gleichen Sehnen gehören.